

考虑黏聚特性和拉压不等效应的修正剑桥模型及数值实现

袁克阔¹, 陈卫忠^{1,2}, 于洪丹¹, 谭贤君¹, 赵武胜¹, 李香玲³

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 山东 济南 250061; 3. Euridice, SCK•CEN, 国家核能研究中心, 比利时 摩尔 2400)

摘要: 针对修正剑桥模型不能反映岩土介质黏聚特性和拉压不等效应的局限性, 通过子午面上考虑黏聚力、偏平面上考虑应力罗德角的影响, 建立可考虑黏聚力与拉压不等效应的非相关联修正剑桥模型; 较系统地介绍所修正模型的 Euler 向后隐式本构积分算法及程序实现过程。应用 ABAQUS 软件所提供的用户材料子程序 UMAT 接口, 编制改进修正剑桥模型本构子程序, 并运用所编程序研究比利时 Boom clay 的三轴压缩力学行为。研究结果表明, 所编子程序具有较高的计算精度和良好的稳定性, 所改进模型能较好地反映 Boom clay 的非线性与塑性流动特性。

关键词: 岩石力学; 拉压不等效应; 修正剑桥模型; 本构积分算法; 用户自定义子程序 UMAT

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2012)08 - 1574 - 06

MODIFIED CAM-CLAY MODEL CONSIDERING COHESION AND S-D EFFECT AND ITS NUMERICAL IMPLEMENTATION

YUAN Kekuo¹, CHEN Weizhong^{1,2}, YU Hongdan¹, TAN Xianjun¹, ZHAO Wusheng¹, LI Xiangling³

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Geotechnical and Structural Engineering Research Center, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China; 3. Euridice, SCK • CEN, Belgian Nuclear Research Centre, Mol 2400, Belgium)

Abstract: Due to the conventional modified Cam-clay model can not describe the cohesion properties and different yield strengths in tension and compression performance (S-D effect for short) for geotechnical materials, a modified Cam-clay model with non-associated flow rule is established considering S-D effect on deviatoric plane and cohesion on meridian plane. The main contents of implicit constitutive integration algorithm for the improved model and its implementation procedure are discussed systematically. Based on the platform of software ABAQUS, the user-defined material subroutine UMAT interface is developed to generate corresponding constitutive subroutine of the modified Cam-clay model. Meanwhile, the numerical simulation of triaxial compression test on Belgium Boom clay is implemented. The study result shows that the improved constitutive model and the UMAT subroutine have higher calculation accuracy and good stability, which could effectively depict the nonlinear and plastic flow characteristics of Belgium Boom clay.

Key words: rock mechanics; S-D effect; modified Cam-clay model; constitutive integration algorithm; user-defined subroutine UMAT

1 引言

岩土工程中广泛采用的莫尔 - 库仑准则, 能较

好地描述岩土材料的强度特性和破坏行为, 而涉及变形和固结分析问题该模型从理论和实践中均有一定的不足, 基于等向加载试验建立起来的剑桥模型则能较好地描述黏土的弹塑性变形特性^[1]。

收稿日期: 2012 - 04 - 16; **修回日期:** 2012 - 06 - 05

基金项目: 国家自然科学基金重大国际合作项目(50720135906); 国家自然科学基金资助项目(51109207)

作者简介: 袁克阔(1985 -), 男, 2008年毕业于西北农林科技大学水利与建筑工程学院农业水利工程专业, 现为博士研究生, 主要从事软岩蠕变方面的研究工作。E-mail: kkw1985@163.com

近年来, 一些学者对剑桥模型理论进行了不同方面的改进或扩展。R. I. Borja 等针对剑桥模型, 从常规各向同性小应变模型^[2-3]到各向异性、有限应变^[4]和非饱和模型^[5]进行了系统研究; 孙德安等^[6]考虑初始应力各向异性改进了原始剑桥模型; M. D. Liu 和 J. P. Carter^[7]通过引入初始附加孔隙比的概念发展了考虑土体结构性的剑桥模型; J. P. Carter 等^[8]考虑了循环荷载作用下复杂应力路径的影响, 发展了剑桥动力本构模型; 范庆来等^[9-10]通过隐式积分算法将其实现了有限元程序化; R. Kohler 和 G. Hofstetter^[11]通过引入吸力而将剑桥模型扩展到非饱和土的本构模型。然而, 目前软件及相关研究中采用的都是比较经典的本构模型, 剑桥模型在偏平面的屈服轨迹为一个圆, 不符合土体的拉压不等(S-D)效应, 且只适于正常固结重塑黏土^[12], 难以全面描述岩土材料的力学特性。

