

文章编号: 1000-7598 (2011)增刊 2-0598-06

基于粒子群算法与混合罚函数法的 有限元优化反演模型及应用

贾善坡^{1,2}, 伍国军³, 陈卫忠^{2,3}(1. 长江大学 城市建设学院, 湖北 荆州 434023; 2. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061;
3. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 岩土工程优化反分析是一个典型的复杂非线性函数优化问题, 采用全局优化算法是解决这个问题的理想途径。针对常规反演方法应用于岩土工程参数反演时搜索效率低的缺点, 结合粒子群算法和遗传算法的特点, 充分考虑二者的互补性, 提出一种效率较高的全局优化算法, 以测点的实测值与计算值建立一种新的评价函数, 将多目标优化问题转化为单目标优化问题, 用混合罚函数法将约束问题变为无约束问题, 构建了一种新的目标函数, 将有限元程序 ABAQUS 作为一个模块嵌入到优化算法程序中, 编制了有限元优化反演分析程序。并给出了应用实例验证了该法的有效性和实用性, 是一种可行的参数反演方法, 可应用于实际工程中复杂岩土介质初始应力场反演、渗流场以及位移反分析。

关 键 词: 混合粒子群算法; 优化反演; 混合罚函数法; 有限元; 岩土工程

中图分类号: TU 452; TP181

文献标识码: A

Application of finite element inverse model based on improved particle swarm optimization and mixed penalty function

JIA Shan-po^{1,2}, WU Guo-jun³, CHEN Wei-zhong^{2,3}

(1. School of Urban Construction, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434023, China; 2. Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China; 3. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The inverse analysis in geotechnical engineering is a typical complicated nonlinear function optimization problem. To solve this problem, the global optimization algorithm is a very good method. In order to offset the disadvantages of low searching efficiency using traditional methods of back analysis, the particle swarm optimization and genetic algorithm are hybridized to construct a global optimization algorithm according to their compatibility and algorithm complementary. A new evaluation function method is established which unites multiobjective function to single objective function according to the actually measures and corresponding calculated results. The mixed penalty function method is adopted to transform constraint condition to unconfined condition and a new objective function is presented. Based on the improved particle swarm optimization, the program of back analysis is coded, in which ABAQUS is embedded as a module in the optimization algorithm. Through a tunnel model as an example, the proposed inverse program is verified; and the results show that this method is a very good inverse analysis method and its efficiency is very good. So the proposed method is a feasible method for back analysis of stress, seepage and displacement in geotechnical engineering.

Key words: improved particle swarm optimization; optimum inversion; mixed penalty function; finite element; geotechnical engineering

1 引 言

随着监控量测技术和现代控制技术的发展和

岩土工程领域提出了基于实测的反演分析方法, 为岩土力学参数和地应力场的获取提供了新的途径。由于岩土材料的不均匀性, 通过试验手段确定岩土力

收稿日期: 2011-03-31

基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (No. 0720135906, No. 51009133); 中国博士后基金项目资助 (No. 20100471516); 湖北省教育厅项目资助 (No. Q20101301); 长江大学科研发展基金项目资助 (No. 801170010110)。

第一作者简介: 贾善坡, 男, 1980 年生, 博士后, 副教授, 主要从事地下工程及油气工程力学方面的研究工作。E-mail: jiashanporsm@163.com

学参数不仅代价高昂而且所得结果往往缺乏代表性, 难以满足数值分析的需要, 因此利用现场监测信息反演岩土力学参数是一种较理想途径并被应用于生产实践中, 日益成为岩土工程信息化设计与施工的核心环节^[1]。

