

文章编号: 1000-7598 (2012) 06-1816-06

基于下限原理有限元的强度折减法

李春光, 朱宇飞, 刘 丰, 邓 琴, 郑 宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 对于岩土工程中常用的强度折减系数, 其规划问题是非线性的, 不能直接利用线性规划进行求解。基于四边形单元的下限原理有限元法, 根据强度折减系数与超载系数近似符合双曲函数的特点, 通过调整强度参数使得超载系数逼近于 1^[1], 可将边坡稳定性分析中常用的强度折减系数的非线性规划求解转化为线性规划求解问题。分析表明, 采用拟合双曲线插值法求解强度折减系数的计算效率高于常规的二分法及割线法, 且具有较好的收敛性; 该方法能够充分利用当前高效的线性规划算法, 便于工程应用。

关 键 词: 下限分析; 线性规划; 强度折减法; 超载系数; 边坡

中图分类号: O 242.21

文献标识码: A

Evaluation of strength reduction factor by lower bound limit analysis using finite element method

LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, DENG Qin, ZHENG Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: For the strength reduction factor commonly used in geotechnical engineering, its lower limit programming problem is nonlinear and can't be solved directly by linear programming. Based on the lower limit method and the feature of strength reduction factor and overload factor, the strength reduction factor can be obtained by adjusting the shear strength when the overload factor approach to 1, and thus linear programming algorithm can be fully used. It is shown that the fitted hyperbolic curve method is more efficient and has larger convergence range than conventional methods, such as bisection method and secant method. Suggested method can take full advantage of the efficiency of linear programming, and is also suitable for application in engineering.

Key words: lower bound analysis; linear programming; strength reduction method; overload factor; slope

1 引 言

20 世纪 50 年代, Drucker 和 Prager^[2]提出极值原理, 建立了土体极限分析理论; 对于边坡问题, 大多数情况下, 人们关心的不是其失稳过程, 而是其安全系数及其破坏模式。而极限分析理论的最大优点就是回避了工程中最不容易弄清楚的诸如流动法则等本构关系, 直接研究边坡的极限状态, 因而是一种合理而且可行的方法^[3]。

几十年来, 国内外学者在极限分析理论及计算中做了大量的研究。Chen^[4]进一步阐明了极限分析理论在土工问题中的应用; Sloan^[5-6]在前人的基础上, 分别于 1988 和 1989 年提出了基于线性规划的下、上限原理有限元方法。Sutcliffe 等^[7]利用下限法

研究了不同特性节理岩体上条形基础的承载力问题。国内学者如陈祖煜^[8]证明了边坡稳定极限分析的垂直条分法和斜条分法的基础分别是塑性力学下限和上限原理; 李泽等^[9]利用非线性规划对带有应力间断面的岩质边坡的稳定性进行了分析。李亮等^[10]借助于下限原理和线性规划, 应用随机规划的区间概率法求取了边坡承载力的可靠度指标。这些工作都为下限法在岩土工程中的应用奠定了坚实的基础。

在岩土工程的稳定性分析中, 一般采用安全系数来衡量边坡的稳定性, 目前安全系数主要有超载安全系数与强度折减安全系数两类, 但对边坡工程来讲, 最为工程师所接受的还是后者, 亦即基于强度储备概念的安全系数定义^[11]。对于超载系数来

收稿日期: 2011-10-12

基金项目: 973 项目(No. 2011CB013505); 岩土力学与工程国家重点实验室课题(No. O613031C01)。

第一作者简介: 李春光, 男, 1973 年生, 博士, 副研究员, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: cgli@whrsm.ac.cn

说, 可以在下限原理有限元的基础上利用线性规划进行求解, 但对于强度折减系数, 该问题则为一非线性规划问题, 但可以通过调整强度参数使得超载系数逼近于 1, 从而得到强度折减系数^[1], 这样就能充分利用当前高效的线性规划算法来求解强度折减系数。

