

文章编号: 1000-7598-(2005)增刊-091-04

# 对挡墙后无粘性填土中破裂面的研究

许锡昌, 陈善雄, 徐海滨

(中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

**摘要:** 在传统的库伦土压力理论中, 刚性挡墙后无粘性填土中的破裂面被假定为平面。然而, 一些室内试验和现场测试结果均已证明了实际破裂面是曲面。以刚性挡墙后无粘性填土中的破裂面为研究对象, 以竖向微分单元法为基础, 利用变分原理推导了主、被动状态下关于破裂面曲线的微分方程, 并对该方程进行了求解。研究表明, 当墙背光滑或墙背与土体的摩擦系数为定值时, 填土中的破裂面和破裂角均与库伦土压力理论相同; 当墙背与填土的摩擦系数呈线性规律变化时, 对应的破裂面为曲面。最后, 讨论了墙背摩擦角和填土内摩擦角对破裂角的影响。

**关键词:** 破裂面; 刚性挡墙; 无粘性土; 变分法; 解析解

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

## Study on active and passive failure surface in backfilled cohesionless soil behind rigid retaining wall

XU Xi-chang, CHEN Shan-xiong, XU Hai-bin

(Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** In the classical Coulomb's earth pressure theory, the failure surface in the backfilled cohesionless soil behind rigid retaining wall in slope engineering is assumed a plane. However, it has been proved by a number of laboratory and field tests that this failure surface is actually a curved surface. In this paper, based on the vertical differential element method and the variational principle with moveable boundary, a quadratic ordinary differential equation of the first order about the failure surface is deduced. Three cases of the equation are discussed: 1) without lateral shear force at the interface between two elements, and the back of the retaining wall is frictionless, the failure surface is a plane; 2) lateral shear force is a constant, and the back of the wall is rough, the failure surface is also a plane, the two cases above mentioned are identical to Coulomb's theory; 3) lateral shear force increases linearly from the tip to the toe, the failure surface is a curved surface. Results show that the proposed approach can predict right failure pattern of the backfilled cohesionless soil, which is in good agreement with that of the laboratory and field tests.

**Key words:** failure surface; rigid retaining wall; cohesionless soil; variational principle; analytical solution

### 1 引言

挡墙土压力是一个古老的问题, 研究的首要前提就是确定挡墙后填土中破裂面的形状, 大量的室内试验结果表明, 挡墙后无粘性填土中的破裂面是一个曲面, 但到目前为止, 在作者所接触到的文献中, 对破裂面多为定性描述<sup>[1~4]</sup>。然而, 许多学者对平面滑裂面的假设提出了置疑, 并陆续使用曲面假设进行土压力分析。1973年, 美国的 ELLIS 试用假想的旋轮线破裂面计算沟壑的安全度并获得了较满意的成果, 并在其论文中指出, 墙背填土在极限

破坏时的破裂面为旋轮线<sup>[5]</sup>。1984年, 我国的范宝华首先采用摆线模型求取直墙砂土填土时的主动土压力, 其方法得到了国内外的认可, 曹振民以旋轮线作为破裂面模型, 研究了填土为砂性土时的土压力和破裂面<sup>[6]</sup>。王鸿兴、孙大庆利用变分法推导了挡墙后填土中关于滑裂面的微分方程, 讨论了几种特定条件下滑裂面的解析解, 但未讨论滑裂面的具体情况<sup>[7]</sup>。

本文在文献[7]研究成果的基础上, 推导了墙背粗糙情况下滑裂面曲线的解析解, 讨论了填土物理学参数和墙背光滑程度对破裂角的影响。

修改稿收到日期: 2005-03-30

作者简介: 许锡昌, 男, 博士, 1972年生, 主要从事土与结构物相互作用方面的研究。E-mail:xcxu@whrsm.ac.cn

## 2 基本方程

### 2.1 滑裂面微分方程

大量的室内试验和现场测试数据表明,在极限平衡条件下,挡墙后填土中的滑裂面是一个曲面,在土压力计算分析过程中只有考虑其真实的工作性状,才能得到适合工程需要的稳定性分析结果。下面将以主动极限平衡状态下刚性挡墙后无粘性填土中的破裂面为研究对象,讨论滑裂面曲线的解析解。

如图1所示,一刚性挡墙,墙高 $h$ ,墙背竖直,墙后填均匀无粘性土,为便于分析,特做出以下假设:

- (1) 该问题为平面应变问题,假定滑裂面曲线由函数 $y = y(x)$ 表示;
- (2) 若 $y = y(x)$ 为直线,则定义破裂面与水平的夹角为主动破裂角 $\theta_{acr}$ ,被动破裂角为 $\theta_{pcr}$ ;
- (3) 滑裂面曲线经过点 $(0, h)$ 和 $(x_0, 0)$ ;
- (4) 位于挡墙和滑裂面之间的任一竖向单元体都达到主动极限平衡状态;
- (5) 挡墙和墙后填土的摩擦角为 $\delta_w$ ,摩擦系数为 $\xi_w = \tan \delta_w$  ( $w$ 代表挡墙)。