本文在 R. I. Borja 等^[2-5]工作的基础上, 通过子午面上考虑黏聚力, 偏平面上考虑应力罗德角的影响, 对修正剑桥模型进行了改进, 改进后的模型能够考虑拉压不等效应, 并能够全面表达摩擦黏聚型岩土介质力学特性; 最后以 ABAQUS 软件为平台, 采用 Fortran 语言编制了 UMAT 本构程序, 并通过数值试验验证了程序的可靠性。

2 修正剑桥模型及改进

传统相关联修正剑桥本构模型的屈服面方程、硬化准则和流动法则分别为

$$\left. \begin{aligned} F = Q = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) = 0 \\ \dot{p}_c = \chi p_c \dot{\varepsilon}_V^p \\ \chi = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \\ d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,

$$p = \sigma_{ii} / 3 \quad (2)$$

$$M = \frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi} \quad (3)$$

式中: F , Q 分别为屈服函数和塑性势函数; $q = \sqrt{3/2(s_{ij}s_{ij})}$ 为广义剪应力, 其中, $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ 为偏应力, p 为静水压力, σ_{ij} 为应力分量, δ_{ij} 为 Kronecker 符号; M 为 p - q 平面临界状态线斜率; p_c

为前期固结压力; ε_V^p 为塑性体应变增量; ε^p 为塑性应变; e 为土体孔隙比; λ , κ 分别为压缩指数和回弹指数; φ 为内摩擦角。

由于式(1)所确定的屈服轨迹在 π 平面是一个圆, 不能反映岩土介质拉压不等(S-D)效应, 而且剑桥模型是基于正常固结状态试验推导而来, 子午面上临界状态线通过应力坐标原点, 表现为不考虑土体黏聚力的纯摩擦型本构, 而大多数的岩土介质具有一定的黏聚力, 属摩擦 - 黏聚型材料。考虑到莫尔 - 库仑准则有此特征, 故将莫尔 - 库仑准则与剑桥模型相结合, 得

$$q = \bar{q} + M(\theta_\sigma)p \quad (4)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \frac{3c\cos\varphi}{\sqrt{3\cos\theta_\sigma + \sin\varphi\sin\theta_\sigma}} \\ M(\theta_\sigma) &= \frac{3\sin\varphi}{\sqrt{3\cos\theta_\sigma + \sin\varphi\sin\theta_\sigma}} \\ \theta_\sigma &= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: c 为黏聚力; θ_σ 为应力罗德角, $-30^\circ \leq \theta_\sigma \leq 30^\circ$; J_2 , J_3 分别为第二, 第三偏应力不变量。

联合式(1), (4), (5), 有改进的屈服函数:

$$F = \frac{q^2}{M(\theta_\sigma)^2} + (p + c\cot\varphi)(p - p_c) = 0 \quad (6)$$

式(6)中 $M(\theta_\sigma)$ 确定的莫尔 - 库仑屈服轨迹在 π 平面存在 6 个棱角奇异点, 不利于收敛。采用 D. C. Sheng 和 S. W. Sloan^[13]的近似拟合函数来修正 $M(\theta_\sigma)$ 值, 如下式:

$$M_\theta = M \left[\frac{2\alpha^4}{1 + \alpha^4 + (1 - \alpha^4)\sin 3\theta_\sigma} \right]^{1/4} \quad (7a)$$

其中,

$$\alpha = \frac{3 - \sin\varphi}{3 + \sin\varphi} \quad (7b)$$

式中: M 为三轴压缩情况下 $\theta_\sigma = -30^\circ$ 时的 $M(\theta_\sigma)$ 值, 即 $M = \frac{6\sin\varphi}{3 - \sin\varphi}$ 。

利用式(7(a))使得改进后的屈服面能够尽量接近莫尔 - 库仑屈服面, 并且在棱角处得到光滑连续的处理, 处理后的 π 平面屈服轨迹形状如图 1 所示, 该处理方法保证了屈服面在任何应力状态下都可微分, 且在摩擦角 $\varphi \leq 48.59^\circ$ 的情况下是凸面, 完