本文在基于四边形单元的下限原理有限元法的基础上^[12], 根据强度折减系数与超载系数的关系近似符合双曲函数的这一特性, 采用拟合双曲线插值的方法对强度折减系数进行求解, 利用线性规划方法很快地获得了边坡的强度折减系数。

2 下限原理有限元法

2.1 下限原理

对所求区域 V 及其应力边界 S_T 上, 满足以下 3 个条件的应力场 σ_{ij} 称为静力许可应力场:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (1)$$

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \quad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \quad (3)$$

式中: f 为屈服条件; F_i 为作用在单位体积上的体积力向量; T_i 为与 $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$ 相平衡的作用在法向量为 n_j 的应力边界 S_T 上的面力。

下限分析就是在满足静力许可的条件下寻求 T_i 的极限。

为方便起见, 往往把 T_i 写为已知面力分布规律 \bar{T}_i 的倍数, 也即 $\lambda\bar{T}_i$, 比例因子 λ 则称为静力许可载荷因子, 这样, 下限原理就可表达为静力许可载荷因子不大于真实的极限载荷因子^[13], 下限问题可以变为一个等价的约束非线性规划问题:

Max: λ

S.t.:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (4)$$

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}n_j = T_i = \lambda\bar{T}_i \quad (\text{在 } S_T \text{ 上}) \quad (6)$$

对于工程问题, 其静力许可场的构造非常困难, 更不用说极限荷载了。不过随着有限元的出现, 该问题已经可以借助于有限单元法来求解。在对计算区域进行离散后, 取节点应力为未知量, 借助于有限元的插值函数来构造应力场, 并形成平衡条件、屈服条件、边界条件等, 同时允许单元之间产生应

力间断面, 这样就构成了有限自由度的规划问题来求解超载系数或者强度折减系数。

2.2 平衡方程

由于四边形单元计算精度与效率都要优于三角形单元, 故本文计算区域采用四边形离散^[12], 以单元积分意义上的整体平衡取代三角形单元点点平衡, 使平衡方程线性化, 这样既能保持计算精度与求解效率, 又能利用线性规划进行求解。

四边形单元中应力模式采用类似于有限元的线性插值形式^[14]:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_x^i, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_y^i, \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^4 N_i \tau_{xy}^i \quad (7)$$

式中: σ_x^i 、 σ_y^i 、 τ_{xy}^i 为四边形单元节点 i 的应力分量。

把式 (7) 代入式 (4) 可得单元的平衡方程, 即:

$$[B^e]\{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (8)$$

式中: $[B^e]$ 为非线性函数, 使上式在积分意义满足平衡条件^[12], 可得

$$[\bar{B}^e]\{\sigma^e\} = \{\bar{b}^e\} \quad (9)$$

这里

$$[\bar{B}^e] = \iint [B^e] dA$$

$$\{\bar{b}^e\} = \iint \{b^e\} dA$$

这样就得到了基于四边形网格下限原理有限元法的线性平衡方程。

2.3 应力连续性条件

应力连续性条件与经典的下限法一样, 在单元公共边界上的正应力与剪应力分量相等, 可得^[1]:

$$[A_{eq}^d]\{\sigma^d\} = 0 \quad (10)$$

式中: $[A_{eq}^d]$ 为与应力间断线的法向量有关的系数矩阵; $\{\sigma^d\}$ 是应力间断线两边两个单元所对应的 4 个节点的应力分量。

2.4 应力边界条件

在单元边界上边界单元两端的法向应力分量与切向应力分量应分别等于已知值。则离散化后的边界单元的应力约束条件可表示为^[1]

$$[A_{eq}^b]\{\sigma^b\} = \{b_{eq}^b\} \quad (11)$$

式中: $[A_{eq}^b]$ 为与单元边界法向量有关的系数矩阵; $\{\sigma^d\}$ 为单元边界两端节点的应力分量; $\{b_{eq}^b\}$ 为单元边界两端节点的切向和法向荷载向量。

