

文章编号: 1000-7598(2011)01-0237-07

地下工程锚固界面力学模型及其时效性研究

伍国军¹, 褚以惇², 陈卫忠^{1,3}, 王永刚^{4,5}

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2. 中交第二公路勘察设计研究院有限公司, 武汉 430056;
3. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061; 4. 同济大学 土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092;
5. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 地下工程锚固体接触界面的流变力学特性是锚固体产生时效性的重要因素。针对地下工程长期稳定性分析中常采用的锚固界面法向硬接触和切向黏结滑移突变常导致计算不收敛的困惑, 建立了锚固界面法向刚度服从指数分布的软接触型式, 并提出剪切面的非线性流变本构模型, 解决了计算难以收敛的问题。该模型考虑了法向应力对剪切流变的影响, 可以更真实地反映锚固界面流变的力学过程。将建立的锚固界面力学模型植入 ABAQUS 软件, 并应用于地下工程的锚固时效性分析。研究成果表明: 地下工程锚固界面产生的剪切流变导致锚杆应力增大, 并使得预应力锚杆峰值的位置随着时间发生变化, 且有向锚根转移的趋势。研究成果可为地下工程锚固的可靠性分析提供理论依据。

关 键 词: 锚固; 界面力学; 本构模型; 时效性

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

Constitutive model of anchorage interface in underground engineering and its time-effect analysis

WU Guo-jun¹, CHU Yi-dun², CHEN Wei-zhong^{1,3}, WANG Yong-gang^{4,5}

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. Second Highway Consultants Co. Ltd., China Communications Construction Corporation, Wuhan 430056, China; 3. Research Center of Geotechnical & Structural Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China; 4. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 5. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The rheological property of anchorage interface is one of important problems of anchorage time-effect in underground engineering. Aiming at the defects of hard contact formulation in normal direction and discontinuity from bond to slip in tangential direction when analyzing long-term stability of underground engineering, a contact formulation which is an exponential softened pressure-overclosure relationship in normal direction and a continuous nonlinear constitutive model in tangential direction are proposed. The model solves the problem of converging hardly and reflects the process of shear rheological behavior truly and reasonably because of its consideration of normal stress. By the further development of ABAQUS code, the nonlinear rheological model of anchorage interface is applied to analyzing time-effect of anchorage in underground engineering. The main achievements are conducted as follows: anchor stress will increase with shear rheology of anchorage interface, the location of anchorage peak stress will change and move towards the end of anchor with the lapse of time. The research results provide the theoretical basis for deeply researching the reliability of anchorage in underground engineering.

Key words: anchorage; interface mechanics; constitutive model; time-effect

1 引 言

众所周知, 锚固系统在宏观上由锚杆杆体、锚固剂材料和基体 3 种介质组成, 锚杆与基体的相互作用是通过它们之间的接触界面作为媒介的。通常

情况下, 锚杆与岩土体这两种材料的性质差异较大, 接触面上变形不一致, 因此, 锚固界面力学机制及其模型的研究就显得尤为重要。如何正确地分析接触面上的受力变形机制、剪切破坏发展趋势、荷载传递过程, 并在计算中加以正确的模拟, 是锚固分

收稿日期: 2010-05-06

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (No. 40772184, No. 51009133); 国家自然科学基金重大国际合作项目 (No. 50720135906); 国家重点基础研究发展计划 (973) 项目 (No. 2009CB724603)。

第一作者简介: 伍国军, 男, 1977 年生, 博士, 助理研究员, 主要从事隧道及地下工程研究方面的工作。E-mail: gjwu@whrsm.com

析研究中的关键点和难点^[1]。在地下工程中,由于围岩体的蠕变,势必影响到锚固界面的力学特性,进而影响到锚固工程的效果与安全,因此,开展岩体锚固接触界面的流变力学特性及时效性研究就显得尤为重要。

