

文章编号: 1000-4750(2006)01-0139-05

考虑体积塑性应变的岩石损伤本构模型研究

* 韦立德¹, 杨春和¹, 徐卫亚²

(1. 中科院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071; 2. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘 要: 采用 Eshelby 等效夹杂方法建立岩石弹塑性损伤本构模型是一种有效方法, 但相关文献目前还极少。在连续介质损伤力学框架内利用细观力学的 Eshelby 等效夹杂方法建立了考虑损伤相塑性体积变形的岩石的 Helmholtz 自由比能函数。利用连续介质损伤力学方法推导出了考虑损伤相塑性变形的岩石损伤本构关系, 给出了损伤演化方程和塑性应变发展方程。并通过数值模拟证实该模型能够反映岩石体积塑性应变、损伤的变化规律和损伤部分不能承受拉应力等力学特性。

关键词: 岩石力学; 岩石; 本构模型; 损伤; 塑性

中图分类号: TU452 **文献标识码:** A

A DAMAGE CONSTITUTIVE MODEL FOR ROCK WITH PLASTIC VOLUME STRAIN

* WEI Li-de¹, YANG Chun-he¹, Xu Wei-ya²

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, the Chinese Academy of Science, Wuhan 430071, China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The Eshelby equivalent inclusion method is an effective method to establish the constitutive models for elastoplastic and damage rock. There have been only a few publications addressing the Eshelby equivalent inclusion method for establishment of the constitutive models until now. In this paper, a Helmholtz free energy function for damage rock with plastic volume strain is set up by the Eshelby equivalent inclusion method in the framework of continuum damage mechanics. A constitutive equation for damage rock with plastic volume strain is obtained from the Helmholtz free energy function with the theory of continuum damage mechanics. The corresponding damage evolution equation and an evolution equation of plastic volume strain are deduced. Numerical results show that the constitutive model can reflect the plastic volume strain affecting damage and damaged rock can not transfer tensile stress.

Key words: Rock mechanics; rock; constitutive model; damage; plasticity

固体材料的损伤和破坏是指它在外载作用下, 由于内部大量微损伤(微裂纹或孔洞)的萌生、扩展和连接, 导致材料宏观力学性能的劣化乃至最终失

效。近年来, 损伤力学已迅速发展成为固体力学和工程技术界的一个研究热点, 而采用 Eshelby 相变理论建立固体材料本构模型是一种主要的研究方

收稿日期: 2003-12-09; 修改日期: 2004-06-28

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目 973(2002CB412704)和国家自然科学基金(50374064, 50334060)

作者简介: *韦立德(1973), 男, 广西来宾人, 博士, 中科院武汉岩土力学研究所站博士后, 主要从事岩石力学与工程方面的科研工作 (E-mail: weilide@tom.com);

杨春和(1962), 男, 江西人, 研究员, 博士, 博导, 主要从事岩石力学与工程方面的科研工作;

徐卫亚(1962), 男, 江苏张家港人, 教授, 博士, 博导, 主要从事岩石力学与工程方面的教学与科研工作。

法。文[1]和[2]从微观力学出发采用 Eshelby 相变理论和连续介质力学方法建立了固体材料的弹塑性本构模型，文[3]等采用各向异性介质中的 Eshelby 相变问题的解建立起了脆弹性固体材料的各向异性损伤统计本构模型。采用 Eshelby 相变理论建立弹塑性损伤本构模型的相关文献目前还极少，笔者还没有看到。本文采用各向同性介质中的 Eshelby 相变理论和连续损伤介质力学方法建立考虑体积塑性应变的岩石损伤本构模型。

1 微观和宏观变量关系

这里以已经破坏岩石微元占微元总体的比例为损伤变量^[4,5]。对于某一很小的具有代表性的损伤为 D 的岩石样品，其体积为 1，则已经破坏部分(缺陷相)体积大小为 D ，未破坏部分(没有损伤的岩石相)体积大小为 $1-D$ ，假设没有损伤岩石只发生弹性变形，其平均应力和应变分别为 σ^M 和 e^M ，假设已破坏岩石部分发生弹塑性变形，其平均应力和应变分别为 σ^F 和 e^F ， e^{eF} 和 e^{pF} 分别是弹性应变和塑性应变部分，假设此岩石样品的宏观应变为

$$\begin{aligned} e &= e^e + e^p = (1-D)e^M + De^F \\ e^e &= (1-D)e^M + De^{eF} \\ e^p &= De^{pF} \end{aligned} \tag{1}$$

