

# 弹塑性问题的杂交无网格有限体积差分法

黄哲聪<sup>1</sup>, 郑宏<sup>1</sup>, 张建海<sup>2</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;

2. 四川大学水电学院, 四川 成都 610065)

**摘要:** 为了提高无网格法的应力精度, 将应力与位移作为独立变量进行插值。将整个求解域分为边界域和内部域, 对于位于边界域上的节点通过有限体积法建立离散方程, 域内节点则利用有限差分法对节点应力梯度进行离散, 逐点建立离散方程。在小变形假设的前提下, 提出基于增量本构关系的弹塑性杂交无网格有限体积差分法, 并用来说明隧道开挖过程, 算例表明, 增量形式的杂交无网格有限体积差分法具有较高的计算精度和一定的工程实践价值。

**关键词:** 数值分析; 无网格有限体积法; 无网格有限差分法; 有限元法; 弹塑性; 隧道

**中图分类号:** O 241

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2009)增 1 - 2620 - 09

## HYBRID MESH-FREE FINITE VOLUME DIFFERENCE METHOD FOR ELASTOPLASTIC PROBLEMS

HUANG Zhecong<sup>1</sup>, ZHENG Hong<sup>1</sup>, ZHANG Jianhai<sup>2</sup>

(1. *State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Science, Wuhan, Hubei 430071, China;* 2. *College of Water Resources and Hydropower, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China*)

**Abstract:** To improve the precision of stresses with the mesh-free method, the stresses as well as displacements are interpolated independently. The whole domain is divided into boundary-domain and inside-domain. For the nodes on the boundary, the mesh-free finite volume method is used to establish the discrete equations. For the other nodes inside the domain, the mesh-free finite difference method is employed to discretize the gradients of stress node by node. Under the hypothesis of the small deformation, the hybrid mesh-free finite volume difference method for elasto-plastic analyses is proposed based on the incremental constitutive equations. The course of tunnel excavation is stimulated. Numerical examples show that the proposed incremental hybrid mesh-free finite volumetric difference method has high precision and efficiency, moreover it is of some practical value.

**Key words:** numerical analysis; mesh-free finite volume method; mesh-free finite difference method; finite element method; elasto-plasticity; tunnel

## 1 引言

无网格法一种不需要对求解域进行单元离散的

数值计算方法。与基于单元的数值计算方法, 如有限单元法相比, 它有其内在的优势, 例如前处理简单灵活, 只需要节点信息, 计算结果连续光滑, 不必进行应力光顺化等后处理, 最重要的是它的近似

**收稿日期:** 2008 - 01 - 17; **修回日期:** 2008 - 04 - 14

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(905100194)

**作者简介:** 黄哲聪(1975 -), 男, 1998年毕业于湖北工学院工业与民用建筑专业, 现为博士研究生, 主要从事岩石力学数值计算等方面的研究工作。

E-mail: huangzhecong2002@163.com

函数没有网格依赖性, 减少了因网格畸变引起的困难。目前, 无网格法已经得到了很大的发展, 大体分成两类: 一类是基于偏微分方程(PDEs)积分形式的弱式法, 如基于全局弱式法无网格伽辽金法(EFGM)<sup>[1]</sup>, 再生核粒子法(RKPM)<sup>[2]</sup>等, 基于局部弱式法的局部 Petrov-Galerkin 法(MLPG)<sup>[3]</sup>, 以及以 Heaviside 函数作为检验函数的无网格有限体积法(MFVM)<sup>[4-5]</sup>; 另一类为直接从偏微分方程出发的强式法, 以无网格配点法<sup>[6]</sup>为代表。

无论是 PDE 弱式法还是强式法, 均有各自的优缺点。弱式法的优点是: (1) 对偏微分方程的积分过程可减少其积分域上的误差, 从而改善了解精度, 提高了解稳定性; (2) 降低了对试函数的连续性要求; (3) 利用分部积分所形成的边界积分项可自然施加面力边界条件。然而, 弱式法的数值积分形式复杂, 计算量成为其发展的最大障碍。对于强式法而言, 其突出的优点就是实现过程简洁而直接, 在仅含 Dirichlet 边界条件时计算效率和求解精度都较高。然而, 当问题的 PDEs 包括导数边界条件(例如面力边界条件)时, 强式法通常不够稳定且精度不高; 而微分算子属于粗糙算子, 它将有可能放大误差而导致 PDEs 的解不稳定; 面力边界条件不能像弱式法一样自然施加。如果将二者相结合, 将实现优势互补, 提高计算效率和精度。因此, 本文提出了一种强弱结合的无网格法: 杂交无网格有限体积差分法(HMFVDM), 其中所谓“杂交”, 是指应力和位移都进行独立插值, 应力与位移可以采用完全不同的插值模式; 所谓“无网格有限体积差分法”(MFVDM), 就是无网格有限体积法与广义有限差分<sup>[7-8]</sup>形式的配点法相结合的弱-强型无网格法。

本文在提出杂交无网格有限体积差分的基础上, 将其用来求解弹塑性问题。此外, 还利用 HMFVDM 来模拟隧道开挖问题。通过算例表明, 该方法与有限元结果比较接近。

## 2 应力梯度无网格有限差分离散法

在一般的力学分析过程中都会出现位移或者应力梯度的计算问题, 在寻找解析解比较困难的情况下, 利用离散的方法求解未知函数的梯度则是一个非常有效的途径。在对未知函数的高阶导数进行离散的数值方法中, 有限差分法最为简单高效。但传统的有限差分法依然是一种网格型的数值方法, 需