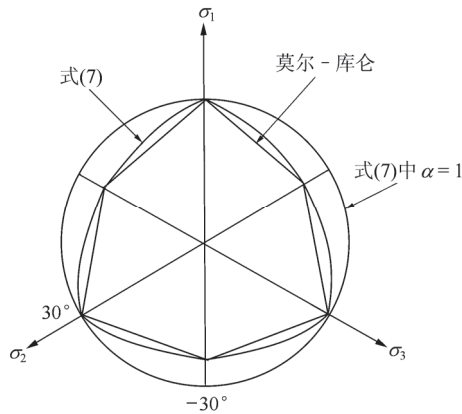


图1 偏平面修正屈服轨迹

Fig.1 Modified shape of the yield surface in deviatoric plane

全满足绝大多数摩擦-黏聚型岩土介质。

改进后的模型采用非相关联流动法则，屈服函数如式(6)所示，势函数形式同式(6)，其中 M_θ 取为定值 M 。

3 改进的修正剑桥模型积分算法

本构模型积分算法的基本思路^[14]是假定某时刻 t (即第 n 增量步) 的所有变量值已经给出，并给定了时间步长增量 Δt_{n+1} 和总应变增量 $\Delta \epsilon_{n+1}$ (为弹性应变增量与非弹性应变增量之和)，在此基础上通过数学算法寻求满足离散本构方程的精确应力解 σ_{n+1} ；主要算法有割平面法(cutting plane algorithm, CPA)和最近点映射法(closest point projection method, CPPM)^[15]，普遍做法主要有4步，即弹性预测、状态判断、塑性修正、塑性迭代平衡后进行应力、应变等变量更新，核心方法是 Newton-Raphson 法求解非线性方程组。

对于考虑黏聚力和应力罗德角的非相关联剑桥模型，应用向后欧拉完全隐式最近点回映算法(return mapping algorithms, RMA)进行数值实现，算法基本过程如下：

(1) 进行弹性试算：

$$\sigma^{\text{trial}} = \sigma_n + \mathbf{D}^e \mathbf{d}\epsilon = \sigma_n + \mathbf{d}\sigma^{\text{trial}} \quad (8a)$$

其中，

$$\mathbf{D}^e = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8b)$$

式中： σ^{trial} 为试探应力分量， K 为体积弹性模量， G 为剪切模量。

剑桥模型弹性计算所用弹性理论为多孔介质非线性弹性，体积弹性模量和剪切模量分别为

$$K = \frac{1+e_0}{\kappa} p, \quad G = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} K \quad (9)$$

式中： μ 为泊松比。

为避免零刚度矩阵的情况，定义 $p \geq p_{\min}$ (如 $p_{\min} = 1 \text{ kPa}$)。

(2) 由 σ^{trial} 计算 p^{trial} ， S^{trial} 及 q^{trial} ，并使：

$$\left. \begin{aligned} p^{\text{trial}} &= p^{\text{trial}} + c \cot \varphi \\ p_c^{\text{trial}} &= p_c^{\text{trial}} + c \cot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中： p_c^{trial} 为弹性试探步的前期固结应力。

计算屈服函数：

$$F = \frac{(q^{\text{trial}})^2}{M_\theta^2} + p^{\text{trial}}(p^{\text{trial}} - p_c^{\text{trial}}) \quad (11)$$

(3) 取某个容许误差值 ERR ，以判断其收敛，本文设 $ERR = 1 \times 10^{-5}$ 。若 $F > ERR$ ，则应用牛顿法求解非线性方程 $F(d\lambda) = 0$ ，主要步骤如下：

① 初始设：

$$k = 0, \quad d\lambda^0 = 0 \quad (12)$$

② 求解方程 $F(d\lambda) = F(p, q, p_c)$ (13)

③ 迭代求解未知量 $d\lambda^{k+1} = d\lambda - \frac{F(d\lambda^k)}{F'(d\lambda^k)}$ (14)

其中，

$$F'(d\lambda) = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial (d\lambda)} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial (d\lambda)} + \frac{\partial F}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial (d\lambda)}$$

