

文章编号: 1000-7598(2011)07-2211-08

Hoek-Brown 准则的主应力回映算法及其二次开发

陈培帅¹, 陈卫忠¹, 贾善坡^{1,2}, 杨建平¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2. 长江大学 城市建设学院, 湖北 荆州 434023)

摘 要: 在弹塑性模型数值实现的过程中, 需要进行应力更新的回映算法。针对三维应力空间回映算法在奇异点收敛性方面的不足, 提出主应力空间的回映算法, 讨论了算法实现过程的应力空间转化问题, 分析了应力更新过程中确定回映区域的方法, 建立了相应的一致性刚度矩阵。基于大型有限元软件 ABAQUS 提供的用户材料子程序 UMAT 接口, 利用 Fortran 编程语言, 实现了 Hoek-Brown 准则主应力空间的隐式积分算法, 利用开发的模型, 进行了岩石常规三轴压缩试验的数值模拟, 通过与 ABAQUS 内部的 Mohr-Coulomb 准则计算结果的对比, 验证了模型和程序的可行性和准确性。

关 键 词: 霍克-布朗本构模型; ABAQUS; 用户材料子程序; 主应力空间回映算法

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

Stress return mapping algorithm of Hoek-Brown criterion in principal stress space and its redevelopment

CHEN Pei-shuai¹, CHEN Wei-zhong¹, JIA Shan-po^{1,2}, YANG Jian-ping¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Urban Construction, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434023, China)

Abstract: In the course of implementing elastoplastic model in the FEM, it is necessary to carry out the process of stress return mapping algorithm. It may be not converging at singular points in three-dimensional space. The transforming method in principal stress space is put forward to overcoming this shortcoming. Also, the process of determining the region of return mapping is analyzed. At last, the consistent stiffness matrix is deduced. Based on the implicit algorithm in principal stress space, the UMAT subroutine of the Hoek-Brown model is developed in ABAQUS with the Fortran programming language. Through the example of triaxial compression test, it is easy to verify the feasibility and accuracy of this method by comparing the result with Mohr-Coulomb criterion in ABAQUS.

Key words: Hoek-Brown criterion; ABAQUS; UMAT; return mapping algorithm in principal stress space

1 引 言

岩土工程稳定性分析一般采用 Mohr-Coulomb 准则(简称 M-C 准则)或者 Drucker-Prager 准则(简称 D-P 准则)等屈服准则作为衡量岩土体破坏的标准, 这些准则的强度包线都是线性的, 很多已有的稳定性分析成果和经验都是建立于这些准则之上的^[1-3]。事实上, 岩土材料的强度包线并非呈线性, 对于岩体工程而言, 采用非线性的强度包线更符合实际。

Hoek-Brown 准则(简称 H-B 准则)是 Hoek 等人于 1980 年提出的非线性强度准则^[4], 由于该准则

综合考虑了岩块和结构面的强度以及岩体结构等多种因素的影响, 能够反映岩体的非线性破坏特征, 较好地解决了 M-C 强度准则在低应力区不太适用和受拉破坏处理上的困难, 并已建立了一套比较完善的参数确定方法, 因而 H-B 准则更适宜于描述岩体的破坏特征, 并在岩体工程中得到了广泛的应用^[5-7]。

在有限元数值模拟中, H-B 模型尚未得到广泛的应用, 这是由于 H-B 模型存在棱线和尖点处的奇异点, 在这些奇异点处导数不连续, 再加上 H-B 准则的非线性特征, 导致数值实现存在一定的难度。为解决收敛性问题, Wan^[8]利用圆滑函数对 H-B 准则的奇异点进行圆滑处理, 并提出了数值实现的方

收稿日期: 2010-02-01

基金项目: 国家高技术研究发展专项经费(863计划)(No. 2007AA11Z108); 中国科学院“西部行动计划高新技术”项目(No. KGX2-YW-506)。
第一作者简介: 陈培帅, 男, 1985 年生, 硕士研究生, 主要从事隧道及地下工程施工及围岩稳定方面的工作。E-mail: chenpeishuai@foxmail.com

法。Crisfield^[9]利用 D-P 准则对奇异点进行估量运算，解决导数不连续问题。然而这些方法的计算结果同经典的 H-B 模型的结果又有一定的误差，本文论述 H-B 模型主应力空间的隐式积分算法，并以大型有限元软件 ABAQUS 为平台，采用 Fortran 语言编制了 UMAT 用户材料子程序，通过常规三轴压缩试验的数值模拟验证了程序的精确性和有效性。

2 H-B 破坏准则

H-B 准则是 Hoek 等通过对大量岩石三轴试验资料和岩体现场试验成果的统计分析，并综合考虑了岩体结构、岩块强度、应力状态等多方面的影响，而得出的岩体破坏经验公式：

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ci} \left(s - m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} \right)^a \quad (1)$$