运用数值方法解决岩土工程实际问题, 岩土力学参数是非常重要的。由于难以建立待反演参数与量测信息之间的显式关系, 目前正演优化反分析是岩土工程反分析研究中一个最重要、最实用的研究方向。研究表明, 其目标函数是一个复杂的非线性多峰函数, 传统优化方法往往难以奏效, 采用全局优化算法是较理想地选择^[2-6]。笔者曾将 ABAQUS 软件进行二次开发, 采用 Nelder-Mead 法反演了大岗山水电站地下厂房区的初始地应力场, 取得了较好的反演效果^[7]。近年来, 随着智能化分析方法的发展, 遗传算法和人工神经网络等方法也被应用于参数反演分析中, 但这些方法没有真正的将有限元程序嵌入到相应的算法中, 大多数采用正交设计理论设计不同的反演参数组合, 用有限元计算组建的样本, 采用相应的智能方法进行优化^[8-10]。也有学者开发了有限元优化反演程序, 将有限元正分析程序嵌入到优化算法中, 但是自编有限元程序的功能不及大型有限元商业软件优越, 所以反演分析的功能受到一定的限制, 无法实现复杂本构模型以及多场耦合参数的反演^[11-13]。

由于反演问题的目标函数是一个复杂的非线性多峰函数, 传统优化方法往往难以奏效, 采用全局优化算法是较理想地选择。粒子群算法 (PSO) 自 1995 年被美国学者 Eberhart 和 Kennedy 博士提出以来, 以其算法实现简单、可调参数少及具有全局优化能力等特点, 迅速在许多领域得到了应用。与此同时, 随着计算力学的发展, 已开发了一批专业的商用有限元软件, 如 ABAQUS, 已发展成为功能强大的有限元软件系统, 它拥有丰富和完善的单元库、材料模型库和高效的求解器, 接口的开放性使用户能很方便地扩展程序功能。本文基于自然选择的混合粒子群算法, 编写了岩土力学参数反分析程序, 将 ABAQUS 程序作为一个单独模块嵌入到优化算法程序中, 结合混合罚函数来限制约束条件, 使粒子群算法的寻优速度加快, 迭代次数减少。

2 反演模型

设待反演参数共 m 个, 用向量 \mathbf{X} 表示, 即 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 。对于位移反分析问题, 一般采用测点处的变形作为观测信息; 对于初始应力场反

演问题, 一般采用应力作为观测信息; 对于渗流场反演问题, 一般采用水头或流量作为观测信息。设共有 n 个观测点, 以测点实测值与计算值之间的误差作为目标函数, 则第 i 个测点的目标函数为

$$f_i(\mathbf{X}) = \left(\frac{u_i^c(\mathbf{X}) - u_i^t}{u_i^t} \right)^2 \quad (1)$$

式中: u_i^c 为测点的有限元计算值; u_i^t 为实测值。

由于有 n 个观测点, 故反演问题属于多目标优化问题, 笔者构建如下新的目标函数, 可表示为

$$\phi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha^{f_i^\beta(\mathbf{X})} \quad (2)$$

式中: α 、 β 为常数, $1 < \alpha < 2$; $0 < \beta < 1$; $\omega_i > 0$ 且 $\sum \omega_i = 1$ 。文献[14]证明了 $\phi(\mathbf{X})$ 是 $f_i(\mathbf{X})$ 的严格单调增函数。

反演问题往往很复杂, 需要加一些约束条件作约束优化问题来处理才能保证解的稳定性和惟一, 因此有限元优化反演模型可表示为

$$\left. \begin{aligned} \min \phi(\mathbf{X}), \quad (\mathbf{X} \in R^m) \\ h_i(\mathbf{X}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, l) \\ g_j(\mathbf{X}) \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $h_i(\mathbf{X})$ 为第 i 个等式约束函数; g_j 为第 j 个不等式约束函数。

采用混合罚函数法将上述约束优化问题变成无约束优化问题, 即

$$F(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{X}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k \left\{ \min[0, g_i(\mathbf{X})] \right\}^2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^l h_i^2(\mathbf{X}) \quad (4)$$

