

# 杂交型无网格有限体积法及其应用

黄哲聪, 郑 宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘要:** 从有限体积法基本思想出发, 采用移动最小二乘近似方案实现有限体积法与无网格法的结合, 从而使有限体积法摆脱网格的约束, 在此基础上, 提出杂交型无网格有限体积法, 所谓杂交是指对位移和应力都分别进行独立插值, 这样可避免在子域积分过程中被积函数出现形函数的偏导数。至于应力和位移之间的协调关系则通过配点法强制实现, 采用修正配点法施加本质边界条件。算例结果表明, 该方法具有很高的精度和计算效率。

**关键词:** 数值分析; 无网格有限体积法; 有限元法; 有限体积法; 移动最小二乘法; 修正配点法

**中图分类号:** O 241

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2007)09-1868-07

## A HYBRID MESHLESS FINITE VOLUME METHOD AND ITS APPLICATION

HUANG Zhecong, ZHENG Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

**Abstract:** To avoid mesh restriction, the finite volume method(FVM) is combined with the meshless method based on the moving least squares(MLS) approximation. A hybrid meshless finite volume method(MFVM) is presented. Here, "hybrid" has the same meaning as the hybrid finite element. By the hybrid technique, both the displacement and the stress are independently interpolated. In this way, the derivatives of shape functions in integrand on the process of sub-domain integration will disappear. Then, the stress-displacement compatibility is implemented by the collocation method. Essential boundary conditions are imposed using a modified collocation technique. Numerical results in the case studies show that the presented method has higher accuracies and computational efficiencies.

**Key words:** numerical analysis; meshless finite volume method(MFVM); finite element method(FEM); finite volume method(FVM); moving least squares(MLS); modified collocation method

## 1 引言

有限元法在工程数值分析领域中具有举足轻重的地位, 解决了大量的科学和工程问题, 但有限元依然存在着很大的缺陷, 例如在求解动态裂纹扩展、材料破坏及失效、材料相变以及大变形问题时常常因为需要不断地进行网格重构而导致计算量的增大, 精度降低。无网格法在解决以上问题方面有

着很大的优势。

有限体积法(finite volume method, FVM)又称为控制体积法<sup>[1]</sup>, 它得出的离散方程要求因变量的积分守恒对任意一组控制容积都得到满足, 那么对整个求解域守恒原理自然得到满足。这是有限体积法吸引人的优点所在。有些离散方法, 例如有限差分法, 仅当网格极其细密时, 离散方程才能满足积分守恒; 而有限体积法即使在粗网格情况下, 也显示出准确的积分守恒。但传统的有

**收稿日期:** 2006-10-31; **修回日期:** 2007-07-20

**作者简介:** 黄哲聪(1975-), 男, 1998年毕业于湖北工学院工业与民用建筑专业, 现为博士研究生, 主要从事岩石力学数值计算等方面的研究工作。E-mail: huangzhecong2002@163.com

限体积法采用有限元的插值方法, 这使得有限体积法不可避免地受到网格的约束, 有限元法的一些缺陷, 有限体积法同样存在。如果利用节点紧支域内的离散点对场函数进行插值, 将能实现有限体积法与网格脱离。

S. N. Atluri 等<sup>[2-4]</sup>提出以 heavside 函数作为权函数的 MPLG-5, 因该方法在积分形式上与有限体积法相似, 所以又将其称为无网格有限体积法(meshless finite volume method, MFVM)<sup>[5]</sup>, 这种提法是从微分方程的局部弱形式出发得到的类似于有限体积法的无网格法。如果直接从有限体积法的思想出发, 又不同于常规的有限体积法, 采用无网格插值方式<sup>[6-10]</sup>, 这种与无网格法相结合的有限体积法才应该是纯粹意义上的无网格有限体积法, 真正实现了有限体积法与网格的脱离; 这种无网格有限体积法形式更加简洁, 概念更加清晰, 更有利于其在岩土工程中推广。