式中： σ_1 、 σ_3 分别为破坏时的最大和最小有效主应力，采用岩土工程中的符号惯例，以压应力为正； σ_{ci} 为岩石的单轴抗压强度； m_b 、 a 、 s 均为经验性参数， a 反映材料的非线性程度，当 $a=1$ 时，H-B 准则转化为线性强度准则； m_b 为破裂的岩性参数，与颗粒的咬合程度有关，随着破损程度的增加而减小； a 、 s 为与岩体特征有关的参数， s 与岩样中存在的断裂程度有关，是岩石黏聚力的代表，对于完全无破损的岩块，它的值是 1，对于高度破损的岩石，它的值趋近于 0，其数值由下式确定：

$$\left. \begin{aligned} m_b &= m_i e^{(GSI-100)/(28-14D)} \\ s &= e^{(GSI-100)/(9-3D)} \\ a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} (e^{-GSI/15} - e^{-20/3}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： GSI 为 Hoek 等提出的地质强度指标^[10] (geological strength index)，其值取决于岩体结构、岩块嵌入状态和岩体中不连续面质量等因素，也可由岩体的 RMR 分值确定。

取塑性势函数与屈服函数的表达式一致，即

$$g = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ci} \left(s_g - m_g \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} \right)^{a_g} \quad (3)$$

当式中的参数与屈服函数中对应的参数相等时，即 $a=a_g$ ， $m=m_g$ ， $s=s_g$ ，则为相关联流动；反之则为非相关联流动。

3 主应力空间的隐式积分算法

在数值实现的过程中，应力更新是核心的环节之一，应力更新算法的选取同计算误差的大小以及

平衡迭代收敛的速度有直接的联系，目前主要的算法有两种：显式算法和隐式算法。显式算法的稳定性是有条件的，必须在计算时恰当地控制积分步长，否则将导致比较大的计算误差。相对而言，隐式算法是无条件稳定的，本文采用目前常用的隐式向后欧拉积分算法，实现计算过程中的应力更新。贾善坡等^[11]详细论述了算法的方法和步骤，如图 1 所示。其基本原理是：首先是弹性预测阶段，假设增量步的应变增量全部为弹性应变，计算出应力更新后的数值；其次是塑性修正阶段，检查弹性预测阶段的应力更新数值是否满足屈服条件，若不满足屈服条件，则无需进行修正，反之则对应力进行修正，使应力返回到屈服面。

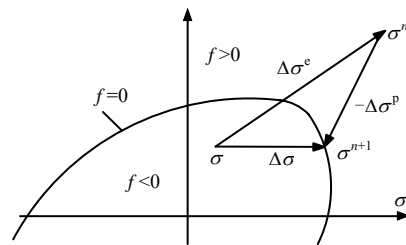


图 1 回映算法的原理

Fig.1 The principle of return mapping algorithm

在应力更新过程中需要求屈服函数的一阶导以及塑性势函数的一阶导和二阶导，H-B 屈服准则是以主应力的形式描述的，因而相对于三维应力空间，在主应力空间实现这些求导过程更为简便^[12]。对于各向同性问题，应力更新和刚度矩阵的计算可以不考虑所采用的坐标系统，这是因为在回映过程中，剪应力始终为 0，主应力的方向不会改变，在主应力空间求出更新值之后，根据之前的方向矩阵将应力、应变和一致性刚度矩阵再转化到三维应力空间。下面详细论述主应力空间 H-B 准则隐式积分算法的实现方法。

2.1 试探应力的求解及应力空间的转化

假定增量步开始时应力为 σ^n ，当前增量步的应变增量为 $\Delta \epsilon_n$ ，设弹性应变增量等于总应变增量，即塑性应变增量为 0，计算弹性试探应力 σ^tr ，即

$$\sigma^tr = \sigma^n + D \Delta \epsilon_n \quad (4)$$

构造方向矩阵 H ，将试探应力通过方向矩阵 H 转化到主应力空间，如下式：

$$\begin{bmatrix} \sigma^tr & 0 \\ 1 \times 3 & 1 \times 3 \end{bmatrix} = H \sigma^tr = H \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

将求出的 $\bar{\sigma}_1^r$ 和 $\bar{\sigma}_3^r$ 代入式 (1), 若 $f \leq 0$, 则无需进行塑性修正, 弹性试探应力即为更新的应力值, 若 $f > 0$, 则需要下一步的塑性修正, 在塑性修正的过程中, 需要利用弹性刚度矩阵, 由于是在主应力空间进行回映计算, 所以只需要利用刚度矩阵中对应主应力的分量, 即下式的 \bar{D} :

$$D = \begin{bmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \quad (6)$$

\bar{D} 3×3 3×3
 0 3×3 3×3

2.2 确定回映区域

在研究中, 我们考虑的是各向同性问题, 因而只需要研究屈服面的六分之一, 研究区域的应力点满足 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 如图 2 所示的区域。