④ 硬化参数—前期固结应力 p_c 的更新：

$$G(p_c) = (p_c)_n \exp\left(\chi d\lambda \frac{2p^{\text{trial}} - p_c}{1 + 2d\lambda K}\right) - p_c \quad (15)$$

若 $|G(p_c^k)| > ERR$ ，则

$$p_c^{k+1} = p_c^k - \frac{G^k(p_c^k)}{G'(p_c^k)} \quad (16)$$

⑤ 应力状态更新：

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{p^{\text{trial}} + d\lambda K p_c}{1 + 2d\lambda K} \\ q &= q^{\text{trial}} / \left(1 + 6G \frac{d\lambda}{M^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

⑥ 迭代终止条件判断：

$$|F(d\lambda)| = |F(p, q, p_c)| \quad (18)$$

若 $|F(d\lambda)| \leq ERR$ ，结束迭代，进入下述计算；否则转至③继续迭代。

⑦ 令 $p = p - c \cot \varphi$ ， $p_c = p_c - c \cot \varphi$ ，并由 p ，

q 及 $n = \frac{s_{ij}^{trial}}{\|s_{ij}^{trial}\|}$ 求解 s_{ij} , σ_{ij} , J_3 , J_2 , θ_σ 及 M_θ 。 s_{ij} 的表达式为

$$s_{ij} = n \|s_{ij}\| = \frac{s_{ij}^{trial}}{\|s_{ij}^{trial}\|} \|s_{ij}\| = \frac{s_{ij}^{trial}}{\|s_{ij}^{trial}\|} \sqrt{\frac{2}{3}} q \quad (19)$$

(4) 变量更新:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{(n+1)} &= \varepsilon_{(n)} + d\varepsilon, \quad d\varepsilon_{(n+1)}^p = d\lambda_{(n+1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)_{n+1} \\ \varepsilon_{(n+1)}^p &= \varepsilon_{(n)}^p + d\varepsilon_{(n+1)}^p, \quad \varepsilon_{(n+1)}^e = \varepsilon_{(n)}^{trial} - d\varepsilon_{(n+1)}^p \\ de &= (1 + e_{(n)}) d\varepsilon_{v(n+1)}, \quad e_{(n+1)} = e_{(n)} + de \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(5) 提供一致切线刚度矩阵

为了程序迭代求解该增量步内的整体方程组, 在完成每个积分点的应力 - 应变状态计算后, 还需提供与材料的弹塑性本构关系及其积分算法密切相关的一致性切线刚度矩阵^[16]。

由 $\sigma^k = p^k \delta_{ij} + \|s_{ij}\| n$ 得

$$D^{ep} = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \otimes \delta_{ij} + \sqrt{\frac{2}{3}} q \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} + \sqrt{\frac{2}{3}} n \otimes \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \quad (21)$$

