

文章编号: 1000-7598(2012)05-1579-06

土质陡坡降雨侵蚀的数学模型及求解方法

陈亿军^{1,2}, 薛 强¹, 孙可明², 赵 颖¹, 万 勇¹

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点试验室, 武汉 430071; 2.辽宁工程技术大学 力学与工程学院, 辽宁 阜新 123000)

摘 要:建立了土质陡坡降雨侵蚀的数学模型, 模型包括陡坡细沟间坡面流控制方程、变沟宽陡坡细沟流控制方程、陡坡细沟间坡面侵蚀泥沙连续方程及陡坡变沟宽细沟侵蚀泥沙连续方程。通过紊流冲击分布概率确定土壤剥蚀方程, 确定了泥沙源/汇项的表达形式及细沟高程与宽度的表达式。通过有限元和有限差分相结合的方法求解该数学模型, 利用有限单元法对数学模型的水动力方程、运动方程及泥沙连续方程进行空间上的离散, 利用有限差分法解决时间域的问题, 得出了顺序求解的数值计算公式及模型数值求解的具体方法和步骤。

关 键 词: 细沟侵蚀; 沟间侵蚀; 模型; 有限元-有限差分; 边坡侵蚀

中图分类号: TV 141+3

文献标识码: A

A mathematical model for rainfall erosion of steep soil slope and its solution

CHEN Yi-jun^{1,2}, XUE Qiang¹, SUN Ke-ming², ZHAO Ying¹, WAN Yong¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Mechanics and Engineering Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China)

Abstract: A mathematical models for rainfall erosion of the soil steep slope is established, which consists of the control equation of overland flow in inter-rill of soil steep slope, the control equation of water flow in rills of variable groove width of soil steep slope, the continuation equation of sediment in inter-rill of soil steep slope, and the continuity equation of sediment in rills of variable groove width of soil steep slope. Through the probability distribution of turbulent flow, the soil erosion equation is determined. The expressions of sediment source/sink terms and rill height and width are determined. To solve the model, two methods are used in combination. The finite element method is applied to discretize the mathematical model that consist of hydrodynamic equation, the motion equation, and the sediment continuity equation in space; and the finite difference method solves the problem in time domain. In this way, we could obtain the numerical calculation formula and the specific solution to the model.

Key words: rill erosion; inter-rill erosion; model; finite element-finite difference; slope erosion

1 引 言

在降雨条件下, 将边坡侵蚀分为坡面侵蚀(面蚀)和细沟侵蚀, 坡面侵蚀以降雨雨滴击溅侵蚀为主, 细沟侵蚀主要为径流冲刷侵蚀^[1-2]。坡面侵蚀占总侵蚀量的比率随降雨时间呈曲线形式逐渐递减, 细沟侵蚀则逐渐增加; 通过边坡室内模拟冲刷试验得出细沟侵蚀量为坡面侵蚀量的 2~4 倍, 约占边坡总侵蚀量的 70%^[3]。细沟是地面上的一条水流通渠道, 同时兼备坡地上侵蚀产沙源和输沙通道的功能。在侵蚀量大的地方, 细沟沟宽及沟深均变化活跃^[4]。细沟中的集中水流是土壤从地表剥离的原动

力, 同时也是输沙的载体^[5]。细沟中水流深度通常为厘米量级或更浅, 坡度通常很陡, 这样使得侵蚀细沟内的水力学特性与溪流、河流及洋流有很大的不同^[6-7]。不同性质的土壤的面蚀时间不同, 产生细沟侵蚀的时间也不同, 面蚀的稳定值也不同^[8]。尽管一些土质边坡工程, 如高速公路边坡、铁路边坡等的坡面坡度陡(45°), 坡面流在流态特征、侵蚀搬运过程等方面具有自身的特点, 即流态为紊流、泥沙沉淀量少, 但其侵蚀、搬运、沉积过程的基本机制与河流没有本质区别^[9], 可以根据水力学的基本方程结合土质陡坡细沟侵蚀的实际情况, 建立土质边坡细沟侵蚀的动态过程数学模型^[10]。