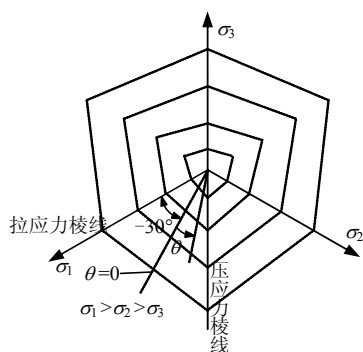


图 2 垂直于静水轴的横截面在 π 平面投影
 Fig.2 Projection of the cross-section which is perpendicular to hydrostatic axis on plane of π

如图 3 所示, 应力回映区域有 4 种形式:

- ①回映到面; ②回映到压应力棱线 l_1 , 即 $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$; ③回映到拉应力棱线 l_2 , 即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$; ④回映带尖点处, 即 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 。

根据弹性试探应力, 从而确定回映区域分为以下几个步骤:

(1) 判断是否需要回映到尖点处, 如果不满足回映到尖点的条件, 则转到第 2 步;

(2) 直接回映到屈服面上;

(3) 分析第 2 步求出的应力更新值;

①若 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 说明采用的回映到面的算法是正确的, 直接进行一致性刚度矩阵的求解;

②若 $\sigma_2 \geq \sigma_1$, 说明采用的回映到面上的算法是不正确的, 需要回映到压应力棱线 l_1 , 即在回映迭代的过程中始终保持 $\sigma_1 = \sigma_2$;

③若 $\sigma_3 \geq \sigma_2$, 说明采用的回映到面上的算法是不正确的, 需要回映到拉应力棱线 l_2 , 即在回映迭代的过程中始终保持 $\sigma_2 = \sigma_3$ 。

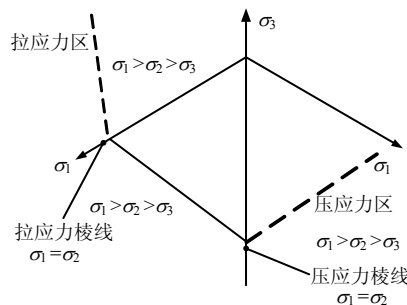


图 3 回映区域的划分

Fig.3 Division of the return mapping region

2.3 应力更新

在应力更新过程中, 需要用到屈服函数的一阶导数 \bar{f}_σ 以及塑性势函数的一阶导数 \bar{r} 和二阶导数 \bar{c} , 这在主应力空间很容易求解:

$$\bar{f}_\sigma = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \{k \ 0 \ -1\}^T \quad (7)$$

$$\bar{r} = \frac{\partial g}{\partial \bar{\sigma}} = \{k_g \ 0 \ -1\}^T \quad (8)$$

$$\bar{c} = \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\sigma}^2} = \begin{bmatrix} \frac{dk_g}{d\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 1 + am_b \left(s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^{a-1} \\ k_g &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} = 1 + a_g m_g \left(s_g - m_g \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^{a_g-1} \\ \frac{dk_g}{d\sigma_1} &= (1 - a_g) \frac{a_g m_g^2}{\sigma_{ci}} \left(s_g - m_g \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^{a_g-2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

如图 4 所示, 取屈服面上一点 σ^{n+1} 作为应力回映的初始值, 回映的目标就是在屈服面上不断移动 σ^{n+1} , 使其满足应力迭代收敛的条件。按照正交化法则, σ^{n+1} 处应力塑性修正方向的理论值为

$$\bar{u} = \bar{D}\bar{r} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} (1-\nu)k_g - \nu \\ \nu k_g - \nu \\ \nu k_g - 1 + \nu \end{Bmatrix} \quad (11)$$

则 σ^{n+1} 处应力塑性修正方向在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 应力空间的斜率的理论值为

$$j_1 = \frac{\bar{u}_3}{\bar{u}_1} = \frac{\nu k_g - 1 + \nu}{(1-\nu)k_g - \nu} \quad (12)$$

在一个迭代步中, 连接 σ^{n+1} 和 σ^n 的斜率, 即塑

性修正方向在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 应力空间斜率的计算值为

$$j_2 = \frac{\sigma_3^{n+1} - \sigma_3^n}{\sigma_1^{n+1} - \sigma_1^n} \quad (13)$$

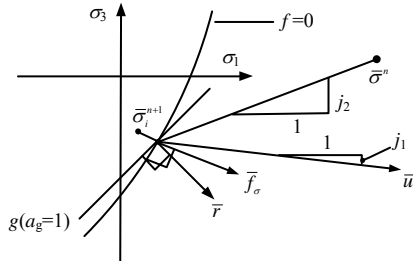


图 4 应力更新示意图
Fig.4 Sketch of stress update

令 $Q = j_2 - j_1$ ，则迭代收敛的条件为： $Q = 0$ ，而初始的 σ_1^{n+1} 一般是不满足此收敛条件的，采用 Newton-Raphton 方法进行迭代计算，对 Q 在 $\sigma_{1,i}^{n+1}$ 处进行 Taylor 展开：

$$Q = Q(\sigma_{1,i}^{n+1}) + \frac{dQ(\sigma_{1,i}^{n+1})}{d\sigma_{1,i}^{n+1}} \Delta\sigma_{1,i}^{n+1} = 0 \quad (14)$$

