

文章编号: 1000-7598 (2009) 05-1509-06

基于虚内键模型的岩石单轴压缩全过程曲线模拟

柯长仁^{1,2}, 葛修润^{1,3}, 蒋俊玲², 熊健民², 王水林³

(1.上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240; 2.湖北工业大学 土木工程与建筑学院, 武汉 430068;
3.中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

摘 要: 利用虚内键模型理论 (virtual internal bond model, 简称 VIB), 由岩石单轴压缩损伤本构方程和虚内键连接法则方程的相似性, 提出了岩石单轴压缩破坏的虚内键密度演化函数 $D(\theta)$, 通过含虚内键密度演化方程的弹性张量 C_{ijmn} , 实现了岩石单轴压缩应力-应变全过程曲线的数值模拟。数值模拟结果表明, 通过参数的合理选取, 虚内键模型理论可以模拟不同岩样的全过程曲线。

关 键 词: 虚内键; 演化函数; 单轴压缩; 应力-应变曲线

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

Complete curve simulation of rock under uniaxial compression based on virtual internal bond model

KE Chang-ren^{1,2}, GE Xiu-run^{1,3}, JIANG Jun-ling², XIONG Jian-min², WANG Shui-lin³

(1. School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;
2. School of Civil Engineering, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China;
3. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Based on virtual internal bond model (abbreviated as VIB) for isotropic materials, and enlightened by the similarity of the damage constitutive model of rock under uniaxial compression and the cohesive force law of VIB, a virtual internal bond density evolution function $D(\theta)$ of rock under uniaxial compression is suggested; and then the elastic tensor C_{ijmn} is formulated. Finally, it is successfully to simulated the complete curve of rock under uniaxial compression. The simulation results show that the VIB model can simulate different kinds of rock sample if the parameters are selected well.

Key words: virtual internal bond model; evolution function; uniaxial compression; stress-strain curve

1 引 言

当前, 各种新型材料层出不穷, 从脆性材料到延性材料、复合材料、功能梯度材料以及纳米材料, 预测并模拟各种材料的破坏是一个前沿课题。传统的连续介质力学建立在连续的基础上, 一旦材料发生局部破坏或损伤, 原有的连续场将被破坏, 材料将由连续介质演变为非连续介质, 此时原来的材料本构关系将不再成立。因此, 建立在连续介质力学基础上的计算方法很难真实地再现材料的破坏过程。分子动力学方法的出现, 弥补了连续介质力学方法的缺陷。分子动力学方法依赖于分子间作用力模型的准确选取, 同时, 由于该模型的单元数量巨大, 还依赖于计算机硬件的支持。

Gao 和 Klein (1998 年) 提出了虚内键模型 (virtual internal bond model) [1-2]。该模型认为材料是由无数的带有质量的微粒组成, 微粒之间由虚内键 (virtual internal bond) 连接, 通过赋予连接键特定的联接法则 (cohesive law), 得到材料的宏观本构方程。虚内键模型是一种多尺度方法, 它将材料的细观尺度 (micro dimension) 和宏观尺度 (macro dimension) 联系起来, 使得人们通过材料的微观结构来研究并预测材料的宏观力学性质成为可能; 同时, 虚内键模型将材料的断裂准则直接嵌入到了材料的本构方程中, 使得人们在模拟材料的破坏过程中不需要额外的断裂准则, 也不需要重新划分网格, 这为有限元数值模拟提供了便利。

在虚内键模型中, 虚拟内连接键的分布密度

收稿日期: 2008-12-16

第一作者简介: 柯长仁, 男, 1974 年生, 讲师, 博士研究生, 主要从事岩石力学与工程方面的教学和研究工作。E-mail: longmanke@sjtu.edu.cn