有限体积法需要在节点的控制容积内进行体积分。作为衍生的有限体积法, 无网格有限体积法同样需要对控制方程在局部子域内进行积分。如果采用传统的插值方案, 即未知量取为广义节点位移  $\hat{u}(x_i)$ , 局部子域积分过程中需要计算形函数的偏导数, 这将导致计算效率不高, 精度有所下降, 有异于 S. N. Atluri 等<sup>[5]</sup>中的应变-位移混合法。本文在积分过程中先不考虑应力-应变关系, 而是直接从应力入手, 将广义节点应力  $\hat{\sigma}(x_i)$  同广义位移  $\hat{u}(x_i)$  一样进行独立插值, 这样不仅避免了形函数偏导数的出现, 同时也减少了积分的计算量; 完成积分以后再通过配点法来施加应力与位移的协调关系。这种应力插值与位移插值混合使用的方法可以称之为杂交型无网格有限体积法。另外, 在实现位移边界条件方面, 本文采取修正配点法<sup>[11]</sup>来施加本质边界条件。

## 2 移动最小二乘法

无网格法构造形函数最常用方法是采用移动最小二乘(MLS)法, 它利用区域上的  $n$  个离散点构造一个二阶连续光滑曲面来逼近真实位移场函数。在影响域  $\Omega$  上, 场函数可近似地表示为

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

式中:  $u^h(x)$  为近似位移函数;  $p_j(x)$  为任意阶的基函数;  $m$  为基函数的项数,  $\mathbf{a}(x)$  为系数矩阵, 与空

间坐标  $x$  有关;  $\mathbf{p}^T(x)$  为完备多项式。

为求解系数矩阵  $\mathbf{a}(x)$ , 需要用到最小二乘的思想, 即要将如下目标函数最小化:

$$J(x) = \sum_{l=1}^M w(x-x_l) [p^T(x_l) \mathbf{a}(x) - \hat{u}_l]^2 \quad (2)$$

式中:  $w(x-x_l)$  为  $x_l$  处的权函数;  $M$  为  $x$  影响域内节点总数;  $\hat{u}_l$  为  $x=x_l$  的场函数值, 一般情况下,  $u^h(x_l) \neq \hat{u}_l$ 。将式(2)对  $\mathbf{a}(x)$  求极值, 有

$$\frac{\partial J(x)}{\partial \mathbf{a}(x)} = \mathbf{H}(x) \mathbf{a}(x) - \mathbf{G}(x) \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3)$$

其中,

$$\mathbf{H}(x) = \sum_{l=1}^M w(x-x_l) \mathbf{p}(x_l) \mathbf{p}^T(x_l) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{P} \quad (4)$$

$$\mathbf{G}(x) = \sum_{l=1}^M w(x-x_l) \mathbf{p}(x_l) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_M) & p_2(x_M) & \cdots & p_m(x_M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(x-x_M) \end{bmatrix}$$

故系数矩阵  $\mathbf{a}(x)$  可表示为

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{H}^{-1}(x) \mathbf{G}(x) \hat{\mathbf{u}} \quad (6)$$

将式(6)代入式(1), 可得近似位移函数  $u^h(x)$  的表达式为

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^M \phi_l(x) \hat{u}_l = \boldsymbol{\phi}(x) \hat{\mathbf{u}} \quad (7)$$

式中:  $\boldsymbol{\phi}(x)$  为形函数矩阵, 且有

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l, \dots, \phi_M\} = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{H}^{-1}(x) \mathbf{G}(x) \quad (8)$$

式(2)中的权函数  $w(x-x_l)$  具有紧支域, 本文采用的是 4 次 SPLINE 型权函数<sup>[10]</sup>。

## 3 无网格有限体积法

FVM 是在有限差分的基础上发展起来的, 与有限差分法不同的是, 有限体积法的出发点是积分形式的控制方程。有限体积法与有限元法有相似之处, 可以看成有限元加权余量法推导过程中令权函数  $\delta w = 1$  而得到的积分方程, 同时该积分方程表示

了场变量  $u$  在子域内的通量守恒特性，即流入子域的对流量与流出子域的扩散量相等，这一点又与有限元法有所不同。有限体积法和有限元法一样，也要求对求解域进行离散，将其分割成有限大小的离散网格。在有限体积法中，每一网格  $x_i$  按一定的方式形成包围该节点的积分子域(控制容积)  $\Omega_i$ ，如图 1 所示。