由上式可得

$$\sigma_{1,i+1}^{n+1} = \sigma_{1,i}^{n+1} - \frac{Q(\sigma_{1,i}^{n+1})}{Q'(\sigma_{1,i}^{n+1})} \quad (15)$$

当满足下式的迭代收敛条件时，退出迭代步：

$$|\sigma_{1,i+1}^{n+1} - \sigma_{1,i}^{n+1}| < TOL \quad (16)$$

式中： TOL 为迭代收敛误差，本程序实现过程中取 TOL 为 1×10^{-5} 。

将满足迭代条件的 $\sigma_{1,i}^{n+1}$ 代入 $f = 0$ ，求解第三主应力：

$$\sigma_{3,i}^{n+1} = \sigma_{1,i}^{n+1} - \sigma_{ci} \left(s - m_b \frac{\sigma_{1,i}^{n+1}}{\sigma_{ci}} \right)^a \quad (17)$$

中间主应力通过下式进行求解：

$$\bar{\sigma}^{n+1} - \bar{\sigma}^n = \zeta \bar{u} \quad (18)$$

式中： $\zeta = \frac{\sigma_1^{n+1} - \sigma_1^n}{u_1}$ ，则有：

$$\sigma_{2,i}^{n+1} = \zeta u_2 + \sigma_{2,i}^n \quad (19)$$

2.4 求解一致性刚度矩阵

一致性刚度矩阵不影响应力更新的最终结果，但与整体平衡迭代的收敛速率有直接的联系，在三维应力空间中，一致性刚度矩阵需要奇异于塑性应变的修正方向，其求解式为

$$D^{con} = D^c - \frac{D^c r (f_\sigma)^T D^c}{(f_\sigma)^T D^c r} \quad (20)$$

式中： D^c 为修正的弹性刚度矩阵，且有：

$$D^c = T D \quad (21)$$

其中修正矩阵为

$$T = \left(I + \Delta\lambda D \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right)^{-1} \quad (22)$$

上面的一致性刚度矩阵的求解公式只实用于面回映的情况，不适合于线回映和尖点回映。如式(22)所示，求解修正矩阵 T 的过程中，需要求解塑性势函数的二阶导，在三维应力空间中，这个求解的过程相当复杂，而在主应力空间中，求解要相对简单的多，如式(9)所示。

2.4.1 面回映的一致性刚度矩阵

首先计算修正矩阵 T 中对应正应力的分量：

$$\bar{T} = T_{1-3,1-3} \quad (23)$$

对应的塑性乘子为

$$\Delta\lambda = \frac{\|\Delta\bar{\sigma}^p\|}{\|\bar{D}\bar{r}\|} \quad (24)$$

从而得到：

$$\bar{T} = \left(I_{3 \times 3} + \Delta\lambda \bar{D} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} \right)^{-1} \quad (25)$$

然后求解修正矩阵 T 对应剪应力分量的部分 $\bar{T}_G = T_{4-6,4-6}$ ，其求解过程更为简便：

$$\bar{T}_G = \left(I_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta\sigma_1^p - \Delta\sigma_2^p}{\sigma_1^{n+1} - \sigma_2^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\sigma_1^p - \Delta\sigma_2^p}{\sigma_1^{n+1} - \sigma_2^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta\sigma_1^p - \Delta\sigma_2^p}{\sigma_1^{n+1} - \sigma_2^{n+1}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (26)$$

至此，可以得到修正矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} \bar{T} & 0 \\ 0 & \bar{T}_G \end{bmatrix} \quad (27)$$

将 T 代入式(21) 求出弹性刚度矩阵的修正值，相应面回映的一致性刚度矩阵可以求得

$$D^{con} = D^c - \frac{D^c r f_\sigma^T D^c}{f_\sigma^T D^c r} \quad (28)$$

式中: $f_{\sigma} = [\bar{f}_{\sigma}^T \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $r = [\bar{r}^T \ 0 \ 0 \ 0]^T$

2.4.2 线回映的一致性刚度矩阵

相对于面回映而言, 线回映的修正矩阵需要进行一些修改, 其对应正应力的分量为

$$\bar{T}_i = \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{D}} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} + \Delta\lambda_n \bar{\mathbf{D}} \frac{\partial^2 g_n}{\partial \sigma^2} \right)^{-1} \quad (29)$$