$D(l_0, \theta, \phi)$ 和刚度 $U'(l)$ 决定着材料的力学性质。通过引入特殊的虚拟键分布密度函数 $D(l_0, \theta, \phi)$ ，Ganesh 和 Misra^[3]将虚拟内连接键模型推广到各向异性材料，Ganesh、Hsia 等^[4]针对虚拟内连接键模型的有限元实现进行了专门的研究，Lin 和 Shu^[5]对虚拟内连接键模型的数值解法进行了研究。Ji 和 Gao^[6]成功地将该模型应用到了生物纳米复合材料的裂纹扩展研究中，Klein、Gao 等^[7]将虚拟内连接键模型用到了多层复合材料开裂破坏中，Ganesh Thiagarajan^[8]则把该模型应用于混凝土材料的开裂破坏中。

在虚内键模型理论框架内，Zhang 等^[9]发展了多维虚内键模型 (VMIB)。在 VMIB 模型中，将切向效应引入了微粒点对之间的相互作用，这使得 VMIB 能够计及固体材料的不同泊松比，因而可以用于比 VIB 更广泛的工程材料。

虚内键模型理论在岩石材料破坏数值模拟方面的研究，目前未见相关报道。作为一种尝试，本文拟利用虚内键模型理论，通过引入一定的虚内键演化函数，再现岩石单轴压缩破坏的全过程。

2 模型简介

基于 Tadmor 和他的合作者提出的拟连续介质方法 (quasicontinuum method)，Gao 和 Klein^[1-2]提出了虚拟内连接键模型。该模型认为，材料是由无数的带有质量的微粒组成，微粒之间由一虚拟键连接，虚拟键被赋予特定的联接法则 (cohesive force law)。基于这种联接法则，根据 Cauchy-Born 规则^[10-12]，可以推导出材料的宏观本构方程，从微观的角度 (虚拟键的分布密度或刚度) 去预测材料的宏观力学行为。通过这种特定的联接法则，材料的断裂准则直接嵌入到了本构方程中，使得该方法在模拟裂纹开裂过程中不需要额外的断裂准则，而且也不需要重新划分网格，这为有限元数值模拟提供了很大的方便。

2.1 超弹理论

在连续介质力学的超弹理论中 (Marsden 和 Hughes, 1983 年; Ogedn, 1984 年)^[13]，通常用 Lagrangian 坐标 $X = (X_1, X_2, X_3)$ 来描述质点在初始构形中的位置，用 Eulerian 坐标 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 描述质点在变形后的位置。当物体变形时，质点 X_I 由初始构形变形到 x_i 位置，这时物体局部变形梯度可以表示为

$$F_{IJ} = \frac{\partial x_i(X, t)}{\partial X_I} \quad (1)$$

式中： F_{IJ} 为变形梯度，是二阶张量。

变形梯度 F_{IJ} 包含了物质变形的全部信息。根据变形梯度，Green-Lagrange 应变张量 E_{IJ} 可以表示为

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{IJ}F_{IJ} - \delta_{IJ}) \quad (2)$$

式中： δ_{IJ} 为 Kronecker 记号。

超弹理论的一个基本假定是存在一个应变能函数 $\Phi(E_{IJ})$ ^[14-15]，由它可以确定第 2 (对称) Piola-Kitchhoff 应力张量为

$$S_{IJ} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{IJ}} \quad (3)$$

材料的 4 阶弹性张量为

$$C_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E_{IJ} \partial E_{KL}} \quad (4)$$

任一方向线元的名义伸长率 (Lagrange 伸长率) 可以表示为^[16]

$$\Lambda_L = \frac{dl - dL}{dL} = \sqrt{1 + 2\xi_I E_{IJ} \xi_J} \quad (5)$$

式中： Λ_L 为线元的 Lagrange 伸长率； dL 为线元的原长； dl 为线元变形后的长度； ξ 为线元的方向向量， ξ_I 和 ξ_J 为线元的方向向量， $\xi = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 。

2.2 虚拟内连接键模型

Gao 和 Klein 于 1998 年提出的 VIB 模型，假定连续介质固体是由离散的带有质量的微粒组成，每个微粒之间都由一个虚拟键互相连接，形成网格状，并赋予该虚拟键以特定的联接法则，如图 1 所示。