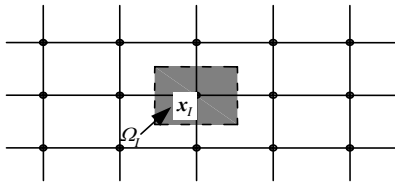


图 1 有限体积法的节点网格及其积分子域  
Fig.1 Nodal mesh and its integral subdomain of FVM

一般来讲，各节点有互不重叠的控制容积  $\Omega_i$ ，从而整个求解域中场变量的守恒可以由各个子域中特征变量的守恒来保证。如果将有限体积法与无网格法思想相结合，对求解域通过节点进行离散，每个  $x_i$  具有包围该节点的积分子域(控制容积)  $\Omega_i$ ，如图 2 所示。

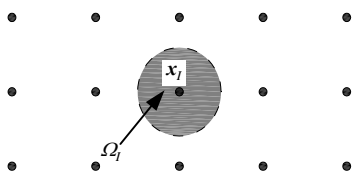


图 2 无网格有限体积法的节点网格及其积分子域  
Fig.2 Node and its integral subdomain of MFVM

无网格有限体积法的积分子域一般取圆形或球体，为保证所有的积分子域能覆盖整个求解域，相邻节点子域之间应有重叠。考察具有边界  $\Gamma$  的域  $\Omega$  的二维弹性力学控制方程：

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (9)$$

式中： $\sigma_{ij}$  为应力张量，它可由位移  $u_i$  表示； $b_i$  为体力。边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 内}) \quad (10)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad (\text{在 } \Gamma_t \text{ 内}) \quad (11)$$

式中： $\bar{u}_i$ ， $\bar{t}_i$  分别为位移边界  $\Gamma_u$  和应力边界  $\Gamma_t$  上的已知位移和应力； $n_j$  为  $\Gamma_t$  的单位外法向量。

如图 3 所示，将整个求解域  $\Omega$  划分成若干个相互重叠的节点子域  $\Omega_s$ ， $x_i$  的积分子域记为  $\Omega_s^i$ ，其

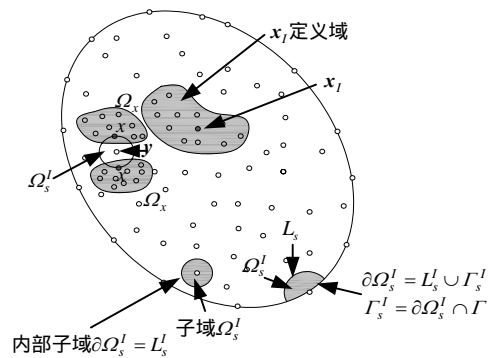


图 3 局部子域及其边界示意图  
Fig.3 Schematic diagram of local subdomain and its boundary

边界  $\partial\Omega_s^i$  位于整个求解域边界上的部分记作  $\Gamma_s^i$ ，位于求解域内的部分记作  $L_s^i$ ，即  $\Gamma_s^i = \partial\Omega_s^i \cap \Gamma$ ， $L_s^i = \partial\Omega_s^i - \Gamma_s^i$ ，并用  $\Gamma_{su}^i$  和  $\Gamma_{st}^i$  分别表示  $\Gamma_s^i$  在位移边界和应力边界上的部分。

根据有限体积法思想，将式(9)在各个节点的子域内进行积分，对于  $x_i$ ，其无网格有限体积法离散方程为

$$\int_{\Omega_s^i} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (12)$$

利用奥氏公式，得到局部对称弱形式为

$$\int_{\partial\Omega_s^i} \sigma_{ij} n_j d\Gamma = - \int_{\Omega_s^i} b_i d\Omega \quad (13)$$

式(13)等号左端的积分项表示在节点子域边界形成的对流量，等号右端表示内源通过节点子域所产生的扩散量，该式代表了在节点子域内的通量守恒。再引入应力边界条件  $t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$ ，得

$$\int_{L_s^i} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}^i} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}^i} \bar{t}_i d\Gamma = - \int_{\Omega_s^i} b_i d\Omega \quad (14)$$

式(14)就是 MFVM 的控制方程，由该式可以看出，除了最后一项是与体积力有关的域积分外，所有积分都是曲线积分，因此若体积力为常向量，是不需要在  $\Omega_s^i$  上设置背景单元来进行域积分的。