收稿日期: 2010-10-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 51079143); 武汉市科技攻关计划项目(No. 200860423196); 广东省交通厅重点科技攻关项目(No. 2009GH-KY-03)
第一作者简介: 陈亿军, 男, 1984 年生, 硕士研究生, 主要从事环境岩土工程方面的研究工作。E-mail: chenlijun2131@163.com

Saint Vennat 描述了适合缓坡坡面薄层水流的 Saint Vennat 方程得到了国内外学者的广泛采用,但并不适合陡坡^[11-13];吴长文等^[14]总结了 Yen 和 Emmelt 等由动量守恒得出的坡面连续方程,但方程过于复杂也没有得到广泛的应用。针对 Saint Vennat、Yen 及 Emmelt 等所描述方程的不足,推导了适合陡坡且形式简单、物理意义明确的坡面流控制方程,但没有将边坡侵蚀区分为沟间坡面侵蚀和细沟侵蚀,而只是将坡面作为一个整体的平面考虑,即没有考虑细沟侵蚀;雷廷武等^[10]建立了细沟侵蚀的数学模型,但方程中没有强调坡面的坡度问题,且没有考虑细沟间侵蚀问题,而试验中考虑的坡度均小于 10%^[15]。因此,建立精确描述土质陡坡降雨侵蚀的数学模型十分必要。

2 模型描述

2.1 沟间坡面流控制方程

本文研究的陡边坡细沟侵蚀的沟间侵蚀采用吴长文^[14]的陡坡控制方程,方程如下:

2.1.1 连续性方程

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r h_r}{\partial x} = q_e \cos \gamma \quad (1)$$

式中: x 为笛卡尔坐标 (m); t 为时间 (s); γ 为沟间坡面与地面的夹角 (°); $u_r(x, t)$ 为沟间坡面流的速度 (m/s); $h_r(x, t)$ 为沟间坡面流的高度 (m); q_e 为净雨强度 (mm/h)。

$$q_e = I - V - N \quad (2)$$

式中: $I(t)$ 为降雨强度 (mm/h); $V(t)$ 为植被截流强度 (mm/h); $N(x, t)$ 为坡面入渗强度 (mm/h)。

由式 (2) 知, 式 (1) 可用于裸坡及生态护坡情况。

2.1.2 运动方程

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + g \frac{\partial h_r}{\partial x} = g(s_{0r} - s_{0f}) - \frac{u_r}{h_r} q_e \cos \gamma - \frac{I s_{0r} v_0 \cos \gamma}{h_r} \quad (3)$$

式中: v_0 为降雨流的速度 (m/s); g 为重力加速度 (m/s²); s_{0r} 为细沟间边坡坡度 (m/m); s_{0f} 为细沟间阻力坡度^[9] (m/m); s_{0r} 、 s_{0f} 分别表示为

$$s_{0r} = \sin \gamma \quad (4)$$

$$s_{0f} = \left(\frac{C}{u_r} \right)^2 \frac{1}{h_r} \quad (5)$$

式中: C 为水流阻力系数 (m^{1/2}/s)^[9], 在确定该系

数时考虑植物根系的影响:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (6)$$

式中: f 为 Darcy-Weisbach 水力摩擦系数。

2.2 变沟宽陡坡细沟控制方程

2.2.1 变沟宽陡坡连续性方程

均匀沟宽的一维水动力学方程已经有广泛的讨论和研究^[14]。本文针对沟宽非均匀并动态变化的土质陡坡, 根据流体力学及水动力学及相关学科知识, 由质量守恒原理, 变沟宽陡坡水流连续性方程给出如下:

$$\frac{\partial hw}{\partial t} + \frac{\partial uhw}{\partial x} = q_e w \cos \alpha + h_r u_r \sin \beta \quad (7)$$

式中: $h(x, t)$ 为细沟流的高度 (m); $w(x, t)$ 为细沟流的宽度 (m); $u(x, t)$ 为细沟流的速度 (m/s); α 为细沟流与地面的夹角 (°); β 为沟间流方向与细沟流方向的夹角 (°)。