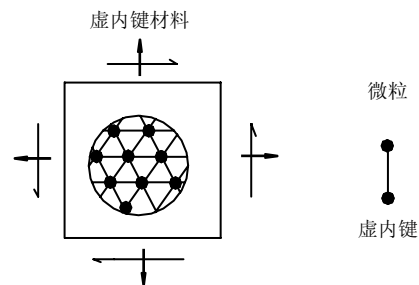


图 1 虚内键模型

Fig.1 The virtual internal bond model

假定储存在每一个键中的能量用函数 $U(l)$ 来表示，其中 l 表示键的长度。根据 Cauchy-Born 规则，两个微粒之间的距离由两个微粒之间的线元长度决定，变形后键的长度可以表示为

$$l = l_0 \sqrt{1 + 2\xi_I E_{IJ} \xi_J} \quad (6)$$

式中： ξ_l 为键的方向向量； l_0 为键的原长； \mathbf{E}_{IJ} 为 Green-Lagrange 应变张量。未变形固体介质中单位体积的应变能可表示为 (Milstein, 1980 年; Tadmor 等, 1996 年) [1]

$$\Phi(\mathbf{E}_{IJ}) = \langle U(l) \rangle = \langle U(l_0 \sqrt{1 + 2\xi_I \mathbf{E}_{IJ} \xi_J}) \rangle \quad (7)$$

每个键的位置用球形坐标系 (l_0, θ, ϕ) 进行描述。为简单起见, 采用如下标记:

$$\langle \dots \rangle = \iiint (\dots) D(l_0, \theta, \phi) \sin \theta dl_0 d\theta d\phi \quad (8)$$

式中: $D(l_0, \theta, \phi)$ 为键的密度分布函数; $D(l_0, \theta, \phi) \cdot \sin \theta dl_0 d\theta d\phi$ 为单位未变形固体体积中连接键长度在 l_0 和 $l_0 + dl_0$ 之间、连接键方向角度在 $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ 之间的连接键的数量。

应力张量和 4 阶弹性张量可以表示为

$$\mathbf{S}_{IJ} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_{IJ}} = \left\langle \frac{l_0^2 U'(l)}{l} \xi_I \xi_J \right\rangle \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_{IJKL} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{E}_{IJ} \partial \mathbf{E}_{KL}} = \left\langle l_0^4 \left(\frac{U''(l)}{l^2} - \frac{U'(l)}{l^3} \right) \xi_I \xi_J \xi_K \xi_L \right\rangle \quad (10)$$

对于各向同性材料, 在小变形情况下, 上述两式分别变为

$$\Phi(\varepsilon_{ij}) = \left\langle U(l_0) + \frac{l_0^2}{2} U''(l_0) (\xi_i \varepsilon_{ij} \xi_j) (\xi_k \varepsilon_{kl} \xi_l) \right\rangle \quad (11)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \left\langle l_0^2 U''(l_0) \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \right\rangle = \left\langle l_0^2 U''(l_0) \right\rangle_{l_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \sin \theta d\theta d\phi \quad (12)$$

式中: ε_{ij} 为 Cauchy 应变张量, i, j, k, l 为小变形情况下的张量下标, 且有:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (13)$$

2.3 虚拟内连接键模型的本构关系

根据超弹理论, 材料的本构关系可由应变能密度函数导出。在本模型中, 为使微元体内的离散结构 (原子集合体) 等效为一个连续介质力学意义上的一个微元 (representative volume element), 令储存在体积为 V 的微元体中的虚拟键中的应变能, 与储存在同等体积中的连续体微元的应变能相等, 根据超弹理论, 就可以导出相应的宏观连续介质的本构关系。