2.5 强度条件

对平面问题, 假设拉正压负, 则 Mohr-Coulomb 屈服准则可表示为

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 \leq 0 \quad (12)$$

式中: c 为材料的黏聚力; φ 为材料的内摩擦角。

用内接正 p 边形去拟合屈服面, 如图 1 所示, 那么每个节点的屈服条件均可用 p 个线性方程代替, 则正多边形第 k 条边表示的限制条件为

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq D, \quad k=1, 2, \dots, p \quad (13)$$

其中

$$A_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{p}\right) + \sin \varphi \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (14)$$

$$B_k = \sin \varphi \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{p}\right) \quad (15)$$

$$C_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{p}\right) \quad (16)$$

$$D = 2c \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \quad (17)$$

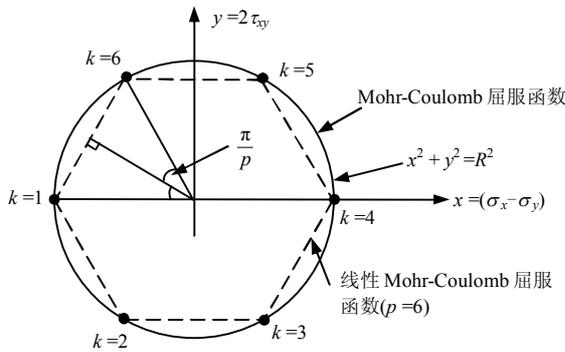


图 1 线性 Mohr-Coulomb 屈服函数(以 $p=6$ 为例)

Fig.1 Linearized Mohr-Coulomb yield function (for example: $p=6$)

3 强度折减系数及超载系数

基于强度储备的安全系数, 即强度折减系数, 它是 Zienkiewicz 等^[3]在土工弹塑性有限元数值分析中首次提出的概念, 其定义为在外荷载保持不变的情况下, 当材料的抗剪强度参数 c 和 φ 分别用其强度参数 c_c 和 φ_c 代替后, 结构将处于临界平衡状态的 K_s , 其中:

$$c_c = \frac{c}{K_s}; \quad \tan \varphi_c = \frac{\tan \varphi}{K_s} \quad (18)$$

在计算 K_s 的过程中, 通常就是寻求一系列 K_i , 这里

$$c_i = \frac{c}{K_i}; \quad \tan \varphi_i = \frac{\tan \varphi}{K_i} \quad (19)$$

使其强度也随之不断调整, 直至系统处于临界平衡状态为止, 此时临界的 K_i 就是所求的 K_s 。

超载安全系数, 其定义为当材料的抗剪强度参数保持不变, 面力 F 和体积力 T 分别用荷载 F_c 和 T_c 代替, 使得结构处于临界平衡状态的 λ_s , 这里

$$F_c = \lambda_s F; \quad T_c = \lambda_s T \quad (20)$$

由第 2 节可知, 超载安全系数求解可归结为线性规划问题, 可利用当前高效的线性规划算法, 但对于岩土工程中常用的强度折减系数, 其规划问题是非线性的, 不能直接利用线性规划进行求解。为此, 本文采用文献[1]建议的方法, 通过调整强度参数使得超载系数逼近于 1, 此时的折减系数即为强度折减系数。

注意到强度折减系数 K 与超载系数 λ 的关系曲线 $g(K, \lambda)$ 具有如下特点, 如图 2 所示:

- (1) 当 K 趋向无穷大时, λ 趋向 0;
- (2) 当 K 趋向某一较小的数时, λ 趋向无穷大。

而双曲线恰好具有这两个特点, 这样, 就可以构造如下的双曲线, 来对强度折减系数进行迭代求解, 本文称之为双曲线法。

$$\lambda = \frac{b}{K - a} \quad (21)$$

式中: a 、 b 为双曲线函数。

4 双曲线法的迭代过程

本文基于强度折减系数 K 与超载系数 λ 的关系曲线特性, 提出的双曲线法迭代过程如下:

- (1) 给定初始的强度折减系数 K_1 和 K_2 , 求出相应的 λ_1 和 λ_2 ;