### 4 杂交型有限体积法及数值实现

从式(14)可以看出，MFVM 是逐点分别建立控制方程，这使得在不同的点用不同的方法构建其控制方程成为可能，因而可对本质边界点和非本质边界条件点分别处理。

对于非本质边界条件点，式(14)可简化为

$$\int_{L_s^i} t_i d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}^i} \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega_s^i} b_i d\Omega \quad (15)$$

如果以位移  $\hat{u}_i$  作为未知量, 对式(15)进行离散, 则被积函数中会出现形函数的偏导数, 这样不仅会影响积分的效率, 而且也会降低应力的精度。因此, 考虑以广义应力  $\hat{\sigma}_{ij}$  为未知量对应力进行独立插值,  $t_i$  可以离散为

$$t_i(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{ij}^h(\mathbf{x})n_j = \sum_{J=1}^M \phi(\mathbf{x})^J \hat{\sigma}_{ij}^J n_j \quad (16)$$

式(16)写成矩阵的形式为

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\Phi(\mathbf{x})\hat{\sigma} \quad (17)$$

其中,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} t_1(\mathbf{x}) \\ t_2(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \{\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \dots, \Phi_J(\mathbf{x}), \dots, \Phi_M(\mathbf{x})\} \quad (19)$$

$$\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_J, \dots, \hat{\sigma}_M\}^T \quad (20)$$

其中,

$$\Phi_J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_J(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_J(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_J(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_J = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{11}^J \\ \hat{\sigma}_{22}^J \\ \hat{\sigma}_{12}^J \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式中:  $\phi_j(\mathbf{x})$  为  $\mathbf{x}$  影响域内第  $J$  个节点的形函数。

经过离散后, 可以得到式(15)的矩阵形式为

$$\int_{L_s^I} \mathbf{N}\Phi(\mathbf{x})\hat{\sigma} d\Gamma = -\int_{\Gamma_s^I} \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} b_i d\Omega \quad (22)$$

式(22)可简化为

$$\mathbf{S}_I \hat{\sigma} = \mathbf{f}_I \quad (23)$$

其中,

$$\mathbf{S}_I = \int_{L_s^I} \mathbf{N}\Phi(\mathbf{x})d\Gamma, \quad \mathbf{f}_I = -\int_{\Gamma_s^I} \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega_s^I} b_i d\Omega \quad (24)$$

式(24)表明, 在积分过程中不再要求形函数的偏导数。一方面, 无网格法近似函数的偏导数的求解过程要比有限元法复杂得多, 尤其是使用 MLS 来构建无网格近似函数, 其计算效率是很低的, 而式(23)不仅较原 MFVM 的表达式简单, 而且在积分过程中避免了形函数偏导数的出现, 其计算效率将得到较大的提高。另一方面, 还应该看到, 式(23)中方程数少于独立未知量数, 这是因为节点应力变量要多于节点位移变量(在二维情况中, 一个节点有 3 个应力变量, 而仅仅有 2 个位移变量, 可以通过配点法将应力变量变换为位移变量。对  $x_j$  处的真实应力可以用节点位移近似表示为

$$\sigma^h(\mathbf{x}_j) = \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{x}_j)\hat{u} \quad (25)$$

其中,

$$\mathbf{D} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{x}_j) =$

$$\{\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_j), \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_j), \dots, \mathbf{B}_I(\mathbf{x}_j), \dots, \mathbf{B}_M(\mathbf{x}_j)\} \quad (27)$$

$$\hat{u} = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_I, \dots, \hat{u}_M\}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{x}_j) = \begin{bmatrix} \phi_{I,x}(\mathbf{x}_j) & 0 \\ 0 & \phi_{I,y}(\mathbf{x}_j) \\ \phi_{I,y}(\mathbf{x}_j) & \phi_{I,x}(\mathbf{x}_j) \end{bmatrix}, \quad \hat{u}_I = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1^I \\ \hat{u}_2^I \end{Bmatrix} \quad (29)$$