要利用网格对未知函数的导数进行近似。如果将有限差分法从网格中脱离出来, 利用任意布置的相邻节点上的场函数值来近似表示未知函数的高阶导数, 则具有了无网格的特征, 这种广义有限差分思想最早由 T. J. Liszka 等<sup>[7-8]</sup>提出的, 又称之为无网格有限差分法(mesh-free finite difference method, MFDM)<sup>[9]</sup>。

无网格有限差分法与其他无网格法一样, 在无网格有限差分法中, 每个节点  $I$  都有其支撑域, 在支撑域内随机分布着多个节点, 如图 1 所示。

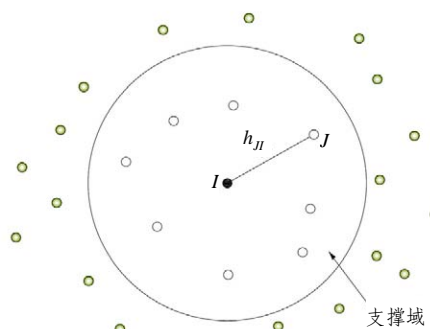


图 1 无网格有限差分方案

Fig.1 Mesh-free finite difference scheme

假设函数  $f(x): R^2 \rightarrow R$  在计算点  $x_I$  处连续可微, 为确定  $f(x_I)$  的一阶导数的表达式, 对计算点  $x_I$  影响域内的节点  $x_j (1 \leq j \leq M)$ , 其中  $M$  是影响域内的节点总数)上的未知函数  $f(x_j)$  在  $x_I$  处进行一阶泰勒展开, 即

$$f^j = f^I + (x_j^I - x_I^I) f'_{j,I} + o[\|x_j - x_I\|^2] \quad (1)$$

式中:  $f^I$  为节点  $I$  的函数值及其梯度,  $f'_{j,I} = \frac{\partial f(x_I)}{\partial x_j}$ 。

为求得梯度  $f'_{j,I}$ , 可使目标函数最小化:

$$E(x^I) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M w_{j,I} [f^j + (x_j^I - x_I^I) f'_{j,I} - f^I]^2 \quad (2)$$

式中:  $w_{j,I}$  为节点  $x_j$  在  $x_I$  上的权函数, 可取移动最小二乘法(MLS)中采用的权函数。

为使目标函数  $E(x^I)$  最小化, 可将  $E(x^I)$  对  $f'_{j,I}$  求极值, 即

$$\frac{\partial E(x^I)}{\partial f'_{j,I}} = 0 \quad (3)$$

整理得

$$f'_{j,I} = \sum_{j=1}^M \Psi_j^{j,I} f^j - f^I \Theta_j^I \quad (4)$$

其中,

$$\Psi_j^II = \frac{w_{II} h_j^II}{\sum_{j=1}^M w_{II} (h_j^II)^2} \quad (5)$$

$$h_j^II = x_j^J - x_j^I \quad (6)$$

$$\Theta_j^I = \sum_{j=1}^M \Psi_j^II \quad (7)$$

如果  $f(x)$  为位移函数, 根据式(4), 则位移梯度可以离散为

$$u_{i,j}^I = \sum_{j=1}^M Q_j^II u_i^j \quad (8)$$

其中,

$$Q_j^II = \begin{cases} \Psi_j^II & (J \neq I) \\ -\Theta_j^I & (J = I) \end{cases} \quad (9)$$

式(4)具有一般性, 不仅适用于计算位移梯度, 同样适用于求解应力梯度, 则节点  $x_I$  处的应力梯度可以用相邻节点  $x_j$  处的应力近似表示为

$$\sigma_{ij,k}^I = \sum_{j=1}^M Q_k^II \sigma_{ij}^j \quad (10)$$

由式(10)可以看出, 任意节点上的应力梯度都可以用相邻节点上的应力值来近似表示, 从而避免了形函数偏导数的出现。同时, 由下式可以看出, 系数矩阵  $Q_k^II$  为常数矩阵, 带状稀疏, 形式简单, 与形函数偏导数相比计算量小, 有利于无网格法计算效率的提高。

若  $x_I$  为域内节点,  $\sigma_{ij}^I$  应该满足平衡方程, 即为

$$\sigma_{ij,j}^I + b_i^I = 0 \quad (11)$$

利用式(10)可得节点  $x_I$  处的离散形式的平衡方程

$$\sum_{j=1}^M Q_j^II \sigma_{ij}^j + b_i^I = 0 \quad (12)$$

与传统的无网格配点法相比较, 式(12)不仅不再出现应力梯度, 代之以节点影响域内场点的应力值, 降低了应力的光滑性要求, 而且没有出现形函数, 这样使得计算效率得到提高。