- (2) 过 (K_1, λ_1) 和 (K_2, λ_2) 的双曲线 $\lambda = \frac{b}{K - a}$ 。

其中

$$a = \frac{\lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad b = \lambda_1 \left(k_1 - \frac{\lambda_1 K_1 - \lambda_2 K_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \quad (22)$$

由 $\lambda = \frac{b}{K - a} = 1$, 得到

$$K_3 = \frac{(1 - \lambda_2) \lambda_1 K_1 - (1 - \lambda_1) \lambda_2 K_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (23)$$

由 K_3 计算出超载系数 λ_3 ，若 $|\lambda_3 - 1| \leq \varepsilon$ 或者 $|K_3 - K_2| \leq \varepsilon$ ，则 $K_s = K_3$ ，终止计算。

(3) $(K_2, \lambda_2) \Rightarrow (K_1, \lambda_1)$ ， $(K_3, \lambda_3) \Rightarrow (K_2, \lambda_2)$ ；返回步骤 2。

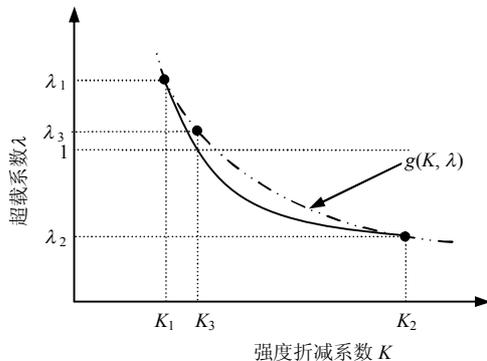


图 2 双曲线法迭代过程

Fig.2 Iteration process of hyperbola method

5 算例

5.1 算例 1

一均质边坡^[15]，如图 3 所示，坡比为 1:2，材料参数如表 1。

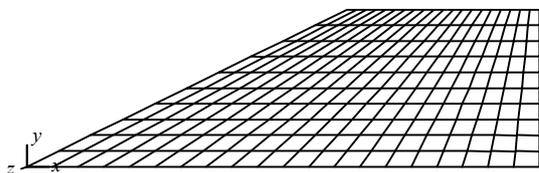


图 3 算例 1 的单元划分

Fig.3 Meshes of example 1

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters

坡高 H/m	重度 γ /(kN/m ³)	黏聚力 c/kPa	内摩擦角 φ /(°)	$\frac{c}{\gamma H}$
10	20	10	20	0.05

采用基于四边形的有限元法（网格划分如图 3 所示），强度条件用等面积内接 15 边形拟合 Mohr 圆，求解得到的强度折减系数为 1.384，这与 Griffiths 用有限元强度折减法得到的 1.400^[15]和 Bishop 与 Morgenstern 用极限平衡法计算得到的 1.380^[16]非常接近，见表 2。

表 3 和图 4 为 3 种数值方法对边坡的强度折减系数的迭代计算过程，从中可以看出，二分法具有线性的收敛阶，且收敛速度非常稳定，但收敛较慢；

割线法具有超线性的收敛阶，但初值偏离真解时收敛较慢，甚至有可能发散；双曲线法也具有超线性的收敛阶，更为显著的是由于它紧紧抓住了强度折减系数与超载系数的曲线特征，所以它在迭代开始时就具有较高的收敛速度，并且具有非常宽的收敛域。

为研究双曲线法的收敛特性，这里简要介绍一下收敛阶的定义^[17]：

对于方程 $x = g(x)$ ，若迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ （初值为 x_0 ）收敛于 x^* ，且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = c \neq 0 \quad (24)$$

式中： $p \geq 0$ ，则称迭代过程 p 阶收敛。当 $p=1$ （这时要求 $0 < c < 1$ ）时称为线性收敛；当 $p > 1$ 时称为超线性收敛；当 $p=2$ 时称为二次收敛（平方收敛）。