式中: $\frac{\partial^2 g_n}{\partial \sigma^2}$ 为压应力区或者拉应力区对应的塑性势函数的二阶导。

压应力区对应的区域满足 $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$, 则

$$\bar{r}_n = \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = [0 \ k_g \ -1]^T \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial \sigma^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dk_g}{d\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

拉应力区对应的区域满足 $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$, 则

$$\bar{r}_n = \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = [k_g \ -1 \ 0]^T \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial \sigma^2} = \begin{bmatrix} \frac{dk_g}{d\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

回映到线时, 塑性应变增量的方向可以表示为两个相邻势函数面的法向量的线性组合:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Delta\lambda \bar{\mathbf{r}} + \Delta\lambda_n \bar{\mathbf{r}}_n \quad (34)$$

当回映到压应力线时

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_1^p \\ \Delta \varepsilon_2^p \\ \Delta \varepsilon_3^p \end{bmatrix} = \Delta\lambda \begin{bmatrix} k_g \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta\lambda_n \begin{bmatrix} 0 \\ k_g \\ -1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

得到塑性乘子

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta \varepsilon_1^p}{k_g}, \quad \Delta\lambda_n = \frac{\Delta \varepsilon_2^p}{k_g} \quad (36)$$

当回映到拉应力线时, 有:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_1^p \\ \Delta \varepsilon_2^p \\ \Delta \varepsilon_3^p \end{bmatrix} = \Delta\lambda \begin{bmatrix} k_g \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \Delta\lambda_n \begin{bmatrix} k_g \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

得到塑性乘子 $\Delta\lambda = -\Delta \varepsilon_3^p$, $\Delta\lambda_n = -\Delta \varepsilon_2^p$, 代入式子 (29) 即可求得线回映修正矩阵的正应力分量。

$\bar{\mathbf{T}}_G$ 的表达方式和面回映相同, 如式 (26)。从而得到修正矩阵 \mathbf{T} , 代入式 (21) 求得弹性刚度矩阵的修正值:

$$\mathbf{D}^c = \mathbf{T} \mathbf{D} \quad (38)$$

类似于面回映的情况, 定义垂直于势函数线方向向量的任意向量, 则线回映的一致性刚度矩阵必须奇异于这个向量, 参照文献[9], 一致性刚度矩阵的表达形式为

$$\mathbf{D}^{\text{con}} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{n}}^g)^T}{(\bar{\mathbf{n}})^T (\bar{\mathbf{D}}^c)^{-1} \bar{\mathbf{n}}^g} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{G}}^c \end{bmatrix} \quad (39)$$

式中: $\bar{\mathbf{D}}^c$ 和 $\bar{\mathbf{G}}^c$ 分别为 \mathbf{D}^c 左上角和右下角的 3×3 矩阵; $\bar{\mathbf{n}}$ 和 $\bar{\mathbf{n}}^g$ 分别为对应回映的棱线的屈服函数对应的方向向量和势函数对应的方向向量。

压应力棱线满足 $\sigma_1 = \sigma_2$, 即

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 - \sigma_{ci} \left(s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a \end{bmatrix} \quad (40)$$

对应的屈服函数和势函数的方向向量分别为

$$\bar{\mathbf{n}} = [1 \ 1 \ k]^T \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{n}}^g = [1 \ 1 \ k_g]^T \quad (42)$$

拉应力棱线满足 $\sigma_2 = \sigma_3$, 即

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 - \sigma_{ci} \left(s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a \\ \sigma_1 - \sigma_{ci} \left(s - m_b \frac{\sigma_1}{\sigma_{ci}} \right)^a \end{bmatrix} \quad (43)$$

对应屈服函数和势函数的方向向量分别为

$$\bar{\mathbf{n}}_2 = [1 \ k \ k]^T \quad (44)$$

$$\bar{\mathbf{n}}_2^g = [1 \ k_g \ k_g]^T \quad (45)$$

2.4.3 点回映的一致性刚度矩阵

若应力回映到尖点处, 则一致性刚度矩阵必须

垂直于任意过尖点的势函数面的法向方向，由 H-B 势函数面特征得

$$D^{con} = 0 \tag{46}$$

2.5 回映结果转换到三维应力空间

利用之前的方向转化矩阵 H 将计算的更新值转换到三维应力空间：

$$\sigma = H^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}^{tr} & 0 \\ & 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \tag{47}$$

$$D_{xyz}^{con} = (H^{-1})^T D^{con} H^{-1} \tag{48}$$

4 尖点回映的条件

在分析尖点回映的条件之前，先引入一个边界面的概念，为讨论方便，采用线性的屈服准则（棱线是直线而非曲线）进行分析，如图 5 所示。向量 \bar{u}^p 和 \bar{l} 组成的面为 1/6 屈服面的一部分， l 为棱线，其方向向量为 \bar{l} ，取棱线上任一点应力为对象，其对应的塑性应变的增量方向即过该应力点的塑性势函数的法向方向为 \bar{r} ，主应力空间的塑性修正方向为 $\bar{u}^p = \overline{D\bar{r}}$ ，对于线性屈服准则而言对应棱线上所有应力点的塑性修正方向 \bar{r}^p 是相同的，从而棱线上应力点的塑性修正方向构成了一个过棱线的边界面，如图中向量 \bar{l} 与 \bar{n}_{2-1} 组成的面所示， \bar{n}_{2-1} 的含义见下文定义。