对平面应力问题:  $E_0 = E, \nu_0 = \nu$ ; 对平面应变问题:  $E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$ 。式(25)可简化为

$$\sigma^h(\mathbf{x}_j) = \mathbf{T}_j \hat{u} \quad (30)$$

其中,

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{x}_j) \quad (31)$$

同时, 节点应力又可用广义应力近似表示为

$$\sigma^h(\mathbf{x}_j) = \Phi(\mathbf{x}_j)\hat{\sigma} \quad (32)$$

为了方便求解广义位移  $\hat{u}$  和应力  $\hat{\sigma}$  的关系, 将式(25)和式(32)用整体矩阵形式表示为

$$\mathbf{T}\hat{u} = \mathbf{H}\hat{\sigma} \quad (33)$$

其中,

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_J, \dots, \mathbf{T}_M\}^T \quad (34)$$

$$\mathbf{H} = \{\Phi(\mathbf{x}_1), \Phi(\mathbf{x}_2), \dots, \Phi(\mathbf{x}_J), \dots, \Phi(\mathbf{x}_M)\}^T \quad (35)$$

式中:  $\mathbf{H}$  为可逆矩阵。  $\hat{\sigma}$  与  $\hat{u}$  的变换关系为

$$\hat{\sigma} = \mathbf{R}\hat{u} \quad (36)$$

其中,

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{T} \quad (37)$$

矩阵  $\mathbf{R}$  就是通过配点法得到的  $\hat{\sigma}$  与  $\hat{u}$  的变换矩阵。将式(36)代入式(23)得到非本质边界点的控制方程组为

$$\mathbf{K}_I \hat{u} = \mathbf{f}_I \quad (38)$$

其中,

$$\mathbf{K}_I = \mathbf{S}_I \mathbf{R} \quad (39)$$

求出每个非本质边界点的局部刚度矩阵  $\mathbf{K}_I$  及局部等效荷载  $\mathbf{f}_I$ , 装配入整体控制方程组。

对于  $\Gamma_u$  上的  $x_i$ , 通过修正配点法施加本质边界条件, 如果  $x_i$  处的第  $i$  个自由度受到位移约束, 即  $u_i(\mathbf{x}_i) \in \Gamma_{su}$ , 该自由度的控制方程为

$$u_i^h(x_i) = \sum_{j=1}^M \phi_j(x_i) \hat{u}_i^j = \bar{u}_i(x_i) \quad (40)$$

式中： $\bar{u}_i(x_i)$  为  $x_i$  处受约束自由度的给定位移。

将式(40)直接装配入整体控制方程组中，这样对本质边界条件的处理直接有效，它不仅简化了本质边界条件的施加过程，而且能够较为精确地满足本质边界条件。但这种处理方法会破坏刚度矩阵的对称性，不过 MFVM 的刚度矩阵原本就不是对称的，因此它不会带来额外的计算问题。

## 5 算例

### 5.1 算例 1

如图 4 所示，无重悬臂梁右端受均布荷载作用，其解析解<sup>[12]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -\frac{Py}{6EI} [3x(2L-x) + (2+\bar{\nu})(y^2-c^2)] \\ u_y &= -\frac{P}{6EI} [x^2(3L-x) + 3\bar{\nu}(L-x)y^2 + (4+5\bar{\nu})c^2x] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中，

$$I = \frac{c^3}{3} \quad (42)$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & (\text{平面应力}) \\ \frac{E}{(1-\nu)^2} & (\text{平面应变}) \end{cases}, \quad \nu = \begin{cases} \nu & (\text{平面应力}) \\ \frac{\nu}{1-\nu} & (\text{平面应变}) \end{cases} \quad (43)$$



图 4 受端部荷载作用的悬臂梁

Fig.4 A cantilever beam with a load at the end

应力可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{I}(L-x)y \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -\frac{P}{2I}(y^2-c^2) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

本文取： $P=1000\text{ N}$ ， $E=10\,000\text{ MPa}$ ， $c=2\text{ m}$ ， $L=24\text{ m}$ ， $\nu=0.25$ 。如图 5 所示，悬臂梁均匀布置 125 个节点，节点间距  $d=1.0\text{ m}$ ，使用一次 MLS 近似方法，节点局部子域取半径为  $0.6d$  的圆域，计算点支撑域大小为  $1.15d$ 。分别采用杂交型 MFVM 和 EFGM 计算节点位移，MFVM 采用 16 点高斯曲线

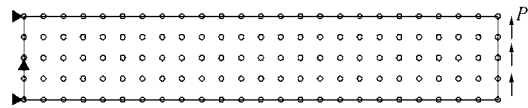


图 5 悬臂梁均布置 125 个点(间距  $d=1.0\text{ m}$ )

Fig.5 Cantilever beam with even distribution of 125 nodes ( $d=1.0\text{ m}$ )