岩石中缺陷相对岩石力学性质的影响极度复杂，现在还不能很好地解决。没有损伤岩石的弹性体积模量和弹性剪切模量分别记为 K^M 、 G^M ，在此假设缺陷相剪切模量为 0，弹性体积模量为^[6,7]

$$K^F = k_v K^M \tag{2}$$

式中 k_v 是一个范围为小于 1 的非负实常数，当体积应变为膨胀时取 0，其它情况下可通过实验曲线用间接方法(如最优化方法)取值。以下文中 M 代表没有损伤的岩石， F 代表缺陷相， S 代表割线的。土力学实验证明塑性体积应变和体积应力的自然对数为近似的线性关系，而前人通过实验研究发现高压下岩石的本构关系也可以用包含这一力学特征的土力学本构模型描述，因此在此假设缺陷相在受压缩体积应变时塑性体积应变和体积应力的自然对数为近似的线性关系

$$\sigma_{kk}^F = \sigma_c e^{\frac{e^{pF}}{c}} \tag{3}$$

式中 σ_c 和 c 为参数。在此假设缺陷相的塑性应变偏量为 0。塑性变形是缺陷中的破碎粒游移找到新的平衡点和不能恢复的特性，在此假设损伤相发生塑

性变形过程中化学自由比能和表面能发生的变化非常小可以忽略不计。

2 自由比能函数的确定

2.1 没有损伤的岩石相和缺陷相的应力和应变确定^[8]

把岩石看成由没有损伤的岩石相和缺陷相两相组成，假设缺陷均匀分布于岩石中，并且缺陷形状呈球形。设给定的岩石材料在其边界上受到远场均匀的应变 e 作用，损伤为 D ，缺陷相的平均体积塑性应变为，没有损伤的岩石中的平均应力为

$$\sigma^M = \sigma + \tilde{\sigma} = L^M (\ell + \tilde{\ell}) \tag{4}$$

其中： $\sigma = L^M e$ ， L^M 是没有损伤的岩石材料的弹性材料常数， $\tilde{\ell}$ 是缺陷相间相互作用产生的扰动应变。

球型缺陷内的平均应力为 σ^F

$$\begin{aligned} \sigma^F &= \sigma + \tilde{\sigma} + \sigma^{pt} = L^F (e^F - e^{pF}) = \\ &L^F (\ell + \tilde{\ell} + \ell^{pt} - e^{pF}) = \\ &L^M (\ell + \tilde{\ell} + \ell^{pt} - e^{pF} - \ell^*) \end{aligned} \tag{5}$$

其中： L^F 为缺陷相的弹性常数张量， e^* 为球型缺陷的等效本征应变， σ^{pt} 与 ℓ^{pt} 为由于单个缺陷的存在引起的扰动应力与应变， e^{pF} 是缺陷相的塑性应变。沿用 Eshelby 等效夹杂理论的推导有

$$\ell^{pt} = S_0 (\ell^{pF} + \ell^*) \tag{6}$$

式中， S_0 是四阶 Eshelby 张量，它与基体性质及夹杂的形状有关，设缺陷相与没有损伤的岩石相是各向同性材料且没有损伤的岩石相的泊松比 ν^M 在整个过程中不变，对球形夹杂体有

$$s_0 = (\alpha_0, \beta_0) \quad \alpha_0 = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu^M}{1 - \nu^M} \quad \beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^M}{1 - \nu^M} \tag{7}$$

再利用式(4)可得

$$\tilde{\ell} = -D\ell^{pt} = -DS_0(\ell^{pF} + \ell^*) \tag{8}$$

带入(5)式解得

$$\ell_{kk}^* + \ell_{kk}^{pF} = \frac{(1 - K_V)\ell_{kk} + K_V\ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1} \tag{9}$$

$$\ell_{ij}^* + \ell_{ij}^{pF} = \frac{\ell'_{ij}}{-(1 - D)\beta_0 + 1} \tag{10}$$