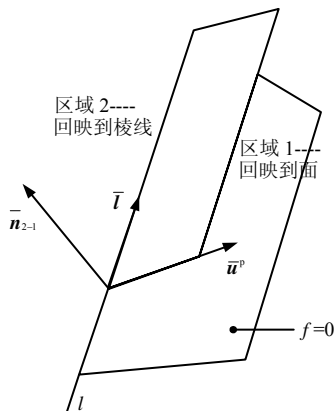


图 5 边界面示意图

Fig.5 Sketch diagram of boundary surface

根据试探应力的位置和边界面可以确定应力回映的区域：

- (1) 落在边界面与屈服面之间的点需要回映到面上；
 - (2) 落在边界面一侧的点需要回映到棱线上。
- 采用数学方法进行分析：边界面的法向量为

$\bar{n}_{2-1} = \bar{u}^p \times \bar{l}$ ，取棱线上任一点 $\bar{\sigma}_i$ ，弹性试探应力为 $\bar{\sigma}^{tr}$ ，定义方向 $(\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i)$ ，则有：

- ①若 $\bar{n}_{2-1} \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) \leq 0$ ，对应第 1 种情况，回映到面。
- ②若 $\bar{n}_{2-1} \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) > 0$ ，对应第 2 种情况，回映到棱线。

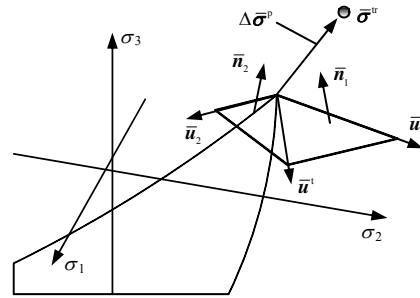


图 6 尖点回映的边界面

Fig.6 Boundary surface of apex

定义尖点处的两个边界面

③过尖点并且平行于静水压力轴的塑性应变的增量方向 \bar{r}_1 ，对应的塑性修正方向为 $\bar{u}^1 = \overline{D\bar{r}_1}$ 。

④过尖点并且平行于压应力平面 ($\sigma_1 = \sigma_2$) 的塑性应变的增量方向 \bar{r}_1 ，对应的塑性修正方向为 $\bar{u}_1 = \overline{D\bar{r}_1}$ 。

⑤过尖点并且平行于压应力平面 ($\sigma_2 = \sigma_3$) 的塑性应变的增量方向 \bar{r}_2 ，对应的塑性修正方向为 $\bar{u}_2 = \overline{D\bar{r}_2}$ ，则 $\bar{n}_1 = \bar{u}^1 \times \bar{u}_1$ ，表示在尖点处由 \bar{u}^1 和 \bar{u}_1 定义的边界面的法向量，当 $\bar{n}_1 \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) > 0$ 时回映到棱线 l_1 ； $\bar{n}_2 = \bar{u}_2 \times \bar{u}^1$ 表示在尖点处由 \bar{u}^1 和 \bar{u}_2 定义的边界面的法向量，当 $\bar{n}_2 \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) > 0$ 时回映到棱线 l_2 。

由于尖点是 l_1 和 l_2 的交点，可以设定尖点回映的条件为

$$\bar{n}_1 \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) > 0 \text{ 且 } \bar{n}_2 \cdot (\bar{\sigma}^{tr} - \bar{\sigma}_i) > 0 \tag{49}$$

5 UMAT 二次开发

ABAQUS 提供了用 FORTRAN 语言编写的子程序接口，供用户二次开发之用，UMAT 子程序具有以下强大的功能^[12-15]：

- (1) 可以定义材料的本构关系，使用 ABAQUS 材料库中没有包含的材料进行计算，扩充程序功能；
- (2) 几乎可以用于力学行为分析的任何分析过程，几乎可以把用户材料属性赋予 ABAQUS 中的任何单元；

(3) 可以和用户子程序“USDFLD”联合使用，通过“USDFLD”重新定义单元每一物质点上传递到 UMAT 中场变量的数值。

当 ABAQUS 调用用户子程序时，会把当前的 STEP 和 INCREMENT 利用用户子程序的两个实参 KSTEP 和 KINC 传给用户子程序，从而实现了 ABAQUS 主程序与 UMAT 的相互衔接，已知第 n 步结果开始第 $n+1$ 增量步计算的过程如下：