假定体积为 V 的微元中, 微粒呈随机分布, 因而连接于两个微粒之间的虚拟键也是呈随机分布的, 则微元中储存在连接键中的应变能为

$$\Phi = \int_{l_0}^{l_2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(l) D(l_0, \theta, \phi) \sin \theta dl_0 d\theta d\phi \quad (14)$$

为简化起见, 令连接键长度的分布为均匀分布, 并令其长度统一为 l_0 , 且连接键的能量为 $U(l) = \frac{1}{2} kl^2$, 从而有:

$$\mathbf{C}_{ijmn} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi kl_0^2 \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n D(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{15} kl_0^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

而连续介质材料的弹性矩阵为 (各向同性体的广义 Hooke 定理):

$$\mathbf{C}'_{ijmn} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

如果代表微元内质点的集合体在宏观上力学性质等效为相应的连续介质微元, 则所对应的弹性矩阵应该相等, 即

$$\mathbf{C}_{ijmn} = \mathbf{C}'_{ijmn} \quad (17)$$

从而可以推得

$$k = \frac{15EV}{8\pi(1+\nu)l_0^2} \quad (18)$$

对于二维情况, 虚拟内连接键模型相应的 4 阶弹性张量为

$$\mathbf{C}_{ijmn} = \frac{1}{V} \int_0^\pi kl_0^2 \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n D(\theta) d\theta = \frac{\pi}{8V} kl_0^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

可以推得同三维情形类似的关系式。

对于平面应力问题, 且有:

$$k = \frac{2E}{(1-\mu)\pi} \quad (20)$$

对于平面应变问题，且有：

$$k = \frac{2E}{(1-2\mu)(1+\mu)\pi} \quad (21)$$

同样，可得含虚内键演化函数的 4 阶弹性张量。

对于平面应力问题，有：

$$C_{ijmn} = \frac{2E}{(1-\mu)\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n D(\theta) d\theta \quad (22)$$

对于平面应变问题，有：

$$C_{ijmn} = \frac{2E}{(1-2\mu)(1+\mu)\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n D(\theta) d\theta \quad (23)$$

由于 4 阶弹性张量 C_{ijmn} 决定于虚拟内连接键的分布密度 $D(\theta)$ ，而由弹性本构关系：

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (24)$$

由此可知，虚拟内连接键的分布密度 $D(\theta)$ 决定着材料的力学性质。

3 虚内键演化方程

在虚内键理论中，两点之间的相互作用可以采用任何一种经验的或唯象的联接法则来描述。通过这样的联接法则，材料的断裂破坏准则被嵌入到了本构方程中。为表示虚内键理论的这一特点，文献 [1] 采用如下的两参数联接法则：

$$U'(l) = A(l-l_0^*) \exp\left(-\frac{l-l_0^*}{B}\right) \quad (25)$$

式中： A 、 B 为两个参数，可通过试验数据拟合得出。

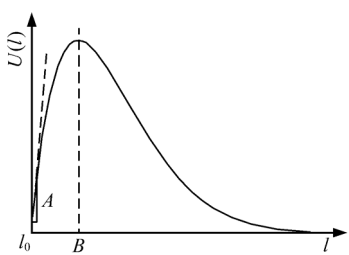


图 2 函数 $U'(l) = A(l-l_0^*) \exp\left(-\frac{l-l_0^*}{B}\right)$ 的特征

Fig.2 Character of $U'(l) = A(l-l_0^*) \exp\left(-\frac{l-l_0^*}{B}\right)$

岩石作为一种经历并隐含了复杂的应力、变形及损伤历史的地质体，其内部存在着大量的微细裂纹等缺陷，这些大小不等的众多裂纹及裂隙等的存在，改变了岩石的力学性质，降低了岩石的变形及强度参数，使岩石表现出明显的非线性特性。根据

Lematire 的应变等效假说，以及脆性岩石在单轴压缩下的损伤本构方程^[17]为

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \exp\left[-(\varepsilon/\varepsilon_0)^m\right] \quad (26)$$