式中: r 为惩罚因子, $0 < r < 1$ 。混合法的好处是不需要事先审慎地把初始点选在可行域内, 它能根据初始点的具体情况, 进行自动排项。凡是得到了满足的约束条件均排在障碍项内, 得不到满足的约束条件 (包括等式约束) 均安排在惩罚项内, 分别从边界的内、外逼近最优解。混合法就是通过不断地减小惩罚因子, 进行一轮一轮地无约束搜索, 最后得到的最优解就是单目标带约束问题的最优解。

3 反演步骤与程序实现

反演的目的就是寻找一组参数 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 使目标函数 $F(\mathbf{X})$ 趋于极小, 通常的非线性优化算法需要计算目标函数的导数, 但是本文的目标函数很复杂, 写不出其解析表达式, 这时要计算目标函数的导数就有些困难, 粒子群优化算法是一种非常有效的全局优化方法。

3.1 基于自然选择的粒子群算法

粒子群算法 (PSO) 是一种基于迭代的进化优化工具, 源于对鸟群捕食的行为研究。每个粒子为解空间中的一个解, 它根据粒子自身的飞行经验和同伴粒子的飞行经验来调整自己的飞行; 每个粒子通过自身飞行过程经历过的最好位置和整个群体所经历过的最好位置来不断更新自己, 从而产生新一代群体, 再进入下一次计算, 每次计算结束判断是否达到结束条件, 若达到则计算结束, 否则再产生下一代群体进行计算。

本文将遗传算法中的自然选择机理应用到粒子群算法中, 得到基于自然选择的粒子群算法, 其基本思想为每次迭代过程中将整个粒子群按适应度排序, 用群体中最好的一半的粒子的速度和位置替换最差的一半的位置和速度, 同时保留原来每个个体所记忆的历史最优值。计算步骤如下:

①随机初始化种群中各微粒的位置和速度。

②评价每个微粒的适应度, 微粒通过两个最优解来更新自己, p_{best} 是粒子本身经历过的最优位置, g_{best} 是粒子群经历过的最优位置; 将当前各微粒的位置和适应度储存在各微粒的 p_{best} 中, 将所有 p_{best} 中适应度最优个体的位置和适应度值存储于 g_{best} 中。

③更新每个微粒的速度和位置。

④对每个微粒, 将其适应度值与其经历过的最好位置作比较, 如果较好, 则将其作为当前的最好位置。

⑤比较当前所有 p_{best} 和 g_{best} 的值, 更新 g_{best} 。

⑥将整个粒子群按适应度值排序, 用群体中最好的一半的粒子的速度和位置替换最差的一半的位置和速度, 保持 p_{best} 和 g_{best} 不变。

⑦若满足停止条件 (预设的运算精度和迭代次数), 停止搜索, 否则, 返回③继续搜索。

3.2 程序研制

基于本文的提出方法, 在大型有限元程序 ABAQUS 的基础上, 以 MATLAB 语言为平台, 结合基于自然选择的粒子群算法, 编制了优化反分析程序 Pso-Inverse.m, 此法所能解决反演问题的复杂程度, 完全取决于有限元计算模块。具体实施步骤如下:

①在 MATLAB 程序中设置待反演参数范围以及优化算法的控制精度。

②采用 MATLAB 语言编制基于自然选择的粒子群算法。

③在 MATLAB 程序中调用 ABAQUS 命令流文

件, 并通过 system 命令调用 ABAQUS 进行计算。

④调用 ABAQUS 结果文件, 计算目标函数 $F(\mathbf{X})$ 。

⑤更新 ABAQUS 命令流文件中待反演参数。

反分析程序框图如图 1 所示。

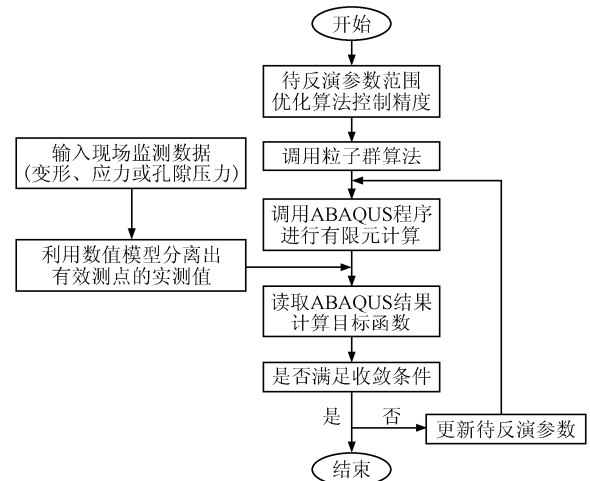


图 1 岩土工程优化反演程序框图

Fig.1 Flowchart of optimization inversion code of geotechnical engineering

4 算例分析

4.1 工程概况

以黏土岩盾构隧道开挖施工过程为例^[15], 衬砌管片内径为 2.0 m, 外径为 2.4 m, 厚 0.4 m, 宽 1 m。计算过程中, 衬砌的弹性模量为 32 GPa, 泊松比为 0.25, 密度取 2 500 kg/m³。盾构机长 3 m, 隧道超开挖半径为 2.445 m。隧道位置处的初始竖向应力为 4.5 MPa, 黏土岩的参数为: 密度为 2 000 kg/m³, 弹性模量为 300 MPa, 泊松比为 0.125, 内摩擦角为 18°, 黏聚力为 0.3 MPa。计算模型及测点分布如图 2 所示。

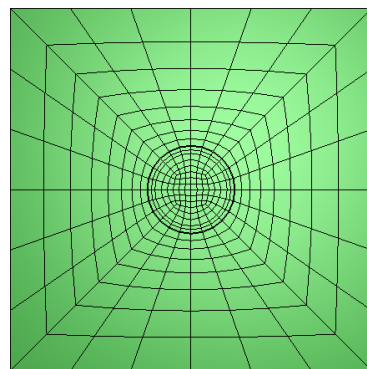


图 2 有限元计算模型
Fig.2 Numerical model

施工过程中要向盾尾空隙进行充填，注浆后浆体的分布与隧道的受扰动程度和范围有关。要对它们进行量化是难以达到的，为此将它们概化为一均质、等厚、弹性的等代层，如图 3 所示。在有限元分析中，正确选定等代层参数非常重要，目前对等代层参数的取值还是经验的、近似的，在有实测位移资料时，可利用实测位移对等代层参数作反分析，以取得较符合实际的计算参数。

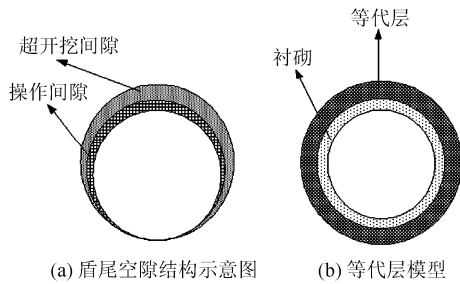


图 3 超开挖等效模型

Fig.3 Equivalent zone of over-excavation

4.2 计算条件

垂直剖面内地应力作用与计算模型的关系如图 4 所示， XOY 为计算模型的水平面坐标系； xoy 为水平面上的侧压力系数坐标系。在垂直剖面内作用的应力为垂向应力 $\sigma_z = \sigma_v$ ，水平应力为 $\sigma_{\bar{H}} = k'\sigma_v$ ，而应力 $\sigma_{\bar{H}}$ 又是水平主应力 σ_{h1} 、 σ_{h2} 以及主应力方向 θ 的函数，即 $\sigma_{\bar{H}} = f(k_x, k_y, \theta)$ ，具体表达式为

$$\sigma_{\bar{H}} = \sigma_{h1} \sin^2 \theta + \sigma_{h2} \cos^2 \theta = k'\sigma_v = (k_x \sin^2 \theta + k_y \cos^2 \theta) \sigma_v \quad (5)$$