(1) 初始化 $n+1$ 步的外力向量 $F_{n+1} = F_n + \Delta F$ ，同时初始化节点的位移向量 $U_{n+1} = U_n$ ；

(2) 开始结构的整体平衡迭代，先计算结构的残余应力 $F_{n+1}^{res} = F_{n+1} - F^{int}$ ，其中 F^{int} 为结构内力，然后由一致性刚度矩阵形成整体刚度矩阵 K 求解更新的节点位移增量 $\Delta U_{n+1} = K^{-1} F^{res}$ ，从而计算出应变的增量 $\Delta \epsilon_{n+1}$ ，然后开始检查整体平衡迭代的收敛性：如果 $F_{n+1}^{res} > TOL$ ，则不收敛，进入第 3 步的计算；否则进入第 4 步；

(3) 开始应力更新，这一步通过 UMAT 子程序实现，将上一步计算出的应变增量 $\Delta \epsilon_{n+1}$ 传入子程序，计算出更新后的应力和一致性刚度矩阵，然后转入第 2 步进行新一轮的迭代；

(4) 增量步结束，更新 $n+1$ 步的位移 $U_{n+1} = U_n + \Delta U_{n+1}$ 。

6 算 例

基于开发的 UMAT 用户子程序，对室内常规岩石力学试验进行有限元模拟，并与 ABAQUS 内嵌的 Mohr-Coulomb 模型的计算结果进行比较，验证子程序的计算效果。为方便结果对比，本算例的参数采用非相关联流动法则。如图 7 所示，根据试验数据，拟合出材料的参数： $E = 34.8 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.25$ ； $a = 0.5$ ， $s = 0.1512$ ， $m = 2.725$ ， $\sigma_{ci} = 230 \text{ MPa}$ ； $c = 21.569 \text{ MPa}$ ， $\phi = 35.42^\circ$ 。

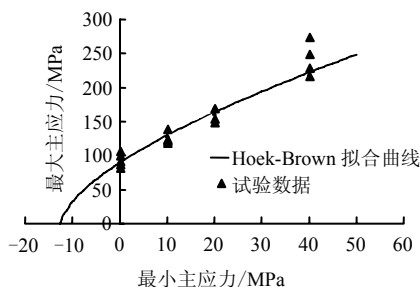


图 7 H-B 模型拟合曲线
Fig.7 Fitting curve of H-B model

基于上述参数，进行了常规三轴压缩试验的数值模拟，圆柱体高度为 100 mm，直径为 50 mm，

沿模型垂直方向施加竖向位移，根据模型的轴对称性质，采取减缩积分的一次轴对称单元 (CAX4R) 进行分析，模型如图 8 所示。

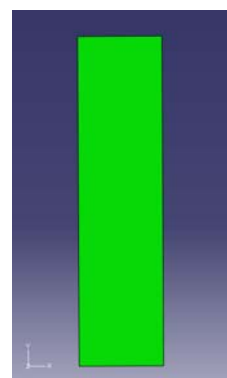


图 8 圆柱体有限元模型
Fig.8 Finite element model of cylinder

从图 9~11 的计算结果可以发现，H-B 模型与 M-C 模型的计算结果相差不大，不同围压情况下，H-B 模型的屈服应力与 M-C 模型相比，有 3 种情况：前者大于后者，如图 9 所示；前者非常接近于后者，如图 10 所示；前者小于后者，如图 11 所示。这是因为 H-B 模型为非线性的强度包络线，而 M-C 模型为线性强度包络线，对于同一种岩石材料，两者的强度包络线可能有相交的情况。

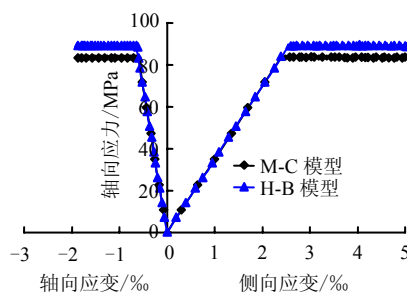


图 9 无围压情况下的应力-应变曲线
Fig.9 Stress-strain curves with no confining pressure

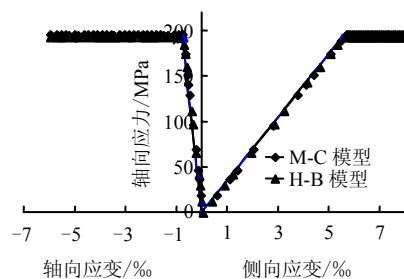


图 10 围压为 30 MPa 情况下的应力-应变曲线
Fig.10 Stress-strain curves with confining pressure of 30 MPa