式中: D^{ep} 为一致性切线刚度矩阵。

4 数值实施

基于以上推导, 通过 ABAQUS 提供的子程序接口, 应用 Fortran 语言进行二次开发。UMAT 子程序算法流程如图 2 所示。

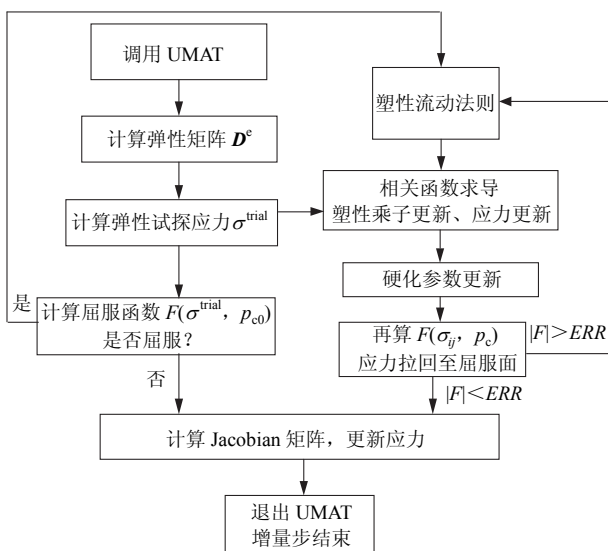


图 2 剑桥模型 UMAT 子程序分析流程图

Fig.2 Calculation flow chart of subroutine UMAT for Cam-clay model

由于迭代步间应变增量、应力增量一般较小, 故可假定迭代过程每个迭代步间孔隙比、体积弹性

模量、应力罗德角等变量是确定不变的, 仅在相邻增量步间进行更新。

对于 $d\lambda$ 的迭代求解过程中, 应用了 Aitken 加速技术, 极大提高了计算效率。

需注意的是基于以上推导的雅克比矩阵通常为非对称矩阵, 需在 ABAQUS 计算过程中指定非对称算法。

5 程序验证

基于开发的用户子程序 UMAT, 通过实体单元和轴对称单元 2 类单元对正常固结(NC)和超固结(OC)试样进行了包括常规三轴固结排水(CD)、固结不排水(CU)压缩和纯剪切多种情况下的有限元模拟。限于篇幅, 这里仅给出采用一阶八节点的三维实体孔压单元(C3D8P)的三轴压缩试验的模拟结果。材料参数如表 1^[17]所示。

表 1 材料参数^[17]

Table 1 Material parameters^[17]

工况	初始孔隙比 e	压缩指数 λ	回弹指数 κ	泊松比 μ	*黏聚力 c/kPa
正常固结	1.50	0.2	0.02	0.3	10
超固结	1.53	0.2	0.02	0.3	10
工况	内摩擦角 $\varphi/(^\circ)$	前期固结压力 p_c/kPa	渗透系数 $k/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	初始静水应力 p_0/kPa	
正常固结	30	50	10^{-8}	50	
超固结	30	50	10^{-8}	10	

注: “*” 表示黏聚力为子程序所需自加参数, 非参考文献所给。

模型尺寸为 $\phi 38 \text{ mm} \times 76 \text{ mm}$ (见图 3), 具体试验步骤为保持侧向围压不变, 沿模型轴线方向施加竖向位移 15.2 mm (轴向应变 $\varepsilon_a = 20\%$)。计算中增量步长采用 ABAQUS 自动搜索步长, 设置初始增量步长为 0.1, 允许的最小增量步长为 0.01, 最大增量步长为 0.1。模拟所得的应力路径、孔隙比与有效应力及应力 - 应变关系如图 4~6 所示。

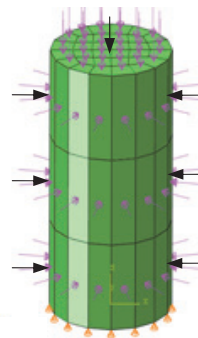
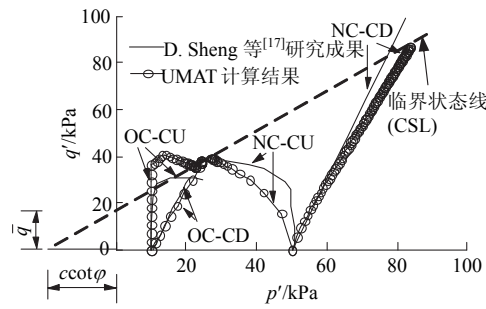
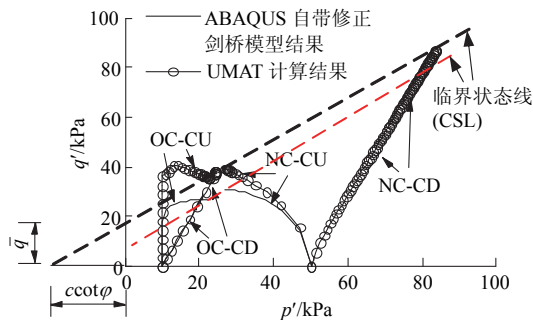


图 3 三轴试验有限元计算模型(C3D8P)

Fig.3 Finite element calculation models for triaxial test (C3D8P)