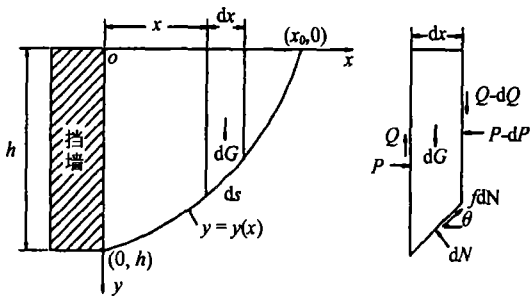


图1 挡土墙受力分析  
Fig.1 Analytical model of retaining wall

对任一竖向单元体,若假定填土内摩擦角为 $\varphi$ ,则 $x$ 轴方向单元体的力平衡方程为

$$\frac{dP}{dx} + \frac{f + y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{dN}{dx} = 0 \quad (1)$$

式中  $P$  为土条间侧向作用力;  $f$  为填土的摩擦系数,  $f = \tan \varphi$ ;  $y' = dy/dx$ ;  $dN$  为破裂面上的法向力。

$y$  轴方向单元体的力平衡方程为

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{1 - yf'}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{dN}{dx} - \gamma y = 0 \quad (2)$$

式中  $Q$  为土条间切向力;  $\gamma$  为填土重度。

令  $\frac{dQ}{dx} = \xi \frac{dP}{dx}$ ,  $\xi$  为两单元体接触面上的摩擦

系数,所以,由式(1)和式(2)可得

$$dP = \frac{\gamma y(f + y')}{(f + \xi)y' + (\xi f - 1)} dx \quad (3)$$

式(3)即为主动土压力的微分方程。

由式(3),主动状态下侧压力 $P$ 的表达式可写为

$$P = \int_0^{x_0} \frac{\gamma y(f + y')}{(f + \xi)y' + (\xi f - 1)} dx = \int_0^{x_0} F(y, y') dx \quad (4)$$

从式(4),根据可动边界变分原理, $y = y(x)$ 的微分方程为

$$y'^2(f + \xi) + 2y'f(f + \xi) + (\xi f - 1)f = 0 \quad (5)$$

同样,可得到被动状态下 $y = y(x)$ 的微分方程为

$$y'^2(f + \xi) - 2y'f(f + \xi) + (\xi f - 1)f = 0 \quad (6)$$

### 2.2 破裂面微分方程的求解

从式(5)和式(6)可以看出, $\xi$ 的取值与滑裂面的形状有直接关系。主要有3种情况:

(1)  $\xi = \xi_w = 0$ ,两单元体接触面上无剪应力,代表墙背光滑的情况;

(2)  $\xi = \xi_w = \tan \delta_w$ , $\xi$ 在两单元体接触面上剪应力为定值,并等于墙背与填土的摩擦系数;

(3)  $\xi = \xi_w y/h = (\tan \delta_w)y/h$ , $\xi$ 在两单元体接触面上剪应力呈线性分布关系。

#### 2.2.1 $\xi = \xi_w = 0$ 时的破裂面

主动状态方程(5)的解为

$$y = -\tan(45^\circ + \varphi/2)x + h \quad (7)$$

主动破裂面为平面,破裂角为 $\theta_{acr} = 45^\circ + \varphi/2$ 。

被动状态方程(6)的解为

$$y = -\tan(45^\circ - \varphi/2)x + h \quad (8)$$

被动破裂面为平面,破裂角为 $\theta_{pcr} = 45^\circ - \varphi/2$ 。可以看出,当 $\xi = 0$ 时,主(被)动破裂面由曲面演变成平面,与库伦土压力理论完全相同。

#### 2.2.2 $\xi = \xi_w = \tan \delta_w$ 时的破裂面

主动状态方程(5)的解为

$$y = -f \left( 1 + \sqrt{\frac{1 + f^2}{f(f + \xi_w)}} \right) x + h \quad (9)$$

被动状态方程(6)的解为

$$y = f \left( 1 - \sqrt{\frac{1 + f^2}{f(f + \xi_w)}} \right) x + h \quad (10)$$

可以看出， $\xi = \xi_w$  时，主（被）动破裂面由曲面演变成平面，与库伦土压力理论完全相同。

2.2.3  $\xi = \xi_w y/h = (\tan\delta_w)y/h$  时的破裂面

由主动状态方程 (5) 得

$$\frac{dy}{dx} = -f \left( 1 + \sqrt{\frac{1+f^2}{f(f+\xi_w y/h)}} \right)$$

令  $\sqrt{\frac{1+f^2}{f(f+\xi_w y/h)}} = t$ ，则  $dy = \frac{-2h(1+f^2)}{f\xi_w} \frac{dt}{t^3}$ ，