垂直平面内任一点的应力 σ_{ij} 是水平侧压力系数 k_x 、 k_y 、 θ 的函数，即

$$\sigma_{ij} = f(k_x, k_y, \theta) \quad (6)$$

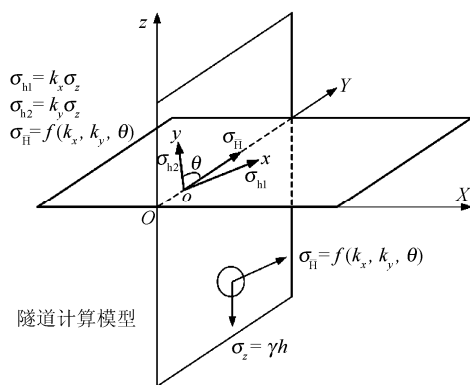


图 4 垂直剖面内地应力作用与计算模型的关系

Fig.4 The relation between calculation model and in-situ stress in vertical section

等代层弹性模量 E_g 的大小可以反映衬砌与围岩之间的相互作用。另外，衬砌的变形也受侧压力系数 k_x 、 k_y 、 θ 的影响，若在衬砌的内部布置应变计，以衬砌的应变监测数据为反演数据，通过反演分析可以获得研究区域地应力场参数 k_h 、 k_H 、 θ 以及 E_g 的最优值。参与反演的测点分布如图 5 所示。

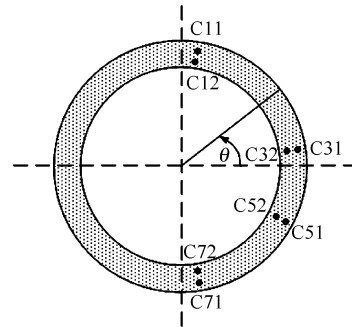


图 5 衬砌测点分布

Fig.5 Measurement points distribution in liner

根据现场实测和实验室的相关试验成果，定义如下约束范围：

$$\left. \begin{aligned} 0.3 \leq k_h \leq 0.8; 0.5 \leq k_H \leq 0.95; k_h < k_H \\ 32^\circ \leq \theta \leq 80^\circ; 0.3 \leq E_g \leq 300 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4.3 反演成果分析

对上述模型进行有限元计算，计算出应变场后，将衬砌内部 8 个测点的应变值作为理论值，见表 1。然后，依据这 8 个“实测点”的应变值通过反演法获得待反演参数 k_h 、 k_H 、 θ 和 E_g 。通过比较，可对本文所提方法的合理性和精度做出判断。

设置种群规模为 20，学习因子 $c_1 = c_2 = 2.0$ ，惯性权重取 0.7，最大迭代次数取为 100，迭代收敛精度 $\varepsilon = 10^{-6}$ ；在目标函数中的权因子 ω_i 均取为 1/8， $\alpha = 1.4$ ， $\beta = 1/5$ 。 α 、 β 的大小主要是为了防止计算过程中发生数值溢出，可以根据具体情况取不同的值，对计算结果没有影响。优化算法程序迭代了 68 次，反演求解迭代过程曲线如图 6 所示。

测点的理论值与反演值的比较如表 1 所列。由表可以发现，测点应变的反演结果与理论值非常接近，相对误差均控制在 0.02% 以内；待反演参数的反演结果见表 2，反演结果与真实值接近，相对误差控制在 5% 以内。相比于其他几个参数， k_h 的反演结果较差，相对误差约为 4.87%，这也反映了该参数对衬砌的变形不太敏感，由于粒子群算法是一种全局性优化算法，容易获得全局区域内的最优解，通过反演结果的相对误差也可以定性的判断各参数对于衬砌变形的敏感度。由此可知，本文提出的优