积分，EFGM 采用  $4 \times 4$  高斯区域积分，将位于中心轴上节点的竖向位移和  $x$  坐标向区间  $[0, 1]$  规范化，其计算结果如图 6 所示。

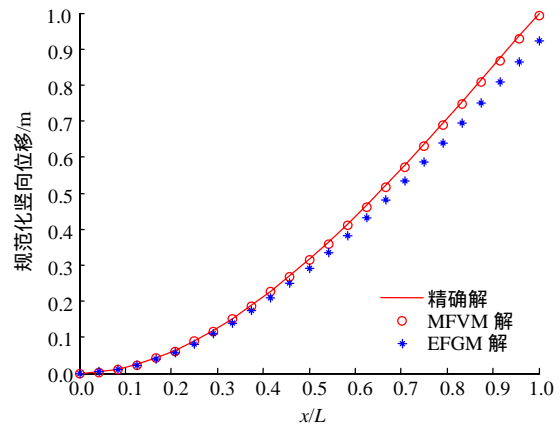


图 6 MFVM 与 EFGM 规范化竖向位移比较

Fig.6 Comparison of normalized vertical displacement between MFVM and EFGM

从图 6 中可以看出，在相同的支撑域半径下，杂交型 MFVM 解的精度要高于 EFGM 解的精度，而在计算过程中 EFGM 所消耗的时间却是 MFVM 的 7~8 倍，这说明 MFVM 解的精度和效率都要高于 EFGM 解。

### 5.2 算例 2

如图 7 所示，考虑一个中心有孔的无限大方板，在无穷远处受水平方向均布荷载作用， $q=1\text{ kN/m}$ 。

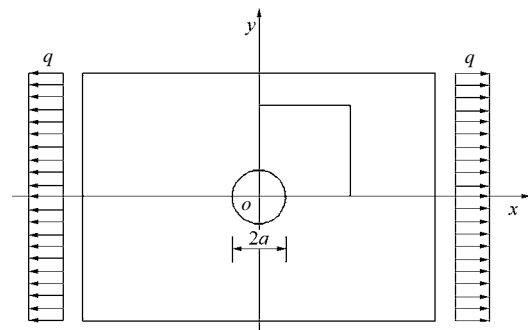


图 7 中心有孔无限大方板受水平方向均布荷载作用

Fig.7 An infinite plate with a circular hole under a uniaxial load

将坐标原点取在圆孔中心，由于结构的对称性，

仅取其中 1/4 进行研究, 如图 8 所示, 边长为  $D$ , 中心圆孔半径为  $a$ , 孔边缘为自由边界, 左边界和下边界分别固定  $x$  和  $y$  方向位移, 上表面和右表面为指定面力边界。

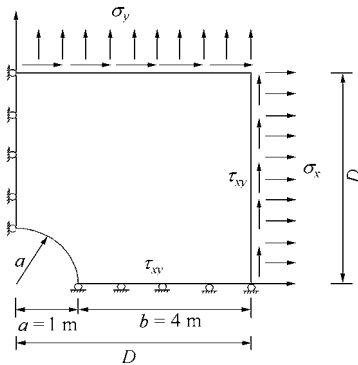


图 8 计算模型

Fig.8 Calculating model

弹性力学给出的解析解<sup>[8]</sup>为

$$u_r = \frac{q}{4G} \left\{ r \left( \frac{\kappa - 1}{2} + \cos 2\theta \right) + \frac{a^2}{r} [1 + (1 + \kappa) \cos 2\theta] - \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right\} \quad (45)$$

$$u_\theta = \frac{q}{4G} \left[ (1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right] \sin 2\theta \quad (46)$$

$$\sigma_x(x, y) = q \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \quad (47)$$

$$\sigma_y(x, y) = -q \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right] \quad (48)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -q \left[ \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right] \quad (49)$$

其中,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面应变}) \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \end{cases}$$

$(r, \theta)$  为相对于原点在圆孔中心的坐标系的极坐标, 其中,  $r$  为极径, 且  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\theta$  为从  $x$  轴正向沿逆时针方向算起的夹角, 中心圆孔半径  $a = 1 \text{ m}$ , 材料参数取为  $E = 1 \text{ 000 Pa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 共布置 99 个节点(见图 9)。