(a) UMAT 计算结果与 D. Sheng 等^[17]研究成果比较



(b) UMAT 计算结果与 ABAQUS 自带修正剑桥模型结果比较

图 4 三轴剪切试验应力路径

Fig.4 Stress paths in triaxial shear test

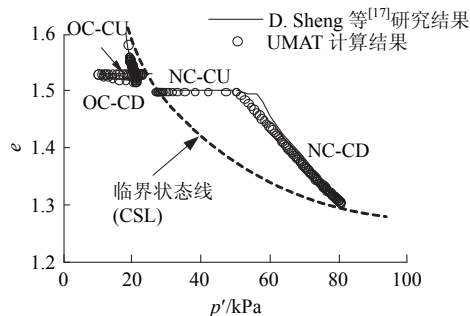
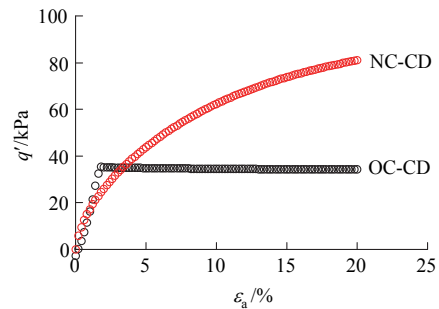


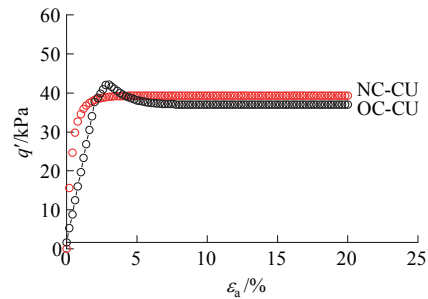
图 5 孔隙比与平均有效应力关系

Fig.5 Relationship between porosity ratio and mean effective stress

由图 4 可见，正常固结土常规压缩应力路径都是从湿侧区域达到临界状态线，而超固结土都是从干侧区域回到临界状态，完全符合剑桥模型的特征，而临界状态线不过原点；与原修正剑桥模型相比，可见本文所考虑黏聚力的改进模型计算结果大于原模型计算结果，这一结果反映了黏聚力对岩土材料强度的影响。由图 5 可见，正常固结试样不排水剪切过程中孔隙比保持不变，排水剪切过程中孔隙比随静水压力增大而减小，体现出剪缩特性；超固结试样在不排水剪切过程孔隙比亦不变，排水剪切过程中孔隙比首先有少许减小即试样发生剪缩，随后孔隙比增大，试样发生剪胀现象，能够一定程度上



(a) 固结排水剪切条件下



(b) 固结不排水条件下

图 6 不同试验条件下偏应力与轴向应变关系曲线

Fig.6 Relationships between deviatoric stress and axial strain under different test conditions

反映超固结土样的应变软化特性。这些特点与理论及范庆来等^[9, 17]研究结果完全一致。通过比较可见本文所建模型和所编 UMAT 程序能够较好地刻画黏聚摩擦型岩土材料的一般力学特性，具有良好的精度和稳定性。

6 试验验证

对取自比利时 HADES 地下实验室的 Boom clay 原状岩样开展了三轴不排水剪切试验。Boom clay 试样的物理力学参数如表 2 所示，试验过程详见于洪丹^[18]的研究。

表 2 Boom clay 主要物理力学参数

Table 2 Main physico-mechanical parameters of Boom clay

初始孔隙比	压缩指数	回弹指数	黏聚力	内摩擦角	前期固结应力
e_0	λ	κ	c/kPa	$\varphi/(\text{°})$	p_c/MPa
0.67	0.078	0.010 8	646.45	18	5.5

应用本文建立的模型模拟 Boom clay 三轴固结不排水试验的应力 - 应变行为，计算结果与试验所测结果比较如图 7 所示。

由图 7 可见，所改进模型计算结果能较好地反映 Boom clay 的非线性与塑性流动特性。

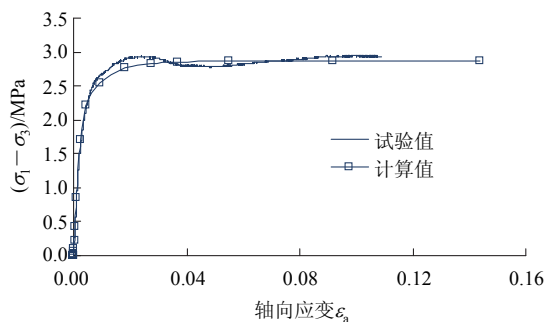


图 7 Boom clay 偏应力 - 轴向应变关系试验与模型计算结果对比

Fig.7 Comparison of relationship between deviatoric stress and axial strain from simulated and experimental results of Boom clay