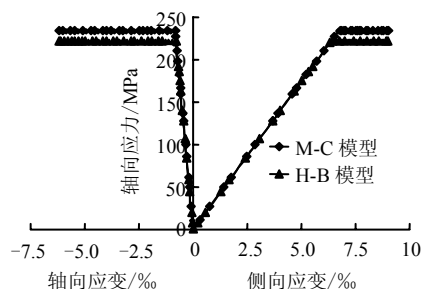


图 11 围压为 40 MPa 情况下的应力-应变曲线
Fig.11 Stress-strain curves with confining pressure of 40 MPa

7 结 语

本文提出了 H-B 准则主应力空间的隐式积分算法, 解决了棱线和尖点处难以收敛的问题, 同时也解决了很多研究中圆滑函数修正法或 D-B 估量法导致的模型误差的问题。依托 ABAQUS 软件平台, 编制了 UMAT 用户子程序, 弥补了 ABAQUS 本构模型的一个空白, 通过常规三轴压缩试验的数值模拟, 对比了 H-B 模型与 M-C 模型的计算结果, 表明 H-B 模型与 M-C 模型在受压情况下的计算结果比较接近, 两者的屈服应力大小有交替现象, 验证了 H-B 模型的非线性性质, 很好地验证了程序的准确性和有效性。

参 考 文 献

- [1] 严春风, 徐健, 陈彦峰, 等. 岩体霍克-布朗经验强度准则参数随机特征分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(5): 497-502.
YAN Chun-feng, XU Jian, CHEN Yan-feng, et al. Probabilistic analysis on hoek brown criterion parameters for rockmass[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, 18(5): 497-502.
- [2] 吴顺川, 金爱兵, 高永涛. 基于广义霍克-布朗准则的边坡稳定性强度折减法数值分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(11): 1975-1980.
WU Shun-chuan, JIN Ai-bing, GAO Yong-tao. Numerical simulation analysis on strength reduction for slope of jointed rock masses based on generalized Hoek-Brown failure criterion[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(11): 1975-1980.
- [3] 解联库, 杨小聪, 刘庆林, 等. 基于霍克-布朗破坏准则的采场空区稳定性分析[J]. 有色金属, 2008, 60(3): 109-111.
XIE Lian-ku, YANG Xiao-cong, LIU Qing-lin. Stability analysis of stope goaf based on Hoek-Brown failure criterion[J]. *Nonferrous Metals*, 2008, 60(3): 109-111.
- [4] HOEK E, BROWN E T. Empirical strength criterion for rock masses[J]. *Journal of Geotech. Eng.*, 1980, 106: 1013-1035.
- [5] 赵坚, 李海波. 摩尔-库仑和霍克-布朗强度准则用于评估脆性岩石动态强度的适用性[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 171-176.
ZHAO Jian, LI Hai-bo. Estimating the dynamic strength of rock using Mohr-Coulomb and Hoek-Brown criteria[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, 22(2): 171-176.
- [6] SHARAN S K. Exact and approximate solutions for displacements around circular openings in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock[J]. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2005, 42: 542-549.
- [7] 林杭, 曹平, 李江腾, 等. 基于 Hoek-Brown 准则的三维边坡变形稳定性分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(11): 3656-3660.
LIN Hang, CAO Ping, LI Jiang-teng, et al. Deformation stability of three-dimensional slope based on Hoek-Brown criterion[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(11): 3656-3660.
- [8] WAN R G. Implicit integration algorithm for Hoek-Brown elastic-plastic model[J]. *Comput. Geotech.*, 1992, 14:
- [9] CRISFIELD M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol. 2: advanced topics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.
- [10] HOEK E, BROWN E T. Practical estimates of rock mass strength[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1997, 34(8): 1165-1186.
- [11] 贾善坡, 陈卫忠, 杨建平, 等. 基于修正 Mohr-Coulomb 准则的弹塑性本构模型及其数值实施[J]. 岩土力学, 2010, 31(7): 2051-2058.
JIA Shan-po, CHEN Wei-zhong, YANG Jian-ping, CHEN Pei-shuai. An elastoplastic constitutive model based on modified Mohr-Coulomb criterion and its numerical implementation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(7): 2051-2058.
- [12] JOHAN C, LARS D. An exact implementation of the Hoek - Brown criterion for elasto-plastic finite element calculations[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, 45(6): 831-847.
- [13] 杨曼娟. ABAQUS 用户材料子程序开发及应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2005.
- [14] 范庆来, 栾茂田, 杨庆. 修正剑桥模型的隐式积分算法在 ABAQUS 中的数值实施[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 269-273.
FAN Qing-lai, LUAN Mao-tian, YANG Qing. Numerical implementation of implicit integration algorithm for modified cam-clay model in ABAQUS[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(1): 269-273.
- [15] 岑威钧, 朱岳明. 基于 ABAQUS 的土石料本构模型二次开发及其应用[J]. 水利水电科技进展, 2005, 25(6): 78-81.
CEN Wei-jun, ZHU Yue-ming. ABAQUS-based secondary development of constitutive model for earth rockfill materials and its application[J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 2005, 25(6): 78-81.