可见收敛阶 p 是 $\ln|x^* - x_{k+1}| - \ln|x^* - x_k|$ 关系曲线当 $k \rightarrow \infty$ 时的斜率。对于本例，把收敛误差 $|K_i - K_{i-1}|$ 控制在 10^{-8} 时，计算出该算例的强度折减系数 λ 为 1.384 011 1，该值可以作为 λ^* ，作出的 $\ln|\lambda^* - \lambda_{k+1}| - \ln|\lambda^* - \lambda_k|$ 关系曲线，如图 5 所示，可以看出，随着迭代次数的增加，其收敛速度不断地提高，最后一点的收敛阶为 1.900，超过了割线法的 1.618，并接近切线法的理论收敛阶 2。这里需要说明一下：对于任意非线性方程来说，双曲线法并没有如此高的收敛阶，可以证明，一般情况下该方法仅为线性收敛。

但由于本方法抓住了强度折减系数与超载系数接近双函数的这一主要特征，在初始迭代时就有较高的精度，所以在计算效率上要远高于割线法。此外，还需指出的是，割线法的收敛性与初始值关系很大，在偏离真实值较大时收敛性得不到保证，但本文提出的方法却具有大范围收敛的特性。

图 6 显示的是下限原理有限元法与强度折减有限元法得到的极限应力场。可见两者从规律及量级上是一致的，只不过采用下限原理有限元法求出的仅为一静力许可场，并不是真实应力场，而是众多静力许可应力场中的 1 个而已。此外，还存在明显的应力间断。

表 2 不同方法计算得到的强度折减系数

Table 2 Strength reduction factors by different methods

参数	有限元强度折减法 ^[15]	极限平衡法 ^[16]	本文方法
强度折减系数	1.400	1.380	1.384

表3 3种方法计算精度与收敛速度比较
Table 3 Accuracy and convergence rate of the three methods

迭代次数	收敛误差 $ K_i - K_{i-1} $		
	二分法	割线法	双曲线法
2	6.83×10^{-1}	6.83×10^{-1}	6.83×10^{-1}
3	3.41×10^{-1}	3.26×10^{-1}	5.12×10^{-1}
4	1.71×10^{-1}	3.40×10^{-1}	1.25×10^{-2}
5	8.53×10^{-2}	2.22×10^{-1}	8.95×10^{-4}
6	4.27×10^{-2}	3.69×10^{-2}	3.62×10^{-6}
7	2.13×10^{-2}	1.85×10^{-2}	
8	1.07×10^{-2}	1.78×10^{-3}	
9	5.33×10^{-3}	4.49×10^{-5}	
10	2.67×10^{-3}	1.10×10^{-5}	
11	1.33×10^{-3}	2.16×10^{-6}	
12	6.67×10^{-4}		
13	3.33×10^{-4}		
14	1.67×10^{-4}		
15	8.33×10^{-5}		
16	4.17×10^{-5}		
17	2.08×10^{-5}		
18	1.04×10^{-5}		
19	5.21×10^{-6}		