为了定量地描述虚内键密度随着受压变形而减少的变化趋势，笔者提出了如下的虚内键密度演化方程：

$$D(\theta) = \exp\left[-n(l/\varepsilon_c)^m\right] \quad (27)$$

式中： $l = \xi_i \varepsilon_{ij} \xi_j$ ； ε_c 为材料达到峰值强度时的变形量； m 、 n 为模型参数，用来调节全过程曲线的特征。材料不同，相应的参数也不相同。

将式 (27) 代入式 (22)、(23)，可得包含虚内键演化函数的非线性 4 阶弹性张量。

对于平面应力问题，有：

$$C_{ijmn} = \frac{2E}{(1-\mu)\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n \exp\left[-n(l/\varepsilon_c)^m\right] d\theta \quad (28)$$

对于平面应变问题，有：

$$C_{ijmn} = \frac{2E}{(1-2\mu)(1+\mu)\pi} \int_0^\pi \xi_i \xi_j \xi_m \xi_n \exp\left[-n(l/\varepsilon_c)^m\right] d\theta \quad (29)$$

4 参数确定及对应力-应变曲线特征的影响

在进行数值模拟之前，包含虚内键演化函数的本构方程能否再现材料的应力-应变全过程曲线显得尤为关键。受文献 [17] 中提出的岩石的应力-应变本构方程 $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \exp\left[-(\varepsilon/\varepsilon_0)^m\right]$ 的启发，本文选择函数 $D(\theta) = \exp\left[-n(l/\varepsilon_c)^m\right]$ 作为虚内键密度演化函数，是因为从宏观上它包含演化函数 $D(\theta)$ 的本构方程，能够代表脆性岩石在单轴压缩下的损伤本构方程；从微观上它同 Gao 和 Klein 在文献 [1] 中提出的虚内键联接法则比较吻合。

在包含虚内键密度演化方程的非线性 4 阶弹性张量式 (28)、(29) 中，一共有 4 个参数需要确定，即 E 、 μ 、 m 、 n 。其中， E 、 μ 具有明确的物理含义，它们分别是材料的弹性模量和泊松比，它们可以由具体的试验确定。

参数 E 、 μ 是用来调整材料宏观上的应力-应变全过程曲线特征的参数。它们对全过程曲线的影响如图 3 所示。由图 3(a) 可以看出，随着 m 值的增大，材料试样的变形破坏模式逐渐由延性向脆性过渡，峰值应力相应增大，并且它对峰后应力的变化影响不大。由图 3(b) 可以看出， n 值对材料的破坏模式影响不大，但它对峰值应力和峰后应力均有一定的

影响， n 值越大，峰值应力和峰后应力越小，具体体现为它可以调节材料宏观应力-应变曲线的“体型”， n 值越大，“体型”越为瘦小。

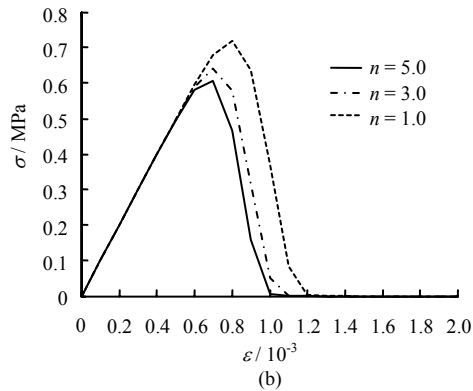
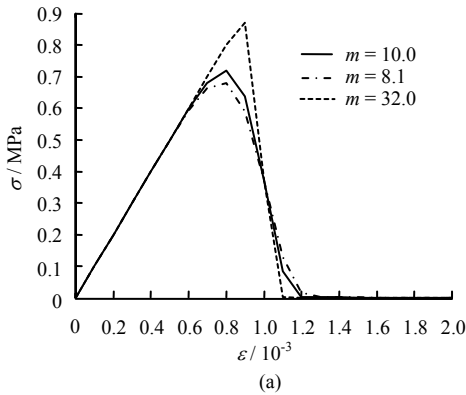