### 3 杂交无网格有限体积差分法

杂交无网格有限体积差分法是一种弱-强结合的无网格法。它将整个求解域划分成 2 个部分: 第

一部分为“无网格有限体积边界”, 包括整个求解域边界, 其上的所有点都将采用无网格有限体积法建立控制方程; 另一部分为“无网格有限差分域”, 是指不包括整体边界的内部域, 如图 2 所示, 该域内的节点将通过基于无网格有限差分形式的配点法来满足平衡条件。这样处理的目的是充分利用强式法的高效性与弱式法的稳定性。由于强式法(或称无网格配点法)在仅含 Dirichlet 边界条件时计算效率高, 但受面力边界条件影响较大, 表现出了极大的不稳定性<sup>[10, 11]</sup>。而无网格局部弱式法则表现出良好的稳定性和精确性, 面力边界条件可以自然而方便地融入同一弱式方程式中, 不需要另外显式的施加面力边界条件。因此, 将局部弱式法与强式法相结合, 利用局部弱式法施加面力边界条件, 利用强式法实现平衡微分方程及位移边界条件, 这样局部弱式的稳定性与强式的高效性等优点都得到了体现。

对位于包括面力为 0 的应力边界上的节点, 可建立偏微分方程的守恒形式:

$$\int_{L_s^I} t_i d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}^I} \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega^I} b_i d\Omega \quad (13)$$

式中:  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ ;  $b_i$  为体积力;  $\bar{t}_i$  为已知面力;  $\Omega^I$  为节点  $I$  的局部积分子域, 其边界  $\partial\Omega^I$  位于求解域内的部分为  $L_s^I$ , 与整体边界相交的部分为  $\Gamma_{st}^I$ , 即  $\Gamma_{st}^I = \partial\Omega^I \cap \Gamma$ ,  $L_s^I = \partial\Omega^I - \Gamma_{st}^I$ , 以  $\Gamma_{st}^I$  代表  $\Gamma_{st}^I$  在应力边界上的部分, 如图 2 所示。

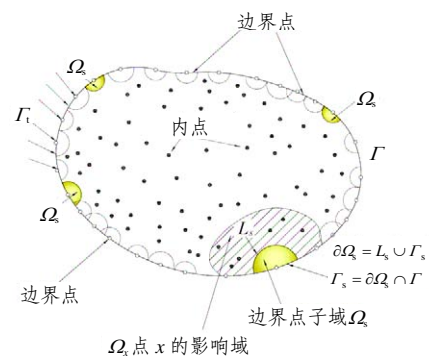


图 2 无网格有限体积差分法

Fig.2 Mesh-free finite volumetric difference method

传统的无网格法一般以位移作为变量对控制方程式(13)进行离散, 在积分过程中必将出现形函数导数的计算, 如果采用 MLS 插值模式, 则其形函数的导数计算量是非常大的。为了减少计算量, 本文采用一种“杂交”方法, 就是应力与位移采用不同的插值模式, 首先考虑直接以应力作为变量进行独

立插值, 则  $t_i$  可以离散为

$$t_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})\sigma_{ij}^j \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{n}_j$  为局部子域边界外法向量;  $\phi_j$  为应力形函数, 可以采用移动最小二乘法(MLS)或者径向基函数法(RBF)、点插值法(PIM)等多种插值方法。由于这里对应力没有连续性要求, 因此可以采用形式更简单、计算更方便的 Shepard 插值法作为应力的插值模式。

式(14)代入式(13)得

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{G}_j^j \sigma_{ij}^j = \mathbf{f}_i^I \quad (15)$$

其中,

$$\mathbf{G}_j^j = \int_{\Omega_j^I} \mathbf{n}_j \phi_j d\Gamma \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_i^I = -\int_{\Gamma_{fs}^I} \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega_j^I} \mathbf{b}_i d\Omega \quad (17)$$

如果节点  $I$  为内点(即不包括边界的求解域内节点), 则需要强式地满足离散方程式(12), 否则, 即对于边界节点, 则需满足式(15); 联立式(12), (15)得

$$\boldsymbol{\Theta}_I \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_I \quad (18)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Theta}_I = \begin{cases} \mathbf{G}_I^{\text{MFVM}} & (\Omega_s(\mathbf{x}_I) \cap \Gamma \neq \phi) \\ \mathbf{Q}_I^{\text{MFDM}} & (\Omega_s(\mathbf{x}_I) \cap \Gamma = \phi) \end{cases} \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_I = \begin{cases} \mathbf{f}_I^{\text{MFVM}} & (\Omega_s(\mathbf{x}_I) \cap \Gamma \neq \phi) \\ \mathbf{f}_I^{\text{MFDM}} & (\Omega_s(\mathbf{x}_I) \cap \Gamma = \phi) \end{cases} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1, \dots, \sigma_x^M, \sigma_y^M, \tau_{xy}^M\}^T \quad (21)$$

而

$$\mathbf{G}_I^{\text{MFVM}} = \int_{\Omega_s^I} \mathbf{N}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\Gamma \quad (22)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} n_x(\mathbf{x}) & 0 & n_y(\mathbf{x}) \\ 0 & n_y(\mathbf{x}) & n_x(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & \phi_M(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & \phi_M(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & \phi_M(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{Q}_I^{\text{MFDM}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x^{II} & 0 & \mathbf{Q}_y^{II} & \dots & \mathbf{Q}_x^{MI} & 0 & \mathbf{Q}_y^{MI} \\ 0 & \mathbf{Q}_y^{II} & \mathbf{Q}_x^{II} & \dots & 0 & \mathbf{Q}_y^{MI} & \mathbf{Q}_x^{MI} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{MFVM}} = -\int_{\Gamma_{fs}^I} \bar{t} d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} \mathbf{b} d\Omega \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{MFDM}} = -\mathbf{b} \quad (27)$$