注：3种方法取相同的强度折减系数初始区间均为[1.2,1.9]。

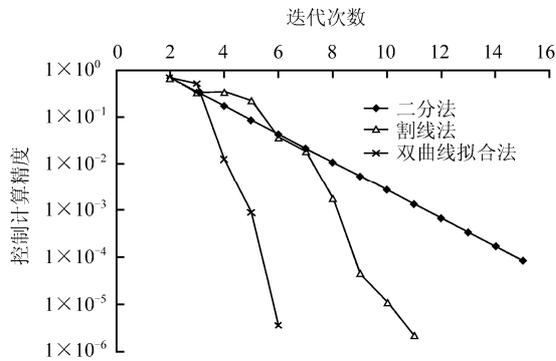


图4 收敛误差随迭代次数的关系

Fig.4 The relationships between iteration number and convergence error

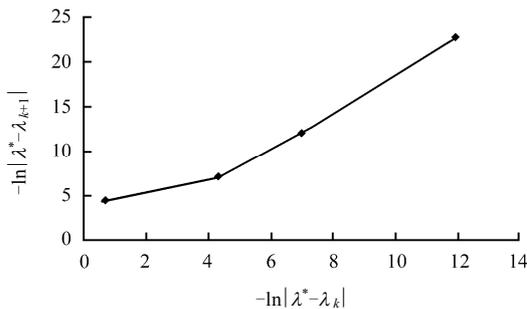
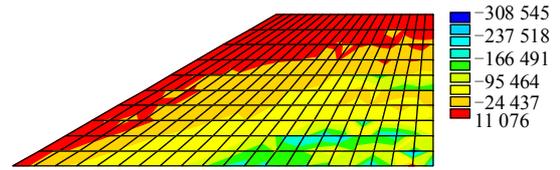
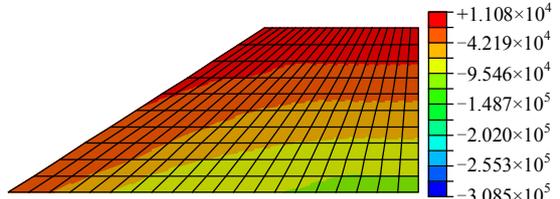


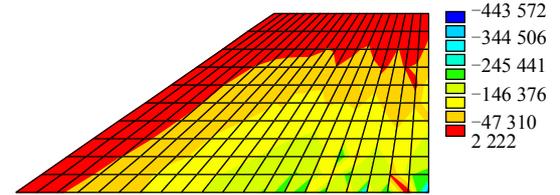
图5 $\ln|\lambda^* - \lambda_{k+1}| - \ln|\lambda^* - \lambda_k|$ 关系曲线
Fig.5 Curve of $\ln|\lambda^* - \lambda_{k+1}| - \ln|\lambda^* - \lambda_k|$



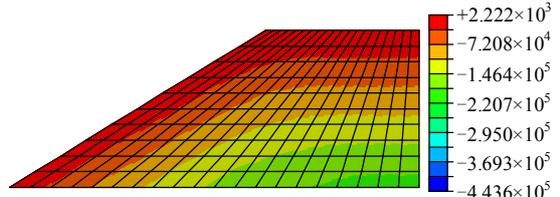
(a) σ_x (下限原理有限元法)



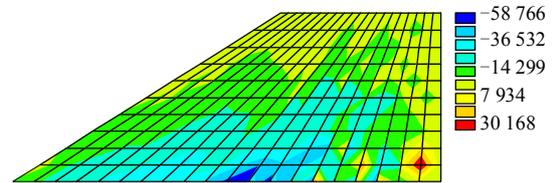
(b) σ_x (强度折减有限元法)



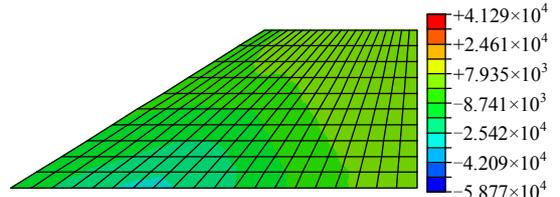
(c) σ_y (下限原理有限元法)



(d) σ_y (强度折减有限元法)



(e) τ_{xy} (下限原理有限元法)



(f) τ_{xy} (强度折减有限元法)

图6 下限原理有限元法与强度折减有限元法计算得到的临界应力场 (单位:MPa)

Fig.6 Stress fields by lower limit analysis and strength reduction method by FEM(unit: MPa)

5.2 算例2

图7显示的是金沙江某水电工程高边坡的网格图,共301个四边形单元。材料参数 $\gamma = 27.5 \text{ kN/m}^3$, $c = 1\ 900 \text{ kN/m}^2$, $\varphi = 56.31^\circ$ 。采用双曲线法得到的强度折减安全系数如表4所示,这里强度折减系数初始区间为[1.5,3.5],CPU采用 Interl Core i7,利用4核计算,线性规划采用内点算法,即便设置收敛

误差 $|K_i - K_{i-1}|$ 为 1×10^{-5} , 迭代仅需8次, 只需40s即可算完, 见表4, 可见该方法具有很高的计算效率和很快的收敛速度。