2.2.2 变沟宽陡坡细沟流运动方程

根据运动力学动量守恒原理, 对 x 方向, 单元体的运动方程可以表达为

$$T + F = \frac{\partial}{\partial t} (\rho uhw dx) \quad (8)$$

式中: F 为作用于单元体内的合力在 x 方向上的分量; ρ 为水的密度 (g/cm³); $\partial(\rho uhw dx)/\partial t$ 为变沟宽细沟流单元体的动量变化率; T 为单位时间内进入单元体的净动量, 计算公式为

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (9)$$

式中: T_1 为单位时间内进入单元体的降雨动量; T_2 为单位时间内进入单元的沟间水流动量; T_3 为单位时间内进入单元体的细沟水流动量。

$$T_1 = \rho I v_0 s_0 w \cos \alpha dx \quad (10)$$

$$T_2 = \rho h_r u_r^2 \cos \beta \sin \beta dx \quad (11)$$

$$T_3 = -\rho \frac{\partial u^2 hw}{\partial x} \quad (12)$$

F 为

$$F = F_e + F_w + \Delta P \quad (13)$$

式中: F_e 、 F_w 、 ΔP 分别为作用于单元体内的摩阻力、水重力、水压力差。

$$F_e = -\rho gh w s_f dx \quad (14)$$

$$F_w = \rho gh w s_0 dx \quad (15)$$

$$\Delta P = -\rho gh w \frac{\partial h}{\partial x} dx - \rho gh^2 \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (16)$$

将式 (9)~(16) 代入式 (8) 中整理得变沟宽陡坡水动力学方程：

$$w \frac{\partial u}{\partial t} + wu \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial hw}{\partial x} = gw(s_0 - s_f) + \frac{Is_0 w \cos \alpha v_0}{h} - \frac{u}{h} q_e w \cos \alpha + \frac{h_r u_r}{h} (u_r \sin \beta \cos \beta - u \sin \beta) \quad (17)$$

式中： s_0 为细沟边坡坡度 (m/m)，且有

$$s_0 = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (18)$$

$z(x,t)$ 为沟底地表高程，在式 (17) 中有

$$s_0 = \sin \alpha \quad (19)$$

s_f 为细沟阻力坡度 (m/m)，其公式为

$$s_f = \left(\frac{C}{u}\right)^2 \frac{1}{h} \quad (20)$$

2.3 陡坡变沟宽细沟侵蚀泥沙连续方程

根据变沟宽陡坡的连续方程可以导出陡坡侵蚀的泥沙连续方程。

2.3.1 沟间泥沙连续方程

$$h_r \frac{\partial c_r}{\partial t} + u_r h_r \frac{\partial c_r}{\partial x} = (\rho - c_r) q_e \cos \gamma + S_{ss} \quad (21)$$

式中： c_r 为沟间坡面流的密度 (kg/m³)； $S_{ss}(x,t)$ 为泥沙源/汇项 (kg·m²·s)

2.3.2 变沟宽细沟泥沙连续方程

$$hw \frac{\partial c}{\partial t} + uhw \frac{\partial c}{\partial x} = (\rho - c) q_e w \cos \alpha + h_r u_r \sin \beta (c_r - c) + S_{ss} w \quad (22)$$

式中： c 为细沟坡面流的密度 (kg/m³)

2.4 模型中泥沙源/汇项的确定

泥沙源/汇是土壤侵蚀领域一个备受关注的问题^[16]，已有文献中有不同的表达形式。在该模型中采用剥离、输沙的耦合公式来确定泥沙源/汇项 S_{ss} 。

(1) 当泥沙含量小于水流输沙能力时，泥沙源/汇项 S_{ss} 可表达为

$$S_{ss} = E \left(1 - \frac{cq}{T_c}\right) \quad (23)$$

式中： q 为单位水流宽 (m²/s)； E 为剥离速率 (kg·m²·s)，在文献[10]中对泥沙源/汇项 S_{ss} 有较为详细的内容及相应文献介绍。本模型中采用由水流的紊动特性计算土壤剥离的模型，根据 Nearing^[17] 的研究， E 的表达式为

$$E = KCP h_1^{\frac{1}{2}} s_f^{\frac{3}{2}} \quad (24)$$

式中： K 为经验系数，可由试验数据确定； P 为土壤剥离的概率； h_1 为水流深度 (m)