由上式可以看出, 对应力进行独立插值后, 离散系统方程中组不再出现形函数的偏导数, 而且实现形式也较常规方法简单。

同时, 还应该看到离散方程式(式(18))以节点应力作为未知量, 其未知量数明显少于方程个数, 是一个不定方程组, 那么不能通过式(23)直接求得节点应力。既然不能直接得到节点应力, 则可以考虑利用应力与节点位移之间的本构关系, 将离散系统方程式(式(21))转化为以节点位移作为未知变量的方程组, 这样不定方程组变成了静定方程组, 原方程组可解。首先以弹性问题为例, 节点应力  $\boldsymbol{\sigma}_j$  与应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  存在如下物理关系:

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (28)$$

式中:  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵, 而节点应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  可以通过位移离散表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{u}} \quad (29)$$

式中:  $\mathbf{B}_j$  为节点  $J$  处的应变矩阵, 且有

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \Phi_{1,x}(\mathbf{x}_j) & 0 & \dots & \Phi_{NN,x}(\mathbf{x}_j) & 0 \\ 0 & \Phi_{1,y}(\mathbf{x}_j) & \dots & 0 & \Phi_{NN,y}(\mathbf{x}_j) \\ \Phi_{1,y}(\mathbf{x}_j) & \Phi_{1,x}(\mathbf{x}_j) & \dots & \Phi_{NN,y}(\mathbf{x}_j) & \Phi_{NN,x}(\mathbf{x}_j) \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中:  $\Phi(\mathbf{x}_j)$  为节点  $\mathbf{x}_j$  处的位移形函数, 与应力形函数可以相同, 也可以不同, 这里由于涉及到位移形函数导数的计算, 因此本文采用 1 阶 MLS 插值方式,  $NN$  为节点  $J$  的影响域内的节点总数。  $\hat{\mathbf{u}}$  为位移向量

$$\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_x^1, \hat{u}_y^1, \dots, \hat{u}_x^{NN}, \hat{u}_y^{NN}\}^T \quad (31)$$

将式(29)代入式(28), 则得到节点应力与节点位移的离散关系式:

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{T}_j \hat{\mathbf{u}} \quad (32)$$

其中,

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{D}\mathbf{B}_j \quad (33)$$

将式(32)代入式(18)中, 得到离散形式方程组:

$$\mathbf{K}_I \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_I \quad (34)$$

其中,

$$\mathbf{K}_I = \boldsymbol{\theta}_I \mathbf{T} \quad (35)$$

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_J, \dots, \mathbf{T}_M\} \quad (36)$$

由式(34)可以看出, 节点刚度矩阵  $\mathbf{K}_I$  由局部矩阵  $\boldsymbol{\theta}_I$  和整体矩阵  $\mathbf{T}$  两部分组成, 而局部矩阵  $\boldsymbol{\theta}_I$  仅与节点方位、选取的权函数有关, 当给定节点及其权函数时则为常数矩阵; 整体矩阵  $\mathbf{T}$  则与本构矩阵  $\mathbf{D}$  有关, 对于弹性问题,  $\mathbf{D}$  为常数矩阵, 则  $\mathbf{T}$  也为常数矩阵。

### 4 弹塑性增量无网格有限体积差分法

弹塑性问题的分析与加载及变形过程, 因此在计算中通常将载荷分成若干增量, 在每一增量步中采用 Newton-Raphson 法进行迭代, 直到收敛为止<sup>[12-14]</sup>。节点  $I$  在每一迭代步需满足如下增量形式的平衡方程:

$$\boldsymbol{\theta}_I \Delta \boldsymbol{\sigma}^{k(i)} = \mathbf{f}_I^{k+1} - \boldsymbol{\theta}_I \boldsymbol{\sigma}^{k+1(i)} \quad (37)$$

式中: 上标  $i = 0, 1, 2, \dots$  为迭代步;  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{k(i)}$  为第  $k+1$  个载荷步第  $i$  个迭代步的应力增量。

对于小变形问题, 对求解域内任意一个场节点  $J$  的应力增量  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_J^{k(i)}$  与位移增量  $\Delta \mathbf{u}^{k(i)}$  存在着离散关系:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_J^{k(i)} = \int_0^{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_J^{k(i)}} \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{D}_{ep}^{k(i)} \mathbf{B}_J \Delta \mathbf{u}^{k(i)} \quad (38)$$

式中:  $\mathbf{D}_{ep}^{k(i)}$  为场节点  $J$  在第  $k+1$  个载荷步第  $i$  个迭代步的弹塑性矩阵, 则所有节点的应力增量向量  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{k(i)}$  可以表示为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{k(i)} = \{\Delta \boldsymbol{\sigma}_1^{k(i)}, \dots, \Delta \boldsymbol{\sigma}_J^{k(i)}, \dots, \Delta \boldsymbol{\sigma}_M^{k(i)}\}^T = \mathbf{T}_{ep}^{k(i)} \Delta \mathbf{u}^{k(i)} \quad (39)$$

其中,

$$\mathbf{T}_{ep}^{k(i)} = \{\mathbf{D}_{ep}^{k(i)} \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{D}_{ep}^{k(i)} \mathbf{B}_J, \dots, \mathbf{D}_{ep}^{k(i)} \mathbf{B}_M\}^T \quad (40)$$

将式(37)代入式(35)得

$$\mathbf{K}_{T(I)}^{k+1(i)} \Delta \mathbf{u}^{k(i)} = \mathbf{R}_I^{k+1(i)} \quad (41)$$