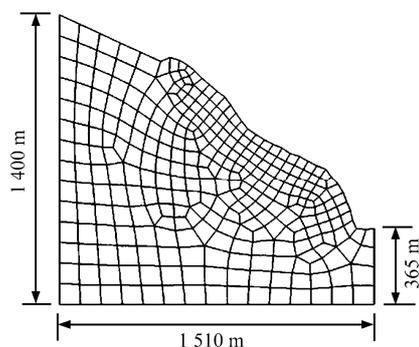


图7 下限元所用的有限元网格

Fig.7 Meshes used by lower limit finite element method

表4 不同计算精度控制的下限法强度折减计算

Table 4 Strength reduction factors of lower limit methods controlled by different accuracies

控制计算精度	$abs(K_i - K_{i-1})$	计算时间/s	迭代次数	强度折减系数
1×10^{-1}	7.10×10^{-2}	26	5	2.583 256
1×10^{-2}	2.47×10^{-3}	30	6	2.580 787
1×10^{-3}	1.88×10^{-5}	36	7	2.580 768
1×10^{-4}	1.88×10^{-5}	36	7	2.580 768
1×10^{-5}	3.84×10^{-9}	40	8	2.580 768

6 结论

与极限平衡法相比, 基于下限原理的极限分析法具有更严谨的力学基础, 且得到的安全系数偏于安全, 更具有实用价值。本文利用下限原理有限元法和线性规划方法, 通过寻求超载安全系数 $\lambda_s = 1$ 时抗剪强度参数所降低的倍数, 计算边坡强度折减安全系数 K_s , 基于强度折减系数 K 与超载系数 λ 的关系曲线特性, 提出了双曲线法的迭代算法。

通过算例对双曲线法与二分法和割线法进行了比较。可以看出:

(1) 双曲线法的计算效率要高于二分法与割线法, 其收敛阶接近于Newton切线法。

(2) 双曲线法具有大范围收敛的优点。

参考文献

[1] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 84-89.

[2] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis on limit design[J]. *Q. Appl. Math.*, 1952, (2): 157-165.

[3] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(11): 1867-1873.

WANG Jun-xing, WANG Han-hui, WU Ya-feng. Stability analysis of soil slope by finite element method with

plastic limit upper bound[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(11): 1867-1873.

[4] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975.

[5] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, 12(1): 61-67.

[6] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1989, 13(3): 263-282.

[7] SUTCLIFFE D J, YU H S, SLOAN S W. Lower bound solutions for bearing capacity of jointed rock[J]. *Computers and Geotechnics*, 2004, 31 (1): 23-36.

[8] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1-11.

CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(1): 1-11.

[9] 李泽, 王均星. 基于非线性规划的岩质边坡有限元塑性极限分析下限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(4): 747-752.

LI Ze, WANG Jun-xing. Lower bound limit study on plastic limit analysis of rock slope using finite elements based on nonlinear programming[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(4): 747-752.

[10] 李亮, 刘宝琛. 边坡极限承载力的下限分析法及其可靠度理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(4): 508-513.

LI Liang, LIU Bao-chen. The lower limit analysis method of slope ultimate bearing capacity and its reliability theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2001, 20(4): 508-513.

[11] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626-628.

ZHENG Hong, LI Chun-guang, LEE C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(5): 626-628.

[12] 李春光, 朱宇飞, 刘丰, 等. 基于四边形网格的下限原理有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(3): 461-468.

LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, et al. Lower bound limit analysis by quadrilateral finite element method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, 31(3): 461-468.

[13] KACHANOV L M. Foundations of the theory of plasticity[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1971.

[14] BATHE K J. Finite element procedures[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[15] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387-403.

[16] BISHOP A W, MORGENSTERN N R. Stability coefficients for earth slopes[J]. *Geotechnique*, 1960, 10(4): 129-150.

[17] KINCAID D, CHENEY W. Numerical analysis: Mathematics of scientific computing[M]. [S. l.]: [s. n.], 1996.