化反演算法全局搜索能力较强,反演参数的精度较高,可为地下工程围岩力学参数和地应力参数的确定提供了有效的途径。

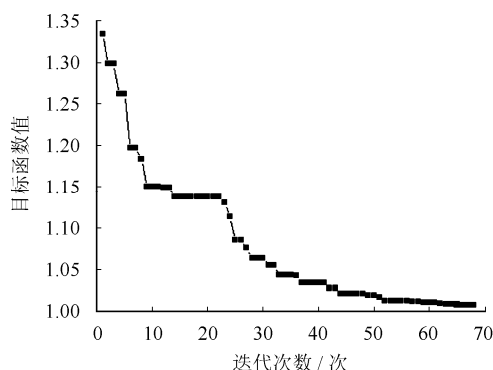


图6 目标函数值变化趋势图

Fig.6 Iteration process curve of back analysis

此外,也可以利用本模型进行渗流场反演,以孔隙压力或流量为反演数据,可以反演出岩土介质的渗透系数和孔隙度。

表1 应变理论值和反演计算值的比较

Table 1 Comparison between theoretical and numerical strain

测点	理论值/ 10^{-6}	反演值/ 10^{-6}	误差/%
C11	508.2	508.105 1	0.018 7
C12	301.1	301.105 5	0.001 8
C31	353.6	353.646 8	0.013 2
C32	611.7	611.636 8	0.010 3
C51	465.2	465.184 1	0.003 4
C52	695.2	695.186 8	0.001 9
C71	511.1	511.071 3	0.005 6
C72	303.1	303.080 1	0.006 6

表2 待反演参数设置与反演结果

Table 2 Initial setting and numerical results of undetermined parameters

反演参数	反演区间	反演结果	真实值	相对误差%
k_n	0.3~0.8	0.713 1	0.68	4.867 6
k_{tt}	0.5~0.95	0.872 5	0.89	1.966 3
$\theta /(^{\circ})$	32.0~80	32.741 1	32.70	0.125 7
E_g / MPa	0.3~300	7.532 2	7.50	0.429 3

5 结 论

(1) 结合粒子群算法和遗传算法各自的优点,将自然选择机理应用到粒子群算法中构造混合算法,结合混合罚函数法,基于测点实测值和计算值构造出一种新的目标函数,可保证搜索到全局最优解的同时,又加快算法的收敛速度。

(2) 将 ABAQUS 程序作为一个模块嵌入优化

算法程序中,提出了改进粒子群算法与有限元联合反演法。通过算例对反演问题进行求解,结果表明,所提出的混合算法具有良好全局搜索能力和较快的收敛速度。

(3) 正演分析采用 ABAQUS 求解器,而非自编的有限元程序,大大减轻了工作量。在 ABAQUS 高效的内核求解器的辅助下,本文提出的方法能解决反演问题的复杂程度,完全取决于有限元计算模块,可应用于复杂岩体初始应力场反演、渗流场、黏-弹塑性位移反分析以及损伤反分析。

参 考 文 献

- [1] 贾善坡. Boom Clay 泥岩渗流应力损伤耦合流变模型、参数反演与工程应用[博士论文 D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2009.
- [2] DENG J H, LEE C F. Displacement back analysis for a steep slope at the Three Gorges Project site[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, 38: 259—268.
- [3] XIANG Zhi-hai, GUNTER Swoboda, CEN Zhang-zhi. Identification of damage parameters for jointed rock[J]. *Computers and Structures*, 2002, 80: 1429—1440.
- [4] DENG De-sheng, DUC Nguyen-Minh. Identification of rock mass properties in elasto-plasticity[J]. *Computers and Geotechnics*, 2003, 30: 27—40.
- [5] MICHELE Calvello, RICHARD J Finno. Selecting parameters to optimize in model calibration by inverse analysis[J]. *Computers and Geotechnics*, 2004, 31: 411—425.
- [6] JUN S Lee, Il-Yoon Choi, Hee-Up Lee, Hee-Hyun Lee. Damage identification of a tunnel liner based on deformation data[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2005, 20: 73—80.
- [7] 贾善坡, 陈卫忠, 谭贤君, 等. 大岗山水电站地下厂房区初始地应力场 Nelder-Mead 优化反演研究[J]. *岩土力学*, 2008, 29(9): 2341—2348.
- [8] JIA Shan-po, CHEN Wei-zhong, TAN Xian-jun, et al. Nelder-Mead algorithm for inversion analysis of in-situ stress field of underground powerhouse area of Dagangshan Hydropower Station[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(9): 2341—2348.
- [8] 易达, 陈胜宏, 葛修润. 岩体初始应力场的遗传算法与