关于岩体锚固界面的力学特性研究,国内外学者日益重视,并取得了较多的研究成果:Yazici等^[2]提出了黏结介质强度理论模型。他们认为,锚杆黏结强度首先取决于锚杆和砂浆界面压力产生的摩擦力,而界面的压力与砂浆的剪胀和径向位移有关,岩体刚度、砂浆强度、锚杆与砂浆界面摩擦系数提高及钻孔直径减小均可提高锚固黏结强度。Hyett^[3]在实验室基础上提出了介质破坏的摩擦-剪胀力学机制,分析了围压、径向剪胀位移及采矿引起的应力重分布等因素对强度的影响,讨论了砂浆和黏结界面变形破坏情况。朱训国^[4]通过对拉拔试验测试结果分析,在一定的假设条件下,推导了锚杆与注浆体或岩体耦合情况下的解析本构方程,在前人研究基础上利用提出的耦合解析本构模型,建立了非耦合状态下锚杆的解析本构模型。伍国军等^[5]基于室内的锚固剪切流变试验提出了一种经验型的非线性剪切流变模型,并通过计算分析验证锚固界面本构模型的正确性。

对于锚固时效性的研究主要集中在锚固力随时间变化规律及锚固岩体的流变特性研究两个方面。在锚固力随时间变化规律研究方面,陈安敏等^[6]根据一定的相似比例进行了软岩加固的模型试验,并给出了介质的压缩蠕变方程,探讨了锚索张拉吨位随时间的变化特征,提出了锚索张拉吨位随时间而损失的估算方法。张发明等^[7-8]通过对水利水电工程岩体加固中常采用的大吨位预应力长锚索锚固力变化规律的分析,详细讨论了影响预应力锚索锚固力变化的钢材松弛、岩体强度与性质、施工质量、锚索结构与环境变化等因素,得出了不同影响因素对预应力长锚索锚固力损失的影响效应。在锚固岩体流变特性研究方面,张玉军等^[9]通过模型试验建立了原岩体及锚固岩体的流变模型及本构方程,推导了计入锚杆施作时间的地下洞室黏弹性解析解,并编制有限元程序进行了计算参数的研究和工程运用的探讨。刘全林等^[10]将注浆锚杆简化为作用于围岩的一种体积力,以此建立了锚注支护计算的力学模型,分析了锚注支护对具有流变特性围岩在维护其稳定性方面的作用。

笔者在前人研究基础上,提出了一种考虑时间效应的锚固界面接触力学本构模型,该模型克服了

传统计算分析中容易出现的接触面法向硬接触和切向黏结滑移状态的不连续而导致的难以收敛等问题,并编程序采用 ABAQUS 接触有限元的罚函数法来模拟锚固体的接触问题,实现工程的锚固时效性计算分析。

2 传统锚固接触面间的相互作用

接触有限元方法是采用界面的法向应力和剪应力以及界面位移约束来描述界面的滑移及开合状态,模拟锚杆体与围岩体之间的接触过程。因此,在接触面上力与位移或压力与切向力之间的本构关系是决定有限元接触准确模拟的成败关键,有时甚至影响着计算的能否收敛。接触面之间的相互作用包含两部分:接触面间的法向作用和切向作用。

2.1 接触面的法向行为

接触压力与间隙的关系如图 1 所示。当接触条件从“开”(有间隙)到“闭”(间隙值为 0)时,接触压力会发生剧烈的变化,这种行为代表了“硬”接触关系。在有限元计算中,这样往往会造成接触模拟的不收敛。

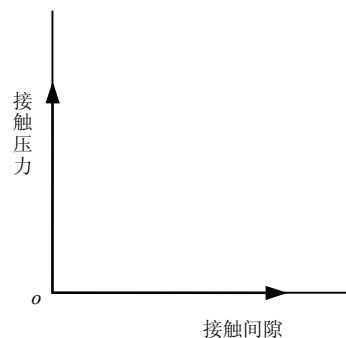


图 1 “硬”接触的接触压力与间隙的关系

Fig.1 Contact pressure vs. clearance for hard contact

2.2 接触面的切向行为

当锚固界面发生接触时,在接触面之间一般传递切向力和法向力。这样,在分析时就要考虑阻止表面之间相对滑动的黏结力或摩擦力。库仑摩擦是经常用来描述接触面之间相互作用的摩擦模型。该模型是采用摩擦系数 μ 来表征两个表面之间的摩擦行为。当表面剪切应力在达到临界剪应力值之前,不会发生切向运动;当等于或超过临界剪应力时,接触面之间会发生相对滑动。临界剪应力取决于法向接触压力:

$$\tau_{\text{crit}} = \mu p \quad (1)$$

式中: μ 为摩擦系数; p 为两接触面间的接触压力。 τ_{crit} 为接触表面的临界摩擦剪应力。

图 2 描述了库仑摩擦模型的行为。在有限元数值计算中，在黏结和滑移两种状态之间的不连续性经常会导致整个接触计算的难以收敛。对于锚固体与围岩的相互接触分析，由于锚杆体和围岩体在不同接触部位受力状态不同，且在不同的地质条件下，围岩本身以及围岩与锚杆体接触界面的特性也会不同，因此，对于锚杆体和围岩的相互接触作用的锚固机制研究就更为复杂。

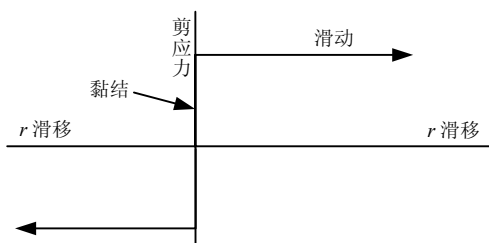


图 2 黏结与滑移的不连续性
Fig.2 Discontinuity from bond to slip

3 考虑法向软接触的锚固界面流变本构模型

由上节可知，接触问题分析时，接触面法向的硬接触和切向黏结滑移状态的不连续经常会导致计算的无法继续。对于工程问题的计算分析来说，这种影响会更厉害。因此，必须寻求一种更好的接触方法。

3.1 接触面法向软接触

软接触是指物体之间在未发生接触的某一微小距离时，即开始定义极小的接触压力，当物体实际接触后，接触压力快速上升。这样就能保证物体在接触前后的一小段距离内，压力保持连续，从而使接触过程平缓连续。本文采用如图 3 所示的指数形式的软接触模型。

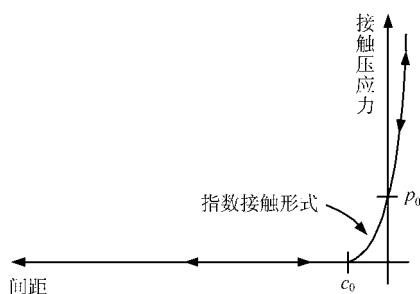


图 3 法向软接触指数形式
Fig.3 Exponential softened contact formulation in normal direction

指数形式的表达式为

$$\sigma_n = \frac{p_0}{e-1} \left(\frac{v}{c_0} + 1 \right) \left(e^{\frac{v}{c_0} + 1} - 1 \right) \quad (2)$$

式中： σ_n 为法向压应力； p_0 为实际刚接触时压应力； v 为物体之间法向相对位移； c_0 为定义的初始间隙。

对于具体的工程接触问题来说，只要在分析前给定 p_0 、 c_0 ，就能得到接触压应力和相对位移的指数关系式。实际刚接触时压应力 p_0 的取值对后续压应力的计算结果影响较大， p_0 一般取隧洞开挖后围岩体的环向应力。

3.2 接触面的非线性剪切流变模型

对于锚固问题，接触面的剪切特性是研究的重点，锚固界面上剪切应力的大小和分布规律决定着锚固效果的好坏。对于砂浆锚杆，界面本身具有一定的黏结抗力，此时界面的剪切行为并不能用简单的库仑摩擦模型来判定，需要一种更符合实际情况的剪切本构模型来描述。