T_c 为输沙能力 (kg/(m·s))，其表达式为^[18]

$$\lg T_c = A + \frac{Be^{[a+b \lg \omega]}}{1 + e^{[a+b \lg \omega]}} \quad (25)$$

式中： $a = 0.845$ ； $b = 0.412$ ； $A = -34.47$ ； $B = 38.61$ ； ω 为水力功率 (W)

$$\omega = \rho g s_0 q \quad (26)$$

(2) 当水流的输沙量大于水流的输沙能力 T_c 时，泥沙就开始沉积，沉积速度与泥沙含量有关，可以由下列一阶沉积表达式进行计算^[5]：

$$S_{ss} = -\eta(cq - T_c) \quad (27)$$

式中： η 为一阶经验沉积系数 (1/m)

2.5 细沟高程及宽度的确定

2.5.1 细沟高程确定

由于沟床随时间是非均匀侵蚀，局部的土壤剥离和泥沙沉积会引起局部沟坡的瞬态变化。时间段 dt 内在面积 $w dx$ 上的泥沙量 $S_{ss} w dx dt$ 可以表示为

$$S_{ss} w dx dt = -\rho_b \frac{\partial z}{\partial t} w dx dt \quad (28)$$

式中： ρ_b 为土壤的体积密度 (kg/m³)，亦即有

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_b} S_{ss} \quad (29)$$

对式 (29) 积分有

$$z(x,t) = -\frac{1}{\rho_b} \int S_{ss}(x,t) dt + f_0(x) \quad (30)$$

式中： $f_0(x)$ 为侵蚀过程开始时沟底的初始形态函数；当 $z(x,t) > f_0(x)$ 时，表示沉积过程；当 $z(x,t) < f_0(x)$ 时，表示剥离过程。

2.5.2 细沟宽度确定

细沟的沟宽随时间变化而变化，但在细沟沟宽变化过程中，水流质量没有变。由质量守恒定律，可以得到

$$u_1 w_1 h_1 = u_2 w_2 h_2 \quad (31)$$

式中： u_1 、 u_2 为沉积开始和结束时流体的速度 (m/s)； w_1 、 w_2 为沉积开始和结束时细沟的宽度 (m)； h_1 、 h_2 为沉积开始和结束时水流的深度 (m)。 u_2 、 w_2 、 h_2 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_1 + \Delta u \\ w_2 &= w_1 + \Delta w \\ h_2 &= h_1 + \Delta h \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式中： $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ ，由于沉积的泥沙降低了水的深度，所以有

$$h_2 = h_1 + \zeta \Delta z \quad (33)$$

式中： $0 < \zeta < 1$ 为沉积细沟水深影响因子，联合式 (31) (33) 有

$$w_2 = \frac{u_1 w_1 h_1}{u_2 (h_1 + \zeta \Delta z)} \quad (34)$$

由式 (32)，有

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{u_1}{u_2} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{u_1}{u_1 + \Delta u} = 1 \quad (35)$$

由此可得

$$w_2 = \frac{w_1 h_1}{(h_1 + \zeta \Delta z)} \quad (36)$$

雷廷武等^[10]对细沟高程及宽度变化做了具体的讨论。

3 有限元-有限差分计算方法及过程

模型方程中包含 2 个独立的变量 x 和 t ，求解这些方程需要用到有限元法 (FEM) 或者有限差分法 (FDM) 或者两者相结合的方法。本文采用两者相结合的方法求解，对于空间变量的处理用 FEM，对时间变量用 FDM。Wilson 等^[19]用该方法解决了许多瞬变领域的实际问题和坡面薄层水流控制方程的求解问题。本文需要求解式 (1) (3) (7) (17) (21) (22)。

3.1 有限元法处理空间问题

有限单元法问题有 2 种基本的表达方法：一是找到 1 个数学等价形式的变分方法；二是近似的求解方程，使得加权平均为 0。变分方法仅仅适用于线性的自适应系统^[20]，加权平均法适用于非线性和非自适应系统。在本文中，采用后者中的伽辽金 (Galerkin) 加权剩余法。