图 3 参数 m 、 n 对应力-应变全过程曲线的影响
Fig.3 Effect of the m and n on the complete stress-strain curve

5 试验验证

为了验证虚内键模型理论对岩石类脆性材料的适用性，本文将该模型用于模拟岩石试样的单轴压缩试验。岩样的尺寸及二维模拟简图如图 4 所示，岩质为红砂岩。试验是在 RMT-150B 试验机上进行的。试验数据来源于文献[18]。

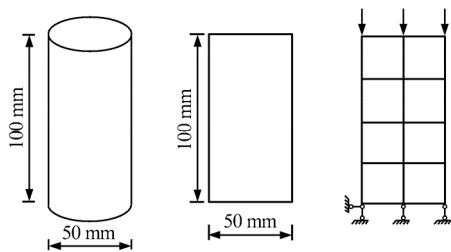


图 4 岩石试样的尺寸和数值模拟边界条件
Fig.4 Dimension of rock specimen and boundary conditions for numerical simulation

数值模拟参数见表 1。在数值模拟过程中，为了能够得到比较稳定的应力-应变全过程曲线，本文

采用割线模量法。为了比较真实地反映岩样的破坏全过程，采用端部位移控制加载方法，根据岩样的物理试验最大变形量，分成 100 个位移（荷载）步，逐步加载。数值模拟曲线和物理试验曲线的对比如图 5 所示。考虑到试验结果中岩石压密段的影响，将试验曲线向左平移一定量。

表 1 岩石单轴压缩试验模拟的参数
Table 1 Simulated parameters of red stone on uniaxial compressed tests

试样编号	弹性模量 E / GPa	泊松比 μ	峰值应变 $\epsilon_c / 10^{-3}$	m	n
Rs-1-1	9.375	0.405	5.309	10.0	5.0
Rs-1-2	8.834	0.416	6.149	8.10	4.6
Rs-1-3	9.359	0.182	5.415	32.0	1.0

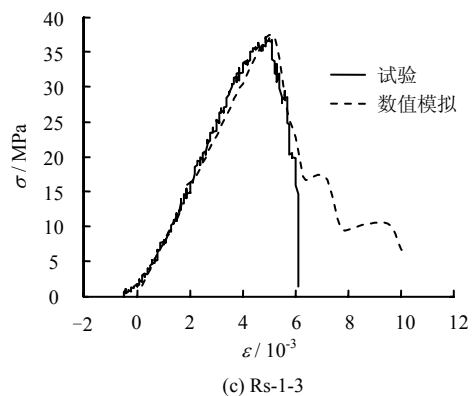
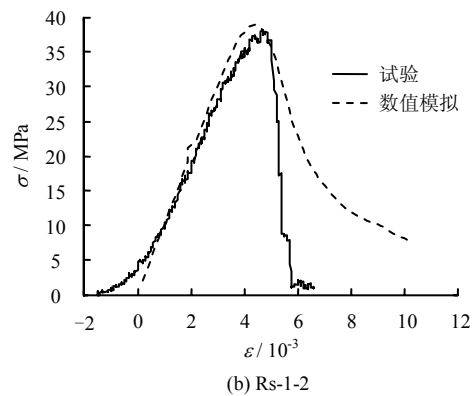
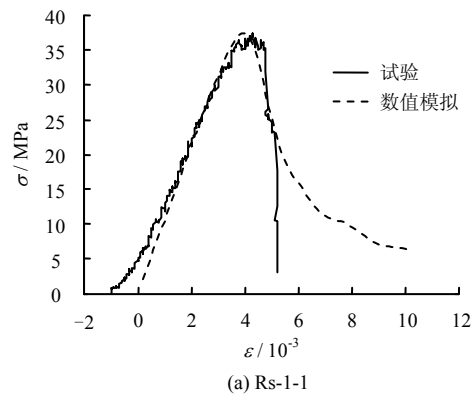