注浆体与围岩体界面与一般岩体结构面的剪切流变具有一定的相似性。因此，可以采用以下经验方程来描述注浆体与围岩交界面的剪切行为：

$$u(t) = A + B \ln(1+t) + Dt \quad (3)$$

式中： $u(t)$ 为剪切位移； t 为时间； A 、 B 、 D 为试验参数。等式右项第 2、3 项分别用来描述锚固界面初始蠕变阶段和等速蠕变阶段的剪切蠕变。

锚固界面的剪切位移，除了受时间影响外，还受剪切力和法向压应力等因素的影响：剪切应力越高，剪切破坏越容易，发生的剪切流变变形越大，法向应力水平越高，剪切位移就越小。而法向应力直接表现在锚固界面的剪切强度上，目前关于法向应力影响因素的研究并不多，且仅限于定性分析层面。

通过对以上影响剪切流变变形的因素分析，不妨将时间因素作为影响剪切流变变形的一个因子，把 τ/τ_p 作为影响剪切变形的另外一个因子， τ 为剪切力， τ_p 为剪切向抗剪强度。当 τ/τ_p 越大，对剪切变形的贡献也越大，直至试样被剪坏。

因此，本文构建了如下的剪切流变方程：

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{u(t)}{[A + B \ln(1+t) + Dt]} \right) \quad (4)$$

τ_p 可采用摩尔-库仑模型得到：

$$\tau_p = c + \sigma_n \tan \varphi \quad (5)$$

式中： c 、 φ 为围岩体界面强度参数，当时间 t 取定值时，剪切应力 τ 和位移 u 的关系可用图 4 表示，令 $r_v = A + B \ln(1+t) + Dt$ ，则不难得出， r_v 越大，剪切从黏着到滑移所经历的位移越大，这是符合常理的，此种情形下的有限元求解往往更容易获得收敛。因此，本文所建立的剪应力本构方程是一种非

线性的连续性方程，当进行有限元计算分析时，比起常规的库仑接触模型，收敛性将更好。

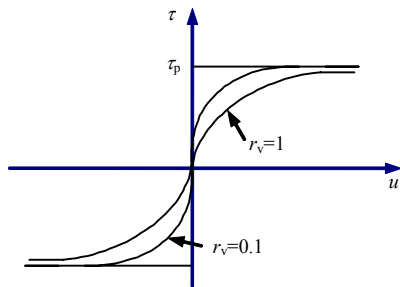


图 4 τ - u 的关系曲线
Fig.4 Relations between τ and u

4 锚固界面接触本构模型的二次开发

本文的锚固接触研究，采用 ABAQUS 提供的接触有限元罚函数法，ABAQUS 具有非常强大的非线性功能，在求解接触问题上表现出明显的优越性，并可提供用户自定义接触模型的子程序功能，便于用户按照自己定义好的界面本构模型，编制程序实现计算功能。考虑法向软接触行为的锚固界面非线性流变本构模型通过用户子程序 Uinter 中实现。具体的程序流程：模型在一开始计算时即调用 Uinter 子程序，首先通过法向间距来判断接触状态，当间距小于 c_0 时，即发生接触，并判断接触应力是否为压力，如是压力，即采用本文提出的非线性接触流变模型计算剪切应力，并计算接触面的 Jacobian 矩阵，将其返回到主程序；如果接触压力为正，即受拉，则视为未接触，将 τ 设为 0，直接退出子程序，模型程序流程见图 5。