本文假设 $\ell'_{ij}{}^{pF} = 0$ ，再由式(4)和(5)可求得

$$\ell_{kk}^M = \frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1} \tag{11}$$

$$\ell'_{ij}{}^M = \frac{-\beta_0 + 1}{-(1 - D)\beta_0 + 1} \ell'_{ij} \tag{12}$$

$$\ell_{kk}^F = \frac{\ell_{kk} + (1-D)\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \quad (13)$$

$$\ell_{ij}^{\prime F} = \frac{1}{-(1-D)\beta_0 + 1} \ell_{ij}^{\prime} \quad (14)$$

$$\sigma_{kk}^M = \frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]3K^M \ell_{kk} - 3K^M D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^{\prime M} = \frac{-\beta_0 + 1}{-(1-D)\beta_0 + 1} 2G^M \ell_{ij}^{\prime} \quad (16)$$

$$\sigma_{kk}^F = \frac{3K^M K_V \ell_{kk} + [(1-D)\alpha_0 - 1]3K^M K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}^{\prime F} = 0 \quad (18)$$

2.2 弹性形变比能的确定^[1,2]

岩石的弹性形变比能是岩石发生损伤相变后在受到应力下具有的弹性形变比能，假定在没有损伤的岩石相中和在损伤相中应力和应变不随着空间坐标变化，且等于它们的相应平均值，则按照文献[9]可确定为

$$w = \frac{1}{2} \int_{1-D} \sigma_{ij}^M e_{ij}^M dv + \frac{1}{2} \int_D \sigma_{ij}^F (e_{ij}^F - e_{ij}^{pF} - e_{ij}^*) dv = \left\{ K^M \left[\frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \right]^2 + \right. \quad (19)$$

$$2G^M \left[\frac{-\beta_0 + 1}{-(1-D)\beta_0 + 1} \right]^2 \ell_{ij}^{\prime} \ell_{ij}^{\prime} \left. \right\} \frac{1}{2} (1-D) +$$

$$\frac{1}{2} DK_V^2 K^M \left\{ \frac{\ell_{kk} + [(1-D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \right\}^2$$

2.3 化学自由比能和表面能^[1,2]

在单位体积的岩石中当有 D 体积由没有损伤的岩石变为损伤相时所发生的化学能变化量为

$$\Delta G_{chem}(\theta) = (G_M(\theta) - G_F(\theta))D = \Delta G_{F \rightarrow M}(\theta)D \quad (20)$$

式中 $G_M(\theta)$ 和 $G_F(\theta)$ 分别为没有损伤的岩石相和损伤相化学自由比能，它们和温度 θ 有关系。假定在此相变过程中表面能能量变化量为

$$A_{sur} = A_0 D \quad (21)$$

式中 A_0 是单位体积由没有损伤的岩石变为损伤相时所发生表面能能量变化量。

2.4 相变过程中的耗散能^[1,2]

岩石由没有损伤的岩石变为损伤相过程中，在两相交界面因发生不一样大小的应变而产生磨擦热量，弹性波转变为热量，还有其它的一些方式，这些方式就是损伤耗散能发生的形式。损伤耗散能发生的过程是很复杂的过程，和塑性变形过程也有

关系，在此假设损伤耗散能总量可以用发生损伤过程中相变总体积数表示：

$$W^d = F(D) \quad (22)$$

具体形式用实验或者微观力学分析计算确定。

2.5 自由比能函数的确定^[1,2,9]

给定的岩石材料在其边界上受到远场均匀的应变 e 作用，损伤为 D ，缺陷相的平均体积塑性应变为 e_{kk}^{pF} ，岩石的初始密度为 ρ_0 ，在不考虑温度变化时对应小应变情况 Helmholtz 自由比能函数为

$$\rho_0 \Phi(e, \theta, D, \ell_{kk}^{pF}) = W + A_{sur} + \Delta G_{chem} = \left\{ K^M \left[\frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \right]^2 + 2G^M \left[\frac{-\beta_0 + 1}{-(1-D)\beta_0 + 1} \right]^2 \ell_{ij}^{\prime} \ell_{ij}^{\prime} \right\} \frac{1}{2} (1-D) + \frac{1}{2} DK_V^2 K^M \left\{ \frac{\ell_{kk} + [(1-D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \right\}^2 + A_0 D + \Delta G_{F \rightarrow M}(\theta) D \quad (24)$$

3 弹塑性损伤本构关系的确定

按照热力学理论，弹塑性损伤本构方程可确定如下

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho_0 \partial \Phi(e, \theta, D, \ell_{kk}^{pF})}{\partial e_{ij}^e} = (1-D)K^M \left\{ \frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{[(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1]^2} \right\} [(K_V - 1)\alpha_0 + 1] \delta_{ij} + 2G^M (1-D) \left[\frac{-\beta_0 + 1}{-(1-D)\beta_0 + 1} \right]^2 \ell_{ij}^{\prime} + DK_V^2 K^M \frac{\ell_{kk} + [(1-D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{pF}}{[(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1]^2} \delta_{ij} \quad (25)$$