所以  $dx = \frac{2h(1+f^2)}{f^2\xi_w t^3(1+t)} dt$ ，积分得

$$x = \frac{2h(1+f^2)}{f^2\xi_w} \left[ \ln \frac{t}{t+1} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t} \right] + C \quad (11)$$

同样，被动状态方程 (6) 的解为

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2h(1+f^2)}{f^2\xi_w} \left[ \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} - \ln \frac{t}{t-1} \right] + C \\ t &= \sqrt{\frac{1+f^2}{f(f+\xi_w y/h)}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式 (11), (12) 中  $C$  为常数，可利用  $x=0, y=h$  迭代求出。

3 破裂面的形状与破裂角

从以上分析可以看出，破裂面的形状与  $\xi$  取值有关，现就式 (7) ~ (12) 分析如下：

(1)  $\xi = \xi_w = 0$

墙背光滑时，填土中的破裂面为平面，与库伦土压力理论中墙背光滑且竖直、填土面水平时的破裂面相同，破裂角也相同。

(2)  $\xi = \xi_w = \tan\delta_w$

填土中的破裂面为平面，与库伦土压力理论中墙背光滑且竖直、填土面水平时的破裂面相同，破裂角也相同。墙背与墙后填土之间的摩擦角  $\delta_w$  的值界于  $0 \sim \varphi$  之间。

图 2 和图 3 分别给出了主、被动状态下填土内摩擦角在  $5^\circ \sim 40^\circ$  范围内破裂角的变化规律。

从图可以看出：

- ① 当填土性质一定时，主（被）动破裂角均随墙背摩擦角  $\delta_w$  增大而逐渐减小；
- ② 对于不同填土，当  $\delta_w$  相同时， $\theta_{acr}$  随着  $\varphi$  的增大而增大； $\theta_{pcr}$  随着  $\varphi$  的增大而减小。
- ③ 当  $\varphi < 20^\circ$  时，墙背与填土的摩擦角  $\delta_w$  对  $\theta_{acr}$  的影响较大，随着  $\varphi$  的增大，其对  $\theta_{acr}$  的影响逐渐减弱。

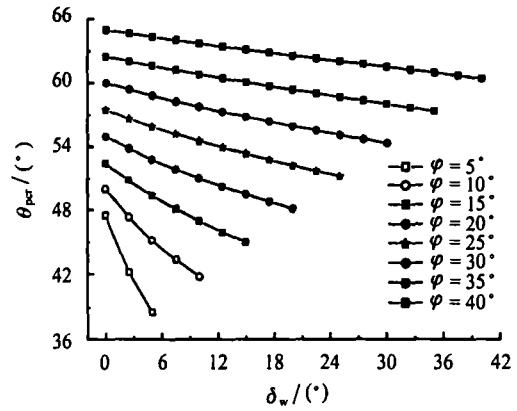


图 2 主动破裂角  $\theta_{acr}$  与  $\delta_w$  关系曲线 ( $\xi = \xi_w$ )  
Fig.2 Relationship between  $\theta_{acr}$  and  $\delta_w$  ( $\xi = \xi_w$ )

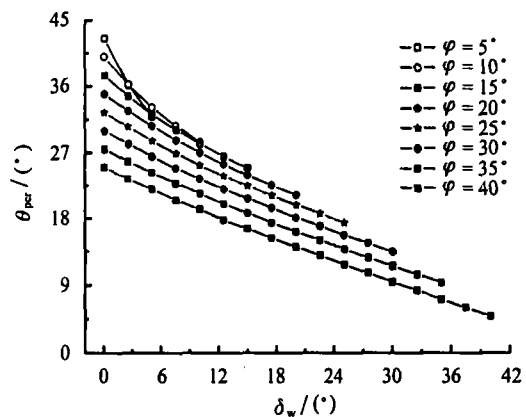


图 3 被动破裂角  $\theta_{pcr}$  与墙背摩擦角  $\delta_w$  关系曲线 ( $\xi = \xi_w$ )  
Fig.3 Relationship between  $\theta_{pcr}$  and  $\delta_w$  ( $\xi = \xi_w$ )

(3)  $\xi = \xi_w y/h = (\tan\delta_w)y/h$

下面的例子将展示利用式 (11) 和式 (12) 来确定的一刚性挡墙后无粘性填土中主（被）动破裂面的形状。

该刚性挡墙高 8 m，墙背竖直，填土面水平， $\delta_w = 20^\circ$ ，墙后填无粘性土， $\varphi = 30^\circ$ ， $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ 。