以下变量的近似值将用于确定连续方程：

$$\left. \begin{aligned} h &= h_i N_i + h_j N_j \\ h_r &= h_{ri} N_i + h_{rj} N_j \\ w &= w_i N_i + w_j N_j \\ u &= u_i N_i + u_j N_j \\ u_r &= u_{ri} N_i + u_{rj} N_j \\ q_e &= q_{ei} N_i + q_{ej} N_j \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式中： N_i 和 N_j 为线性插值函数。

采用自然坐标系的局部坐标系， l 为局部坐标系， N_i 和 N_j 可以表达为^[21]

$$N_i = (1-l)/2 \quad (38)$$

$$N_j = (1+l)/2 \quad (39)$$

在本文中局部坐标和整体所标一致。对于式 (1) Galerkin's 方法要求：

$$\int_e \left(\frac{\partial h_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r h_r}{\partial x} - q_e \cos \gamma \right) N_i dx = 0 \quad (40)$$

$$\int_e \left(\frac{\partial h_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r h_r}{\partial x} - q_e \cos \gamma \right) N_j dx = 0 \quad (41)$$

将式 (37) 代入式 (39) (40) 写成矩阵形式，通过 MATLAB 编程计算，式 (39) (40) 合并为

$$[C] \left[\frac{\partial h_r}{\partial t} \right] + [H][h_r] - [D][q_e] = 0 \quad (42)$$

式中： $[C] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ； $\left[\frac{\partial h_r}{\partial t} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{ri}}{\partial t} & \frac{\partial h_{rj}}{\partial t} \end{bmatrix}^T$ ； $[H] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4u_{ri} + u_{rj} & u_{ri} + 2u_{rj} \\ -2u_{ri} - u_{rj} & -u_{ri} + 4u_{rj} \end{bmatrix}$ ； $[h_r] = \begin{bmatrix} h_{ri} \\ h_{rj} \end{bmatrix}$ ； $[q_e] = \begin{bmatrix} q_{ei} \\ q_{ej} \end{bmatrix}$ ； $[D] = [C] \cos \gamma$ 。

同理，可对式 (3) (7) (17) (21) (22) 进行空间的离散处理，这里不一一叙述。

3.2 有限差分法处理时间问题

有限单元法解决了方程在空间域的问题。为了得到 1 个完整解，时域分析是必需的，采用有限差分法解决该问题。隐式有限差分格式 Crank-Nicolson scheme (CNS) 和向后差分法 (BDS) 常被采用。本文采用 CNS，式 (42) 变成：

$$2[C] \frac{[h_r]_{t+\Delta t} - [h_r]_t}{\Delta t} + [H][h_r]_{t+\Delta t} + [H][h_r]_t - [D][q_e]_{t+\Delta t} - [D][q_e]_t = 0 \quad (43)$$