令 Y 和 D ， R 和 e_{kk}^{pF} 是共轭的内变量对，按照热力学理论可确定为

$$Y = - \frac{\rho_0 \partial f(e, \theta, D, \ell_{kk}^{pF})}{\partial D} = \frac{1}{2} \left\{ K^M \left[\frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1} \right]^2 + 2G^M \left[\frac{-\beta_0 + 1}{-(1-D)\beta_0 + 1} \right]^2 \ell_{ij}^{\prime} \ell_{ij}^{\prime} \right\} - (1-D)K^M \frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{pF}}{[(K_V - 1)(1-D)\alpha_0 + 1]^3}$$

$$\begin{aligned} & \{-\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{PF} [(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1] + \\ & (K_V - 1)\alpha_0 \{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{PF}\} \} + \\ & 2(1 - D)G^M \beta_0 (-\beta_0 + 1)^2 \ell'_{ij} \ell'_{ij} [-(1 - D)\beta_0 + 1]^{-3} - \\ & \frac{1}{2} K_V^2 K^M \left[\frac{\ell_{kk} + [(1 - D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{PF}}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1} \right]^2 - \\ & DK_V^2 K^M \frac{\ell_{kk} + [(1 - D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{PF}}{[(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1]^3} \\ & \{-\alpha_0 \ell_{kk}^{PF} [(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1] + (K_V - 1)\alpha_0 \\ & [\ell_{kk} + [(1 - D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{PF}]\} - A_r - \Delta G_{F \rightarrow M}(\theta) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} R = -\frac{\rho_0 \partial f(e, \theta, D, \ell_{kk}^{PF})}{\partial \varepsilon_{kk}^{PF}} = (1 - D)K^M D\alpha_0 K_V \\ \frac{[(K_V - 1)\alpha_0 + 1]\ell_{kk} - D\alpha_0 K_V \ell_{kk}^{PF}}{[(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1]^2} - DK_V^2 K^M \\ \frac{[(1 - D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk} + [(1 - D)\alpha_0 - 1]\ell_{kk}^{PF}}{[(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1]^2} \end{aligned} \quad (27)$$

热力学第二定律要求

$$\rho_0 \theta \dot{\sigma}^* = Y\dot{D} + R\dot{\ell}_{kk}^{PF} \geq 0 \quad (28)$$

在上式中

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \quad \dot{\ell}_{kk}^{PF} = \frac{d\ell_{kk}^{PF}}{dt}$$

而 σ^* 是比熵产率。另一方面能量耗散率由式(22)可得

$$\dot{w}^d = \frac{\partial F(D)}{\partial D} \dot{D} = f(D)\dot{D} \quad (29)$$

比较式(28)和(29)可得

$$Y\dot{D} + R\dot{\ell}_{kk}^{PF} = f(D)\dot{D} \quad (30)$$

由式(3)和(17)可求得

$$\dot{\ell}_{kk}^{PF} = \left\{ \frac{-3K^M \alpha_0 K_V^2 \ell_{kk}^{PF}}{[(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1]^2} \dot{D} + \frac{3K^M K_V \dot{\ell}_{kk}}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1} \right\} / f_1 \quad (31)$$

式中

$$f_1 = \frac{\sigma_c e^{\frac{\ell_{kk}^{PF}}{c}}}{c} - \frac{3[(1 - D)\alpha_0 - 1]K^M K_V}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1} \quad \dot{e}_{kk} = \frac{\partial e_{kk}}{\partial t}$$

联合式(30)和(31)可求得

$$\dot{\ell}_{kk}^{PF} = \frac{3K^M K_V \dot{\ell}_{kk}}{(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 f_1 + f_1} \left\{ 1 - \frac{-3K^M \alpha_0 K_V^2 \ell_{kk}^{PF}}{[(K_V - 1)(1 - D)\alpha_0 + 1]^2 f_1} \bullet \frac{R}{Y - f(D)} \right\} = \frac{f_2 \dot{\ell}_{kk}}{f_1} \quad (32)$$

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} \dot{\ell}_{ij} & \ell_{kk}^{PF} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial D} - \frac{\partial f(D)}{\partial D} & \ell_{kk}^{PF} > 0 \\ -\frac{Rf_2 \dot{\ell}_{kk}}{Y - f(D)} & \ell_{kk}^{PF} > 0 \end{cases} \quad (33)$$