式中:  $\mathbf{K}_{T(I)}^{k+1(i)}$  为节点  $I$  在第  $k+1$  个载荷步第  $i$  个迭代步的切线刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_{T(I)}^{k+1(i)} = \boldsymbol{\theta}_I \mathbf{T}_{ep}^{k(i)} \quad (42)$$

$\mathbf{R}_I^{k+1(i)}$  则为节点  $I$  在第  $k+1$  个载荷步第  $i$  个迭代步的残余力:

$$\mathbf{R}_I^{k+1(i)} = \mathbf{f}_I^{k+1} - \boldsymbol{\theta}_I \boldsymbol{\sigma}^{k+1(i)} \quad (43)$$

由式(44)可以看出, 节点  $I$  切线刚度矩阵由其影响域内各节点在当前应力状态下的本构矩阵  $\mathbf{D}_{ep}$  决定, 与高斯积分点应力大小无关, 避免了大量的高斯积分点参与载荷迭代, 减少了计算量。

### 5 杂交无网格有限体积差分法求解隧道开挖问题

隧道开挖是岩土工程中一个比较普遍的问题<sup>[15]</sup>, MFDM 采用以下步骤来模拟这一过程:

(1) 计算域  $\Omega$  内的初始应力场  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , 其中  $\boldsymbol{\sigma}_0$  由岩体自重和构造应力共同产生。

(2) 计算开挖载荷  $\mathbf{F}_{ex}$ , 所谓开挖载荷就是  $\boldsymbol{\sigma}_0$  在开挖边界上的等效节点力的反力。

(3) 计算开挖载荷作用下的扰动位移场  $\Delta \mathbf{u}$ 、扰动应力场  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ 。其中, 开挖载荷  $\mathbf{F}_{ex}$  的作用域为  $\Omega - \Omega_{ex}$ ,  $\Omega_{ex}$  为挖掉的区域。

(4) 计算开挖后的应力场  $\boldsymbol{\sigma}$ 。

杂交无网格有限体积法计算开挖载荷时可采用“开挖边界应力转换法”。在计算初始应力场  $\boldsymbol{\sigma}_0$  时, 所有域内节点都通过无网格有限差分法建立控制方程, 整体边界上的节点则采用无网格有限体积法建立控制方程; 开挖以后形成了一个开挖边界, 将被开挖掉的那部分区域的全体记为  $\Omega_E$ , 对于开挖边界上的节点  $x_I$ , 位于  $\Omega_E$  内的积分子域为  $\Omega_{SE}^I$ , 其边界  $\partial \Omega_{SE}^I$  位于  $\Omega_E$  内的部分为  $L_{SE}^I$ , 如图 3 所示。作用在该点上的外载除了面力载荷  $\mathbf{p}$ (开挖载荷)外, 还有体积力  $\mathbf{b}$ (自重或渗流力等), 由它们共同产生内力  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , 因此, 可建立无网格有限体积形式的平衡方程,

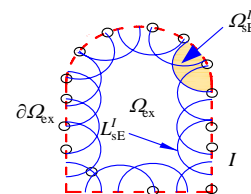


图3 开挖边界应力转换法模型  
Fig.3 Model of the stress transition method on the excavation boundary

$$\int_{\Gamma_{st}^I} N \sigma_0 d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}^I} p d\Gamma - \int_{\Omega_{SE}^I} b d\Omega \quad (44)$$

则开挖载荷为

$$f_{ex}^I = \int_{\Gamma_{st}^I} p d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}^I} N \sigma_0 d\Gamma - \int_{\Omega_{SE}^I} b d\Omega \quad (45)$$

式中:  $N$  为位于  $L_s^I$  上的高斯点的外法线向量;  $\sigma_0$  为高斯积分点的初始应力场, 它可以由 MLS 或者 Shepard 拟合得到。同时, 开挖载荷又作用在剩余区域  $\Omega_R$  的开挖边界上, 因此对位于该边界上的节点  $x_i$  可建立无网格有限体积平衡方程

$$\int_{L_{SR}^I} N \sigma d\Gamma = f_{ex}^I \quad (46)$$

式中:  $L_{SR}^I$  为  $x_i$  的积分子域边界  $\partial\Omega_{SR}^I$ , 且位于开挖剩余区域  $\Omega_R$  内的部分。

## 6 算例

### 6.1 厚壁圆筒问题

有一由理想弹塑性材料制成的厚壁圆筒, 内径  $a = 1 \text{ m}$ , 外径  $b = 5 \text{ m}$ , 承受内压  $p = 1.5 \times 10^8 \text{ Pa}$ , 由于轴对称, 则取 1/4 作为研究对象, 属平面应变问题, 如图 4 所示, 弹性模量  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 单轴屈服强度  $\sigma_s = 1.7 \times 10^8 \text{ Pa}$ , 采用 Mises 屈服条件。

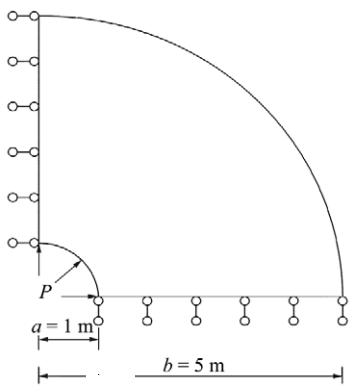


图 4 厚壁圆筒计算模型

Fig.4 Calculating model of thick cylinder

为与有限元结果进行比较, 在 1/4 圆筒上布下 289 个节点, 并划分了 256 个四边形单元, 如图 5 所示。弹塑性解析解采用徐秉业和刘信声<sup>[16]</sup>的研究中的计算公式。