分别用无网格迦辽金法(EFGM)和杂交型无网格有限体积法(MFVM)求得左边界( $x = 0$ )各节点的  $\sigma_x$  及垂直位移, 为简化计算, MFVM 采用变积分分子域, 以保证域内节点的积分分子域与边界不相交, 其结果如图 10, 11 所示。

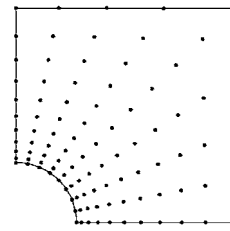


图 9 节点布置

Fig.9 Nodal configuration

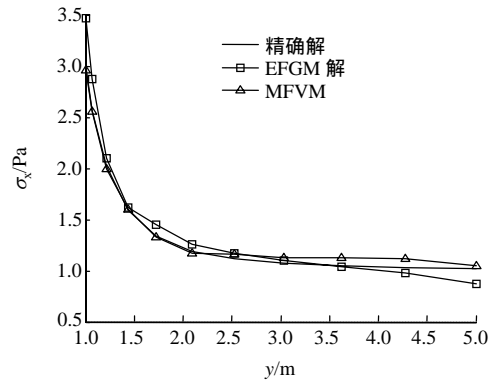


图 10 y 轴上( $x = 0$ )各点正应力  $\sigma_x$

Fig.10 Normal stresses  $\sigma_x$  along y axis( $x = 0$ )

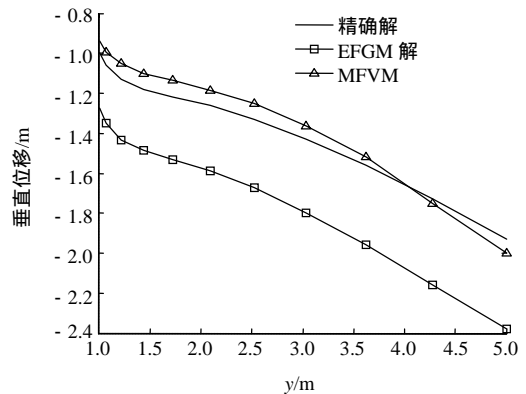


图 11 y 轴上( $x = 0$ )各点垂直位移

Fig.11 Vertical displacements along y axis( $x = 0$ )

由以上计算结果可以看出, MFVM 的位移曲线较传统的 EFGM 更接近于精确解, 表明 MFVM 解的精度要高于 EFGM 解的。同时, 在实际计算过程中, MFVM 在减少计算消耗方面也较 EFGM 有着明显的优势。

### 5.3 算例 3

锦屏一级左岸交通洞有一个半圆拱隧道, 断面尺寸为  $3.500 \text{ m} \times 2.175 \text{ m}$ , 半圆拱半径  $2.4 \text{ m}$ , 计算区域尺寸为  $40 \text{ m} \times 36 \text{ m}$ , 围岩密度为  $2 \text{ 700 kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 3 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.25$ , 在此断面布置 1 479 个节点, 隧道左右边界受水平方向约束, 底边界受竖直方向约束(见图 12)。

按照平面应变问题考虑, 在仅受自重作用下, 分别运用杂交型 MFVM 和 FEM 对隧道进行应

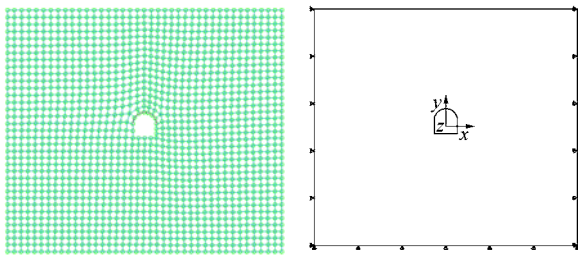


图 12 隧道节点布置方案及受约束边界

Fig.12 Nodal disposition and restrained boundary of tunnel

力及位移分析, 取  $\sigma_y$  和  $u_y$  作为比较对象, 得到等值线图分别如图 13, 14 所示。

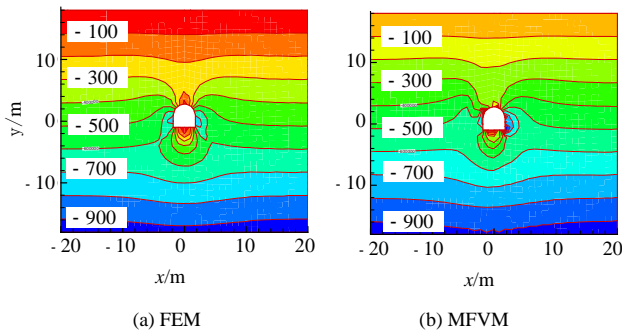


图 13 FEM 与 MFVM 的  $\sigma_y$  等值线图(单位: kPa)