同理可对式 (3) (7) (17) (21) (22) 空间离散处理的式子进行 CNS 处理，这里不一一叙述。

3.3 初始条件及求解

本文通过有限单元法和有限差分法对方程进行处理，利用计算机求解上述方程的数值解，求解结构如下：

(1) 输入数据

细沟信息数据：初始条件与边界条件，高程、

宽度、流速、水深及泥沙含量的误差限；

土壤信息数据：抗拉强度及其方差或变差系数等。

(2) 对各参数进行初始化。

(3) 求解根据质量与动量守恒所建立的水力学方程(1)、(3)、(7)、(17)，得到细沟及沟间流速和水深值。

(4) 用式(25)计算出输沙能力。

(5) 计算剥离速率或沉积速率。如果水流载沙量小于其对应的输沙能力，用式(24)计算剥离速率；反之，则用式(27)计算沉积速率。

(6) 用式(21)、(22)，求解输沙连续性方程，得到沟间及细沟泥沙含量。

(7) 计算与前一时间步长相比较(或第1个时间步长与初始值比较)的速度、水深、泥沙含量误差。

(8) 检验误差，如果速度、水深、泥沙含量的误差限中一个或几个大于设定值，则回到第3步进行迭代计算；否则，继续进行下一步。

(9) 由式(30)计算沟底高程变化。

(10) 用式(36)计算细沟宽度的演化。

(11) 用新获取的沟底高程数据代入到式(18)计算细沟沟床坡度。

(12) 检验时间步数。如果达到所需的时间步数和总的时间长度，停止计算；否则，回到第3步，进行下一个时间步长的计算。

4 结 论

(1) 本文针对土质陡坡坡度陡(45°)、土质结构复杂(挖方、客土填方、压实等)等特征，将边坡降雨侵蚀分为坡面侵蚀和细沟侵蚀，并区别沟间坡面与水平地面的夹角 γ 、细沟流与水平面的夹角 α 和沟间流方向与细沟流方向的夹角 β ，建立了土质陡坡降雨侵蚀的数学模型，其中模型中考虑了植被截流强度 V 、坡面入渗强度 N 、有无植被情况下的水力阻力系数 C 、侵蚀细沟流的宽度 w 及侵蚀细沟流的高度 h 随时空的变化对土质边坡侵蚀的影响，该数学模型的建立为解决土质陡坡尤其是高速公路等工程土质陡坡生态护坡前后的降雨侵蚀提供了理论依据。

(2) 该模型在理论上不受坡度的限制，且综合考虑了植被及根系对土质边坡降雨侵蚀的影响，模型中的各个参数可通过室内外边坡降雨侵蚀试验确定，能够对土质陡坡尤其是高速公路土质边坡生态护坡前后的降雨侵蚀做出比较准确的预测和计算。

(3) 土质边坡降雨侵蚀的影响因子很多，本文

考虑了坡度、细沟宽度、高度及植被等几个关键因子，建立的数学模型能够很好地解决如高速公路边坡等土质陡坡降雨侵蚀产流、产沙等方面的问题；而综合考虑其他影响因子(土质、土的压实度等)的数学模型将在后续研究中进一步探讨，且以高速公路土质边坡降雨侵蚀为特例的数值模拟和试验研究，将后续另文发表。

参 考 文 献

- [1] MEYER L D, WISCHMEIER W H. Mathematical simulation of the process of soil erosion by water[J]. *Transactions of the ASAE*, 1969, 12(6): 754 - 758.
- [2] 李海燕, 潘德成. 中国水土流失地区土壤沟蚀的研究进展[J]. *辽宁工程技术大学学报(自然科学版)*, 2009, 28(增刊): 214 - 216.
LI Hai-yan, PAN De-cheng. Research progresses in gully erosion of water and soil erosion region in China[J]. *Journal of Liaoning Technical University (Natural Science)*, 2009, 28(Supp.): 214 - 216.
- [3] 宋伟, 刘普灵, 杨明义. 利用 REE 示踪法研究坡面侵蚀过程[J]. *水科学进展*, 2004, 15(2): 197 - 201.
SONG Wei, LIU Pu-ling, YANG Ming-yi. Study of erosion process by the REE tracer method[J]. *Advances in Water Science*, 2004, 15(2): 197 - 201.
- [4] ELLISON W D. Soil erosion studies part , soil detachment by surface flow[J]. *Agricultural Engineering*, 1947, 28(9): 402 - 405.
- [5] NEARING M A, WEST L T, BROWN L C. A consolidation model for estimating changes in rill erodibility[J]. *Transactions of the ASAE*, 1988, 31(3): 696 - 700.
- [6] 雷廷武, NEARING M A. 侵蚀细沟水力学特性及细沟侵蚀与形态特征的试验研究[J]. *水利学报*, 2000, (11): 49 - 55.
LEI Ting-wu, NEARING M A. Flume experiments for determining rill hydraulic characteristic erosion and rill patterns[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2000, (11): 49 - 55.
- [7] 张凤宝, 杨明义. 基于 ^{7}Be 示踪和细沟沟网分形维数研究坡面土壤侵蚀[J]. *核农学报*, 2010, 24(5): 1032 - 1037.
ZHANG Feng-bao, YANG Ming-yi. Plot-slope soil