本文分别对弹性结果和弹塑性结果进行了比较。图 6, 7 分别表示  $y = 0$  处各节点的径向位移及径向应力的弹性计算结果, 弹塑性计算结果则如

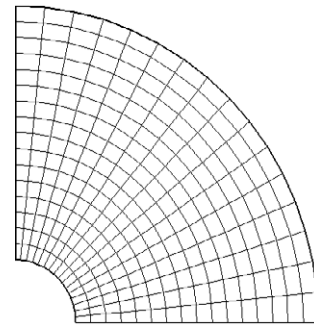


图 5 节点布置与单元划分

Fig.5 Nodal configuration and element partition

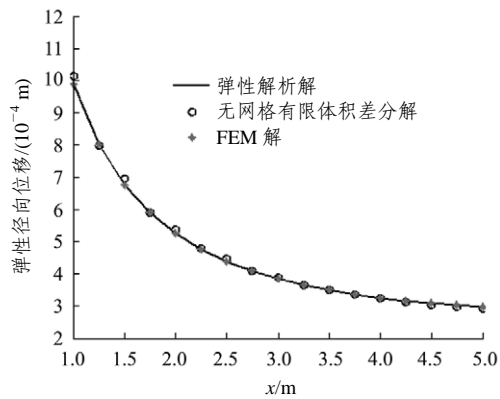


图 6 径向位移弹性计算结果

Fig.6 Radial displacement of elastic calculation

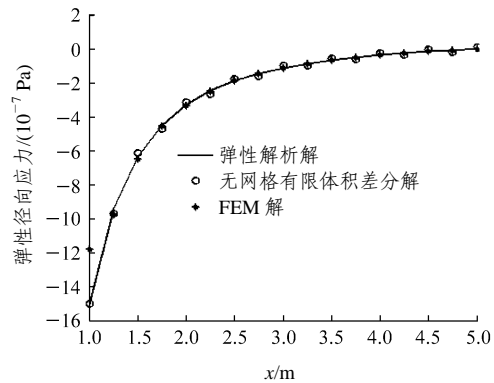


图 7 径向应力计算结果

Fig.7 Radial stress of elastic calculation

图 8, 9 所示, 杂交 MFVDM 与 ABAQUS 得到的有限元(FE)计算结果和解析解都非常接近, 而 MFVDM 得到的节点应力值较 FE 更接近解析解, 这是因为 MFVDM 不必像 FE 一样对节点应力进行光顺化。

运用杂交 MFVDM 及 FEM 分别计算得到塑性区的等值线图如图 10 所示, 由图可以看出, 二者的计算结果非常接近。本算例表明, 杂交 MFVDM 在求解弹性与弹塑性问题方面都有着较高的精度。

### 6.2 隧道开挖问题

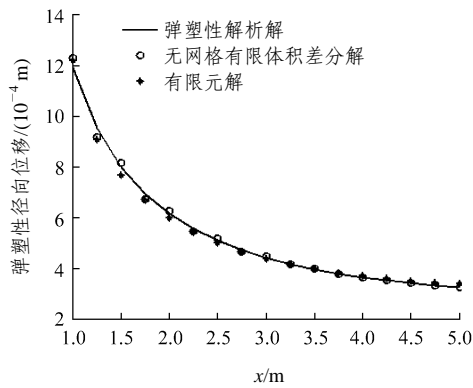


图 8 径向位移弹塑性计算结果

Fig.8 Radial displacement of elastoplastic calculation

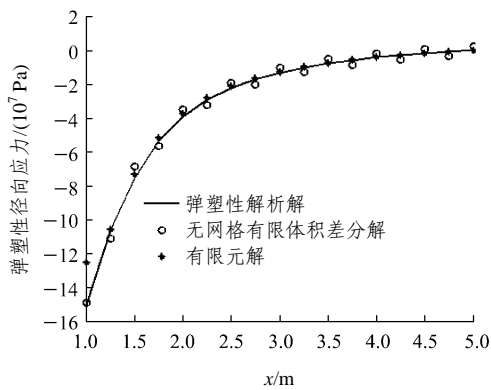


图 9 径向应力弹塑性计算结果

Fig.9 Radial stress of elastoplastic calculation

锦屏一个地下隧道,如图 11 所示,阴影部分为要挖掉的区域,其尺寸如图 12 所示。取弹性模量  $E = 17 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ , 围岩容重  $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$ , 顶部边界承受来自上部岩体的压力  $P = 30 \text{ MPa}$ , 左右两侧边界受到均布的构造应力  $\sigma_x = 29.7 \text{ MPa}$ 。假设岩体为理想弹塑性材料,符合 Mohr-Coulomb 准则和关联流动法则,黏聚力  $c = 15 \text{ MPa}$ , 应变硬化参数  $H' = 0$ , 内摩擦角  $\varphi = 54^\circ$ 。