- 有限元联合反演法[J]. 岩土力学, 2004, 25(7): 1077—1080.
- YI Da, CHEN Sheng-hong, GE Xiu-run. A methodology combining genetic algorithm and finite element method for back analysis of initial stress field of rock masses[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(7): 1077—1080.
- [9] 倪绍虎, 肖明, 王继伟. 改进粒子群算法在地下工程反分析中的运用[J]. 武汉大学学报(工学版), 2009, 42(3): 326—330.
- NI Shao-hu, XIAO Ming, WANG Ji-wei. Application of modified particle swarm optimization to back analysis of underground engineering[J]. **Engineering Journal of Wuhan University**, 2009, 42(3): 326—330.
- [10] 李晓龙, 王复明, 李晓楠. 岩土工程弹塑性反分析的改进粒子群算法[J]. 采矿与安全工程学报, 2009, 26(1): 50—54.
- LI Xiao-long, WANG Fu-ming, LI Xiao-nan. Improved particle swarm optimization for elastoplastic back analysis in geotechnical engineering[J]. **Journal of Mining & Safety Engineering**, 2009, 26(1): 50—54.
- [11] 沈新普, 岑章志, 徐秉业. 求解岩土工程弹塑性参数辨识问题的正则化最小二乘法数值格式[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(1): 66—71.
- SHEN Xin-pu, CEN Zhang-zhi, XU Bing-ye. Numerical scheme for solving elasto-plastic identification problem of material properties in geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1995, 17(1): 66—71.
- [12] MAHNKEN R, STEIN E. Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal directions[J]. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 1997, 147(1): 17—39.
- [13] 吕爱钟, 蒋斌松. 岩石力学反问题[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1998.
- [14] 刘华伟, 陈耀元, 叶莹. 多目标优化的新方法——幂加权和法及数值仿真[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 31(5): 835—838.
- LIU Hua-wei, CHEN Yao-yuan, YE Ying. New method of multi-objective optimization—Sum of weighted power and numerical emulator[J]. **Journal of Wuhan University of Technology**, 2007, 31(5): 835—838.
- [15] 贾善坡, 陈卫忠, 于洪丹, 等. 泥岩隧道施工过程中渗流场与应力场全耦合损伤模型研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(1): 19—26.
- JIA Shan-po, CHEN Weri-zhong, YU Hong-dan, et al. Study on seepage-stress coupling damage model of Boom Clay during tunnel excavation and construction[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(1): 19—26.
-
- 上接第 597 页
- and Soil Mechanics**, 2006, 27(2): 299—303.
- [12] 赵尚毅, 郑颖人, 时为民, 等. 用有限元法强度折减法求边坡稳定性安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(4): 343—346.
- ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis of safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(4): 343—346.
- [13] 徐中华, 王卫东. 敏感环境下基坑数值分析中土体本构模型的选择[J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 258—264.
- XU Zhong-hua, WANG Wei-dong. Selection of constitutive models for numerical analysis of deep excavation in close proximity to sensitive properties[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(1): 258—264.
- [14] 刘一杰, 王建华, 陈锦剑, 等. 多级梯次联合围护基坑开挖对环境的影响分析[J]. 地下空间与工程学报, 2009, 12(5): 1816—1820.
- LIU Yi-jie, WANG Jian-hua, CHEN Jin-jian, et al. Analysis of environmental influence of multi-echelon joint supported excavation[J]. **Chinese Journal of Underground Space and Engineering**, 2009, 12(5): 1816—1820.
- [15] 刘国彬, 王卫东, 刘建航, 等. 基坑工程手册(第二版)[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.