Fig.13  $\sigma_y$  contours of FEM and MFVM(unit: kPa)

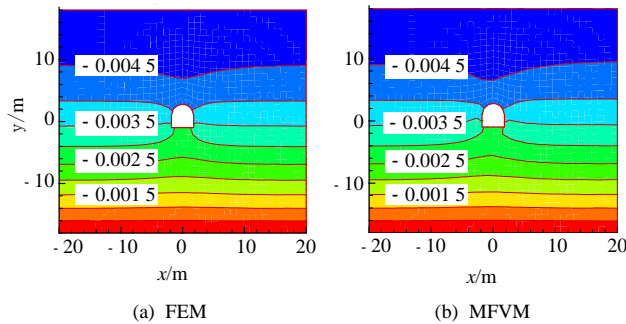


图 14 FEM 与 MFVM 的  $u_y$  等值线图(单位: m)

Fig.14  $u_y$  contours of FEM and MFVM(unit: m)

从图 13, 14 中可以看出, 杂交型 MFVM 计算结果与 FEM 计算结果吻合得较好。本算例表明, 杂交型 MFVM 用于岩土工程具有一定的可行性。

### 6 结 论

杂交型 MFVM 的表达式简单, 精度高, 效率高, 其特点可总结如下:

应力直接通过无网格近似法进行插值, 在局部积分中仅包含应力部分, 避免了计算形函数的偏导数, 加快了计算速度。通常的无网格法以位移为插值变量, 试函数要求一阶连续, 则形函数就要求有二

阶连续, 而在目前的方法中, 应力独立于位移变量进行插值, 试函数仅要求零阶连续, 形函数的连续性要求从二阶减小到一阶。

传统的无网格法为保证 MLS 的非奇异性, 要选择较大的支撑域(支撑域内节点数至少为 6), 这样就导致了插值曲线过光滑的结果。杂交型 MFVM 在对应力和位移插值时, 只需选择使用一次多项式基的 MLS 就可以达到较大的精度, 并且支撑域大小也随之大幅减小(域内保证有 3 个节点即可)。杂交型 MFVM 采用修正配点法施加本质边界条件, 对本质边界点和非本质边界点使用 2 种不同的控制方程, 计算公式较简单。

### 参考文献(References):

- [1] 李人宪. 有限体积法基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.(LI Renxian. The basic of finite volume method[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.(in Chinese))
- [2] ATLURI S N, ZHU T. A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics[J]. Comp. Mech., 1998, 22: 117-127.
- [3] ATLURI S N. The meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) method for domain and boundary discriminations[M]. [S. l.]: Tech Science Press, 2004: 680.
- [4] HAN Z D, ATLURI S N. Meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) approaches for solving 3D problems in elastostatics[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, 6(2): 169-188.
- [5] ATLURI S N, HAN Z D, RAJENDRAN A M. A new implementation of the meshless finite volume method, through the MLPG "mixed" approach[J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2004, 6(6): 491-513.
- [6] LUCY L B. A numerical approach to the test of the fission hypothesis[J]. The Astron Journal, 1977, 8(12): 1 013-1 024.
- [7] BELYSTCHKO T, GU L, LU Y Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods model[J]. Simul. Mater. Sci. Engng., 1994, (2): 519-534.
- [8] BELYSTCHKO T. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [9] 张 雄, 刘 岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.(ZHANG Xiong, LIU Yan. Theory of meshfree methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.(in Chinese))
- [10] 吴永礼. 计算固体力学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.(WU Yongli. Calculating solid mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2003.(in Chinese))
- [11] HU D A, LONG S Y, LIU K Y. A modified meshless local Petrov-Galerkin method to elasticity problems in computer modeling and simulation[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2006, 30: 399-404.
- [12] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. 3rd ed. New York: McGraw Hill, 1976.