7 结 论

本文建立了考虑拉压不等效应和黏聚力的修正剑桥模型, 给出了改进模型的 Euler 向后隐式本构积分算法, 较系统地介绍了在 ABAQUS 中开发考虑黏聚力和应力罗德角影响的临界状态模型子程序的具体过程。采用完全隐式最近点回映算法编制了 UMAT 本构程序, 通过数值试验验证了程序的正确性和可靠性, 并通过所编程序模拟 Boom clay 三轴固结不排水剪切试验, 证明了所改进模型计算结果能较好地反映 Boom clay 的非线性与塑性流动特性。在改进模型中考虑损伤和时间效应是下一阶段的工作。

参考文献(References):

- [1] 姚仰平, 侯伟. 土的基本力学特性及其弹塑性描述[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 2 881 - 2 901.(YAO Yangping, HOU Wei. Basic mechanical behavior of soils and their elastoplastic modeling[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 2 881 - 2 901.(in Chinese))
- [2] BORJA R I, LEE S R. Cam-clay plasticity, part I: implicit integration of elastoplastic constitutive relations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, 78(1): 49 - 72.
- [3] BORJA R I. Cam-clay plasticity, part II: implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 88(2): 225 - 240.
- [4] BORJA R I, TAMAGNINI C. Cam-clay plasticity, part III: extension of the infinitesimal model to include finite strains[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 155(1/2): 73 - 95.
- [5] BORJA R I. Cam-clay plasticity, part V: a mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(48/49/50/51): 5 301 - 5 338.
- [6] 孙德安, 姚仰平, 殷宗泽. 初始应力各向异性土的弹塑性模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 222 - 226.(SUN De'an, YAO Yangping, YIN Zongze. An elastoplastic model for soil with initially stress-induced anisotropy[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(3): 222 - 226.(in Chinese))
- [7] LIU M D, CARTER J P. A structured Cam-clay model[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(6): 1 313 - 1 332.
- [8] CARTER J P, BOOKER J R, WROTH C P. A critical state soil model for cyclic loading[C]// Soil Mechanics—Transient and Cyclic Loading. [S.l.]: [s.n.], 1982: 219 - 252.
- [9] 范庆来, 栾茂田, 杨庆. 修正剑桥模型的隐式积分算法在 ABAQUS 中的数值实施[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 269 - 273.(FAN Qinglai, LUAN Maotian, YANG Qing. Numerical implementation of implicit integration algorithm for modified Cam-clay model in ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(1): 269 - 273.(in Chinese))
- [10] 范庆来, 栾茂田, 倪宏革. 循环荷载作用下软基上大圆筒结构弹塑有效应力分析[J]. 水利学报, 2008, 39(7): 836 - 842.(FAN Qinglai, LUAN Maotian, NI Hongge. Elastoplastic effective stress analysis of soft soil foundation of large-diameter cylindrical structure subjected to cyclic loading[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 39(7): 836 - 842.(in Chinese))
- [11] KOHLER R, HOFSTETTER G. A cap model for partially saturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32(8): 981 - 1 004.
- [12] 张锋. 计算土力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007: 31.(ZHANG Feng. Computational soil mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 2007: 31.(in Chinese))
- [13] SHENG D C, SLOAN S W. Load stepping schemes for critical state models[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 67 - 93.
- [14] 康国政. 非弹性本构理论及其有限元实现[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2010: 78 - 100.(KANG Guozheng. Inelastic constitutive theory and its finite element implementation[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2010: 78 - 100.(in Chinese))
- [15] HUANG J S, GRIFFITHS D V. Observations on return mapping algorithms for piecewise linear yield criteria[J]. International Journal of Geomechanics Mechanics, 2008, 8(4): 253 - 265.
- [16] SIMO J C, TAYLOR R L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 48(1): 101 - 118.
- [17] SHENG D, SLOAN S W, YU H S. Aspects of finite element implementation of critical state models[J]. Computational Mechanics, 2000, (6): 185 - 196.
- [18] 于洪丹. Boom clay 渗流 - 应力耦合长期力学特性研究[博士学位论文][D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2010.(YU Hongdan. Study on long-term hydro-mechanical coupled behavior of Belgium Boom clay[Ph. D. Thesis][D]. Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2010.(in Chinese))