于是得到损伤演化规律如下

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & Y - Y_t < 0 \\ 0 & Y - Y_t = 0 \text{ 和 } \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} d\ell_{ij} \leq 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} \dot{\ell}_{ij} & \ell_{kk}^{PF} = 0 \quad Y - Y_t = 0 \text{ 和 } \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} d\ell_{ij} > 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial D} - \frac{\partial f(D)}{\partial D} & \ell_{kk}^{PF} > 0 \quad Y - Y_t = 0 \text{ 和 } \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} d\ell_{ij} > 0 \\ -\frac{Rf_2 \dot{\ell}_{kk}}{Y - f(D)} & \ell_{kk}^{PF} > 0 \quad Y - Y_t = 0 \text{ 和 } \frac{\partial Y}{\partial \ell_{ij}} d\ell_{ij} > 0 \end{cases} \quad (34)$$

其中 $Y_t = \max_{s \in (-\infty, t)} Y(s)$ 而塑性应变增长规律如下

$$\dot{\ell}_{kk}^{PF} = \begin{cases} 0 & \sigma_{kk}^F - \sigma_c e^{\frac{\ell_{kk}^{PF}}{c}} < 0 \\ 0 & \sigma_{kk}^F - \sigma_c e^{\frac{\ell_{kk}^{PF}}{c}} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial \sigma_{kk}^F}{\partial \ell_{kk}} d\ell_{kk} \leq 0 \\ f_2 \dot{\ell}_{kk} & \sigma_{kk}^F - \sigma_c e^{\frac{\ell_{kk}^{PF}}{c}} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial \sigma_{kk}^F}{\partial \ell_{kk}} d\ell_{kk} > 0 \end{cases} \quad (35)$$

4 模型三轴应力应变曲线的数值方法实现^[10]

当损伤相还处于弹性状态而不考虑初始损伤时，可以假设初始损伤变量大小为 0，对于每增加一个损伤相的应力增量，由损伤相的应力 σ_{kk}^F 用式(17)求得宏观应变 ℓ_{kk} ，由宏观应变 ℓ_{kk} 用式(25)求得宏观应力 σ_{kk} ，再由试验应力路径求得所有的宏观应力分量，从而得到各宏观应力偏量，由宏观应力偏量求得宏观应变偏量从而求得全部宏观应变分量，最后由宏观应变按式(34)求得损伤增量和损伤总量，接着增加一个损伤相的应力增量，按以上顺序迭代下去，直到 $\sigma_{kk}^F = \sigma_c$ 为止；接着对于每增加一个损伤相的塑性应变增量，由损伤相的塑性应变变量按式(3)求得损伤相的应力增量，由损伤相的应力 σ_{kk}^F 和损伤相的塑性应变变量用式(17)求得宏观应变 ℓ_{kk} ，由宏观应变 ℓ_{kk} 和损伤相的塑性应变变量用式(25)求得宏观应力 σ_{kk} ，再由试验应力路径求得所有的宏观应力分量，从而得到各宏观应力偏量，由宏观应力偏量用式(25)求得宏观应变偏量从而求得全部

宏观应变分量，由宏观应变和损伤相的塑性应变变量按式(34)求得损伤增量和损伤总量，最后由宏观应变和损伤相的塑性应变变量按式(35)求得损伤相的塑性应变增量和损伤相的塑性应变总量，接着增加一个损伤相的塑性应变增量，按以上顺序迭代下去，直到损伤量很大本节模型不适用为止。在没有损伤和塑性应变增加的情况下，由宏观应变、损伤相的塑性应变变量和损伤量用式(25)直接求得宏观应力。