图 5 岩石的试验曲线与数值模拟曲线
Fig.5 Experimental curve and numerical simulated curve for red stone specimens by VIB model

由图 5 可以看出, 试样 Rs-1-3 比试样 Rs-1-1 和 Rs-1-2 的破坏更具有突然性, 这是由于试样 Rs-1-3 的泊松比 ($\mu = 0.182$) 比试样 Rs-1-1 和 Rs-1-2 的泊松比 ($\mu = 0.405, 0.416$) 要小, 所以 m 的取值比其他两组的取值要大一些。为了补偿由于 m 值的增大引起峰值应力相应的增大, 试样 Rs-1-3 比试样 Rs-1-1 和 Rs-1-2 的 n 值要小一些 (表 1)。数值模拟曲线与试验曲线除在峰后下降段有比较明显的差别外, 在峰前的线性段、峰值附近及峰后曲线段都十分的吻合, 从总体上来看, 数值模拟的结果与试验的结果基本一致, 这说明了本文模型的有效性。

6 结 语

由岩石单轴压缩损伤本构方程和虚内键链接法则方程的相似性, 本文提出了虚内键密度演化方程 $D(\theta) = \exp[-n(l/\varepsilon_c)^m]$, 利用 Gao 提出的虚内键模型理论, 对岩石试样的单轴压缩试验进行了数值模拟。通过对岩样数值模拟曲线和试验曲线的对比, 结果表明, 数值模拟与试验结果较为吻合, 从而为岩石等脆性材料的破坏提供了一种新思路。

参 考 文 献

- [1] GAO H J, KLEIN P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bond[J]. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1998, 46(2): 187—218.
- [2] KLEIN P, GAO H. Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1998, 61: 21—48.
- [3] GANESH T, MISRA A. Fracture simulation for anisotropic materials using a virtual internal bond model[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2004, 41: 2919—2938.
- [4] GANESH T, HSIA K J, HUANG Y G. Finite element implementation of virtual internal bond model for simulating crack behavior[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2004, 71(3): 401—423.
- [5] LIN P, SHU C W. Numerical solution of a virtual internal bond model for material fracture[J]. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, 2002, 167(1—2): 101—121.
- [6] GAO H J, JI B. Modeling fracture in nanomaterials via a virtual internal bond method[J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2003, 70(14): 1777—1791.
- [7] JI B H, GAO H J. A study of fracture mechanisms in biological nano-composites via the virtual internal bond model[J]. **Materials Science and Engineering(A)**, 2004, 366(1): 96—103.
- [8] GANESH T. Dynamic fracture simulation of concrete using a virtual internal bond model[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2007, 133(5): 514—522.
- [9] ZHANG Z N, GE X R. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid[J]. **European Journal of Mechanics Solids (A)**, 2005, 24: 243—252.
- [10] MILSTEIN F. Review: theoretical elastic behavior at large strains[J]. **Journal of Materials Science & Technology**, 1980, 15: 1071—1084.
- [11] MILSTEIN F. Crystal elasticity in mechanics of solids[M]. New York: Oxford Pergamon Press, 1982.
- [12] ERICKSEN J L. Phase transformations and material instabilities in solids[M]. New York: Academic Press, 1984.
- [13] 匡震邦. 非线性连续介质力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2002.
- [14] MARSDEN J E, HUGHES T J. Mathematical foundations of elasticity[M]. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [15] OGDEN RW. Non-linear elastic deformations[M]. New York: John Wiley and Sons, 1984.
- [16] 武际可, 王敏中, 王炜. 弹性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [17] TANG C A. A new approach to numerical method of modeling geological process and rock engineering problem-continuum to discontinuum and linearity to nonlinearity[J]. **Engineering Geology**, 1998, 49(4): 207—214.
- [18] 蒋宇. 周期荷载作用下岩石疲劳破坏及变形发展规律 [硕士学位论文 D]. 上海: 上海交通大学, 2003.