- erosion using ~ 7 be measurement and rill fractal dimension[J]. **Journal of Nuclear Agricultural Sciences**, 2010, 24(5): 1032 - 1037.
- [8] 张科利. 坡面细沟侵蚀发生的临界水力条件研究[J]. 水土保持学报, 1998, 4(1): 41 - 46.
ZHANG Ke-li. Critical hydraulic condition of rill erosion on sloping surface[J]. **Journal of Soil and Water Conservation**, 1998, 4(1): 41 - 46.
- [9] MOSS A J. Thin-flow transportation of solids in arid and non-arid areas: a comparison of processes[C]// Proceedings of the Canberra Symposium. Washington D. C.: International Association of Hydrological Sciences Publication, 1979, 128: 435 - 445.
- [10] 雷廷武, 姚春梅, 张晴雯, 等. 细沟侵蚀动态过程模拟数学模型和有限元计算方法[J]. 农业工程学报, 2004, 20(4): 7 - 12.
LEI Ting-wu, YAO Chun-mei, ZHANG Qing-wen, et al. Simulation study of dynamic rill erosion processes: mathematical models and FEM formulation[J]. **Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering**, 2004, 20(4): 7 - 12.
- [11] MORRIS E M. The effect of the small-slope approximation and lower boundary condition on the solutions of the Saint Venant equations[J]. **Journal of Hydrology**, 1978, (40): 31 - 47.
- [12] 沈冰, 沈晋. 坡地水文数学模型研究述评[J]. 水资源与水工程, 1992, (4): 1 - 10.
SHEN Bing, SHEN Jin. Review of hill slope hydrological model research[J]. **Journal of Water Resources and Water Engineering**, 1992, (4): 1 - 10.
- [13] 陆永玲, 魏永霞, 严昌荣, 等. 基于运动波方程的坡面降雨径流模型的应用研究[J]. 东北农业大学学报, 2009, 40(4): 48 - 51.
LU Yong-ling, WEI Yong-xia, YAN Chang-rong, et al. Application of a rainfall and runoff model based on the equation of kinetic wave[J]. **Journal of Northeast Agricultural University**, 2009, 40(4): 48 - 51.
- [14] 吴长文, 王礼先. 陡坡坡面流的基本方程及其近似解析解[J]. 南昌水专学报, 1994, (增刊 1): 142 - 149.
- [15] 姚春梅, 雷廷武, 张晴雯, 等. 细沟侵蚀动态过程模拟室内试验和模型验证研究[J]. 农业工程学报, 2008, 20(5): 55 - 62.
YAO Chun-mei, LEI Ting-wu, ZHANG Qing-wen, et al. Simulation study of the dynamic rill erosion processes: model validation with laboratory experiments[J]. **Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering**, 2008, 20(5): 55 - 62.
- [16] 王瑄, 李占斌, 尚佰晓, 等. 坡面土壤剥蚀率与水蚀因子关系室内模拟试验[J]. 农业工程学报, 2008, 24(9): 22 - 26.
WANG Xuan, LI Zhan-bin, SHANG Bai-xiao, et al. Indoor simulation experiment of the relationship between soil detachment rate and water erosion factor[J]. **Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering**, 2008, 24(9): 22 - 26.
- [17] NEARING M A. A probabilistic model of soil detachment by shallow turbulent flow[J]. **Transactions of the ASAE**, 1991, 34(1): 81 - 85.
- [18] ZIEKIEWICZ, TAYLOR R L. The finite element method, V12: Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity[M]. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [19] WILSON E L, NICKELL R E. Applications of the finite element method to heat conduction analysis[J]. **Nuclear Engineering and Design**, 1996, 4(3): 276 - 286.
- [20] FINLAVSON B A, SCRIVEN L E. The method of weighted residuals—a review[J]. **Applied Mechanics Reviews**, 1966, 19(9): 735 - 748.
- [21] 沈冰, 沈晋. 坡地降雨漫流的有限元模拟[J]. 水利水电技术, 1988, (9): 1 - 6.
SHEN Bing, SHEN Jin. The finite element simulation Overflow sloping rainfall[J]. **Water Resources and Hydropower Engineering**, 1988, (9): 1 - 6.