图 4 和图 5 分别给出了填土中主动破裂面曲线的形状。

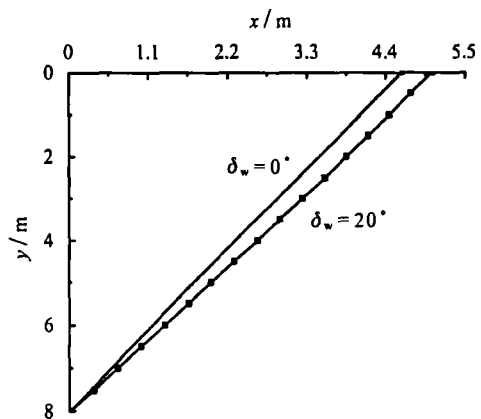


图 4 填土中主动滑裂面曲线 ( $\xi = \xi_w y/h$ )  
Fig.4 Active failure surface in the backfilled soil

从图4可以看出,当 $\delta_w = 20^\circ$ 时,对应的破裂面是一个曲面,在 $xoy$ 面上的投影是一条近似直线的曲线。

从图5可以看出,当墙背光滑时,被动破裂面曲线演变成一条直线;当 $\delta_w = 20^\circ$ 时,破裂面为典型曲面。

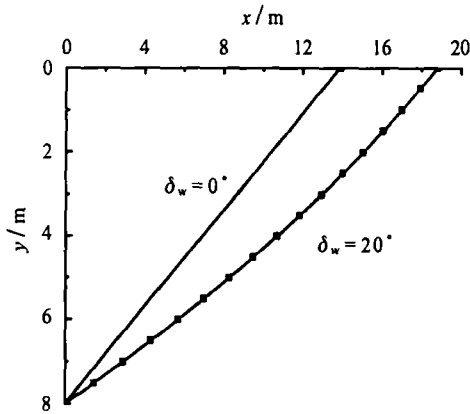


图5 填土中被动滑裂面曲线( $\xi = \xi_w y/h$ )

Fig.5 Passive failure surface in the backfilled soil

不难看出,  $\xi = \xi_w y/h$ 时所对应的破裂面曲线界于 $\xi = 0$ 和 $\xi = \xi_w$ 之间。

#### 4 对破裂面解析解的讨论

从本文研究成果可知,当墙背光滑或墙背与填土的摩擦系数为定值时,所对应的主、被动破裂面为平面;当墙背与填土的摩擦系数呈线性变化时,主、被动破裂面为曲面,但主动破裂面近似为平面,被动破裂面为典型的曲面。

尽管本文中得出了破裂面为曲面的结论,但分析过程中仍需完善:

(1) 在对挡土墙的微分单元体进行受力分析时没有考虑力矩的作用,对破裂面的解析解可能会有一定影响;

(2) 土条接触面上摩擦系数的假定直接关系到破裂面的形式,本文算例中当墙背与填土的摩擦

系数呈线性规律变化时,主动破裂面近似为平面,被动破裂面却为典型曲面,所以,土条接触面上摩擦系数的假定对破裂面的影响程度有待进一步研究。

(3) 本文算例尽管证明了破裂面可能存在曲面形式,但缺乏实测数据的验证,今后有待完善。

#### 5 结论

(1) 挡墙后无粘性填土中破裂面的形状与土条接触面上摩擦系数的假设有关。当摩擦系数为零或恒值时,破裂面为平面;当摩擦系数呈线性变化时,破裂面为曲面;

(2) 当土条接触面上摩擦系数为零或恒值时,对应的破裂角与库伦理论所得到的破裂角相同;

(3)  $\xi = \xi_w y/h$ 时,所对应的破裂面曲线界于 $\xi = 0$ 和 $\xi = \xi_w$ 所对应的两条直线之间。

#### 参考文献

- [1] 顾慰慈,武全社,陈卫平. 挡土墙背填土中滑裂体形状的试验研究[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(2): 49-56.
- [2] 周应英,任美龙. 刚性挡土墙主动土压力的试验研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 19-26.
- [3] WANG Yuan-zhan. Distribution of earth pressure on a retaining wall[J]. *Geotechnique*, 2000, 50(1): 83-88.
- [4] Sangchul Bang. Active earth pressure behind retaining walls[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1985, 111(3): 407-413.
- [5] Harold B Ellis. Use of cycloidal arcs for estimating ditch safety[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, 1973, 99(SM2): 165-179.
- [6] 曹振民. 挡土墙填土曲线破裂面主动土压力分析[J]. 中国公路学报, 1995, 8(增1): 7-14.
- [7] 王鸿兴,孙大庆. 挡土墙后土体滑裂面及土压力变分法初探[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(3): 86-93.