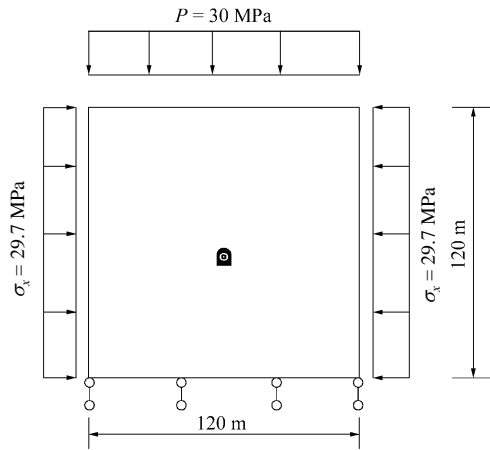
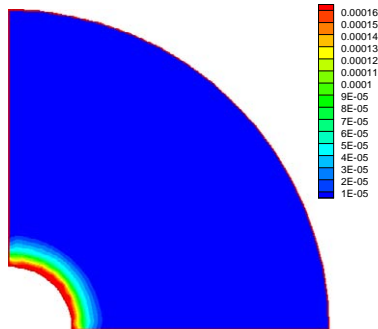
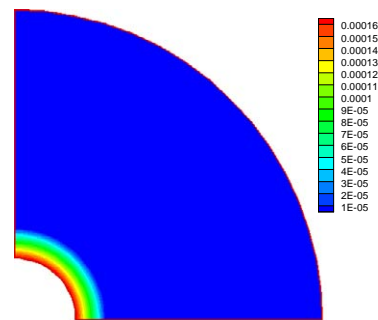


图 11 隧道计算模型

Fig.11 Calculating model of tunnel



(a) MFVDM 结果



(b) FE 结果

图 10 等效塑性应变等值线图(单位: m)

Fig.10 Contour of effective plastic strain(unit: m)

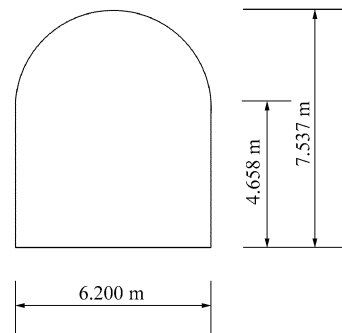


图 12 隧道尺寸

Fig.12 Dimension of tunnel

为与有限单元法比较,该模型总共布下 582 个节点,561 个单元,开挖后剩余 461 个节点,421 个单元,如图 13 所示。

图 14 为开挖后隧道左侧的竖向位移的 MFVDM 与 FEM 的比较结果,应力的比较结果如图 15 所示,图 16, 17 分别表示隧道底部的竖向位移与应力的比较曲线,结果表明, MFVDM 的计算结果与 FEM 的比较接近。图 18 为 MFVDM 与 FEM 的  $\sigma_y$  等值线图,可以看出 MFVDM 的计算结果与 FEM 的结果吻合得比较好。本算例表明, MFVDM 在模拟隧道开挖问题上具有可行性。