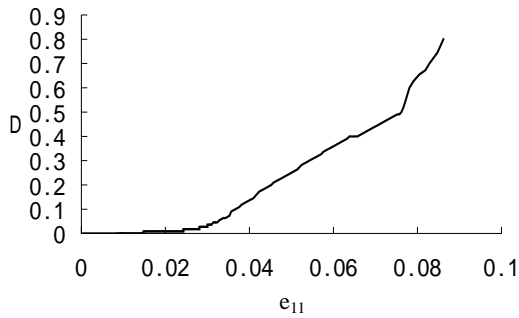


图 1 损伤演化曲线

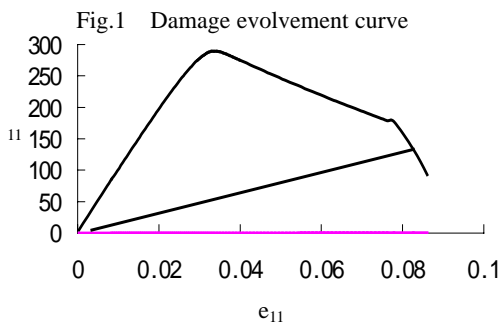


图 2 应力应变曲线

Fig.2 Stress-strain curve

图 1 损伤演化方程和图 2 应力应变曲线是本节模型的一个示例。 $E^M = 107\text{kPa}$ ， $\nu^M = 0.2$ ， $k_v = 0.0022$ ， $A_r = 13$ ， $\Delta G_{F \rightarrow M}(\theta) = 15$ ， $c = 406$ ， $\sigma_c = 2400\text{kPa}$ ， $\sigma_2 = 5\text{kPa}$ ，而 $f(D)$ 取值如下，其中损伤相有塑性应变时的函数是预先给定损伤增量由式(34)反求得对应函数值后用拉格朗日插值法插值而得。为求得函数 $f(D)$ 需用实验数据采用高效的优化方法确定函数的参数，确定该函数形式和它的参数或者确定损伤演化方程成为建模关键。

$$q(D) = \begin{cases} 820000 * \exp(-80.5 * D) & \ell_{kk}^{pF} \leq 0 \\ q_2(D) & \ell_{kk}^{pF} > 0 \end{cases}$$

$$q_2(D) = 22695.6087(D - 0.5956)(D - 0.6956) / (0.02 - 20232.5443(D - 0.4956) \cdot (D - 0.6956) / 0.01 + 17558.7372(D - 0.4956)(D - 0.5956) / 0.02$$

5 结论

在连续介质损伤力学框架内利用细观力学的

非线性 Eshelby 等效夹杂方法建立了考虑损伤相塑性变形的 Helmholtz 自由比能函数，并用连续损伤介质力学方法推导出了考虑损伤相塑性变形的岩石损伤本构关系，给出了损伤演化方程和塑性应变发展方程，该模型能够反映岩石体积塑性应变、损伤和损伤部分不能承受拉应力等力学特性。由于 Eshelby 等效夹杂方法不适用于夹杂相所占比例很大情况，所以本节模型在损伤量很大时不适用。另外，为确定损伤演化需要确定函数 $q(D)$ ，为求得该函数需用实验数据采用高效的优化方法确定函数中的参数，确定该函数的形式和它的参数或者确定损伤演化方程成为建模的关键。

参考文献：

- [1] Q P Sun, K C Hwang, S W Yu. A micromechanics constitutive model of transformation plasticity with shear and dilatation effect [J]. J. Mech. Phys. Solids, 1991, 39(4): 507~524.
- [2] Qing Ping Sun, Keh Chih Hwang. Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys— derivation of general relations [J]. J. Mech. Phys. Solids, 1993, 41(1): 1~17.
- [3] Khoroshun L P, Nazarenk L V. A model of the short-term damage ability of a transversally isotropic material [J]. Int. App. Mech., 2001, 37(1): 66~74.
- [4] 曹文贵, 方祖烈, 唐学军. 岩石损伤软化统计本构模型之研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 628~633.
Cao Wengui, Fang Zulie, Tang Xuejun. A study of statistical constitutive model for soft and damage rock [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(6): 628~633. (in Chinese)
- [5] 徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787~791.
Xu Weiya, Wei Lide. A statistical constitutive model for damage rock [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(6): 787~791. (in Chinese)
- [6] 杨松岩, 俞茂宏. 一种基于混合物理论的非饱和岩土类材料的弹塑性损伤模型[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 58~63.
Yang Songyan, Yu Maohong. A new feasible elasto-plastic damage model in the frame of the theory of mixtures [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 58~63. (in Chinese)
- [7] Frantziskonis G, Desai C S. Constitutive model with strain softening [J]. Int. J. Solid Structures, 1987, 23(6): 733~768.
- [8] Weng G J. The overall elastoplastic stress-strain relations of dual-phase metals [J]. J. Mech. Phys. Solids, 1990, 38(3): 419~441.
- [9] Mura T. Micromechanics of defects in solids [M]. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1982.
- [10] 韦立德. 岩石力学损伤和流变本构模型研究[D]. 南京: 河海大学, 2003.
Wei Lide. Rock mechanics damage and rheology constitutive models [D]. Nanjing: Hehai University, 2003. (in Chinese)