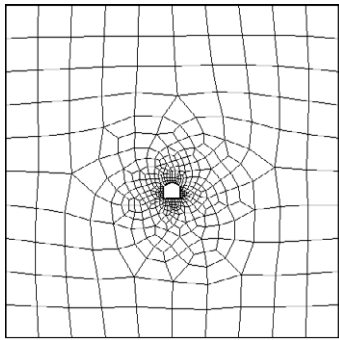


图 13 隧道节点布置与单元划分

Fig.13 Nodal configuration and element partition

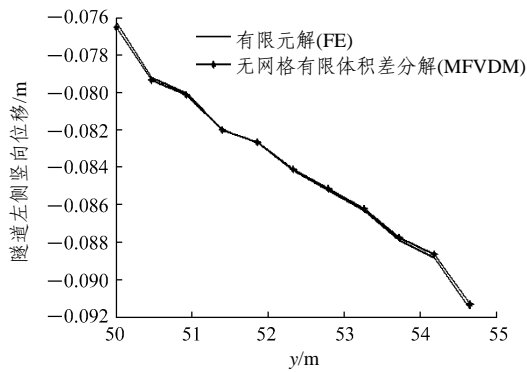


图 14 隧道左侧竖向位移

Fig.14 Vertical displacement along left-side of tunnel

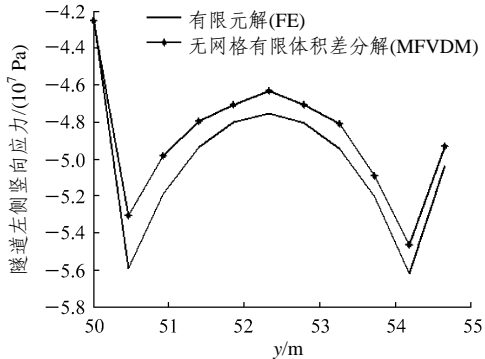


图 15 洞室左侧竖向应力  $\sigma_y$

Fig.15 Vertical stress  $\sigma_y$  along left-side of cavity

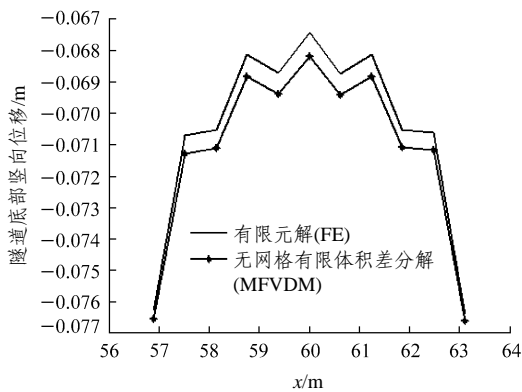


图 16 隧道底部竖向位移

Fig.16 Vertical displacement along bottom-side of tunnel

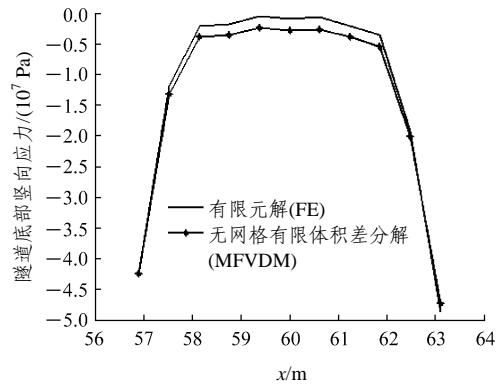
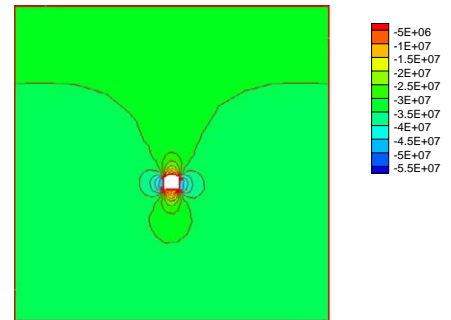
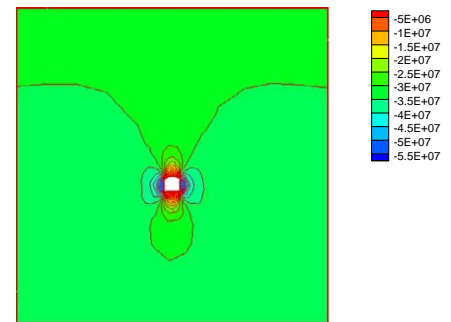


图 17 隧道底部竖向应力

Fig.17 Vertical stress along bottom-side of tunnel



(a) MFVDM 结果



(b) FE 结果

图 18 隧道  $\sigma_y$  等值线(单位: Pa)

Fig.18 Contour of  $\sigma_y$  of tunnel(unit: Pa)

### 7 结 论

本文提出了平衡方程局部强弱形式相结合的混合无网格有限体积差分法, 有以下几个特点:

(1) 应力精度较高, 这是因为对应力采用独立插值的结果;

(2) 以应力作为独立的未知量进行插值, 与传统的以位移作为唯一独立变量的无网格法相比, 可使试函数由原来的一阶连续性要求降低为 0 阶连续, 因此, 对应力采用 Shepard 插值即可满足精度要求;



(3) 由于节点位移与应力之间仍然存在着一阶导数关系, 因此对位移要采用 MLS 插值;

(4) 杂交无网格有限体积差分法在求解弹塑性问题时, 仅需关注节点应力状态的变化, 与积分点无关, 有效地提高了计算效率, 算例表明, 该方法有着较高的计算精度。

### 参考文献(References):

- [1] BELYSTCHKO T, GU L, LU Y Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods model[J]. *Modeling. Simul. Mater. Sci. Eng.*, 1994, 2(2): 519 - 534.
- [2] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 20(8/9): 1 081 - 1 106.
- [3] ATLURI S N, ZHU T. A new mesh-free local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics[J]. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 117 - 127.
- [4] ATLURI S N, HAN Z D, RAJENDRAN A M. A new implementation of the mesh free finite volume method, through the MLPG "mixed" approach[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2004, 6(6): 491 - 513.
- [5] 黄哲聪, 郑宏. 杂交型无网格有限体积法及其应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, 26(9): 1 868 - 1 874.(HUNAG Zhecong, ZHENG Hong. A hybrid mesh-free finite volume method and its application[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(9): 1 868 - 1 874.(in Chinese))
- [6] ZHANG X, SONG KZ, LU MW, et al. Mesh-free methods based on collocation with radial basis functions[J]. *Comput. Mechanics.*, 2000, 26(4): 333 - 343.
- [7] LISZKA T J, DUARTE C A M, TWORZYDLO W W. Hp-mesh free cloud method[J]. *Computer Methods in Application Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1): 263 - 288.
- [8] PERRONE N, KAO R. A general finite difference method for arbitrary meshes[J]. *Computer and Structures*, 1975, 12(5): 45 - 58.
- [9] SHAOFAN LI, WING KAM LIU. *Mesh-free particle methods*[M]. New York: Springer, 2004.
- [10] LIU G R, GU Y T. *An introduction to mesh-free methods and their programming*[M]. New York: Springer Press, 2005.
- [11] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.(ZHANG Xiong, LIU Yan. *Theory of mesh-free methods*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.(in Chinese))
- [12] OWEN D R J, HINTON E. *Finite Element in plasticity: theory and practice*[M]. London: Pineridge Press, 1980.
- [13] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 2版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998.(ZHU Bofang. *The theory and applications of finite element method*[M]. 2nd ed. Beijing: China Water Power Press, 1998.(in Chinese))
- [14] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.(WANG Xucheng. *Finite element methods*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.(in Chinese))
- [15] 郑宏, 葛修润, 谷先荣, 等. 关于岩土工程有限元分析中的若干问题[J]. *岩土力学学报*, 1995, 16(3): 7 - 12.(ZHENG Hong, GE Xiurun, GU Xianrong, et al. Some problems in FEA for geotechnical engineering[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1995, 16(3): 7 - 12.(in Chinese))
- [16] 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.(XU Bingye, LIU Xinsheng. *Applied elasto-plasticity mechanics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993.(in Chinese))