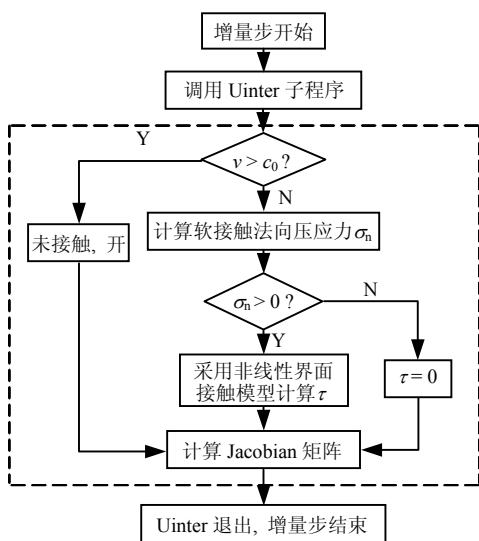


图 5 锚固界面流变模型程序流程
Fig.5 Program flow of rheological model of anchorage interface

5 程序验证

为进一步验证锚固界面本构模型及二次开发程序的正确性，对剪切流变试验进行数值模拟，流变本构模型试验参数采用文献[11]中试样 3 的拟合结果，边界条件为法向应力为 2.8 MPa，水平向剪切应力为 2 MPa；流变时间为 51 h，锚杆施加初始预应力为 7.6 kN。计算模型如图 6 所示，材料力学参数见表 1。

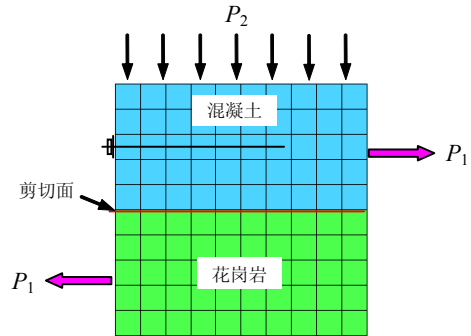


图 6 计算模型图
Fig.6 Calculated model

表 1 材料力学参数

材料	弹性模量 E / GPa	泊松比 ν
岩石	50	0.25
混凝土	35	0.19

采用本锚固界面流变模型计算后得到的界面平均位移变化趋势与室内剪切流变试验结果非常接近，图 7 为试件 3 一级加载流变段的对比曲线，得到的计算结果与试验非常接近，因此，可认为采用本文考虑法向软接触形式的剪切流变模型和二次开发程序是正确的。

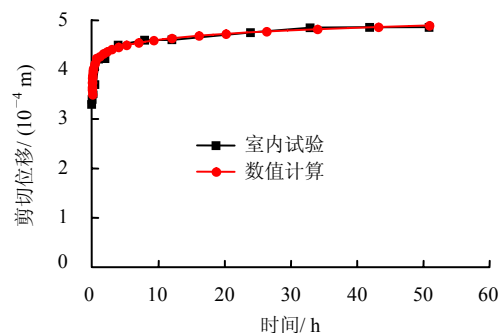


图 7 剪切位移随时间变化曲线对比图
Fig.7 Displacement-time contrast curves between test and numerical simulation

6 地下工程锚固时效性分析

采用本文的锚固界面流变力学模型及相应程序，对某地下工程中圆形隧洞进行开挖及锚固支护的计算分析，从而揭示其锚固时效性特征。

6.1 计算模型及参数

建立 1/4 的轴对称模型，尺寸为 60 m×60 m，开挖隧洞半径为 8 m；X、Y 轴均轴向对称约束，外部施加等向压应力 20 MPa，模型见图 8。锚杆直径为 $\phi 32$ mm，锚杆长度为 8 m；注浆体采用 C20 砂浆，注浆体外径为 $\phi 110$ mm。其几何位置关系见图 9，材料及力学参数见表 2。

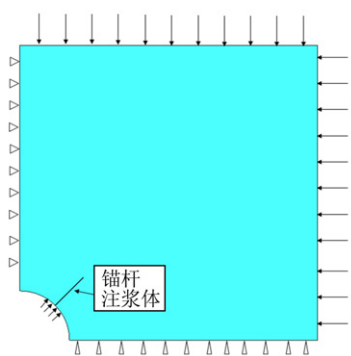


图 8 圆形隧道模型

Fig.8 Model of circular tunnel

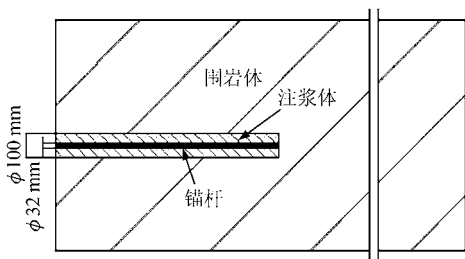


图 9 锚固体几何位置图

Fig.9 Geometric figure of anchorage body

表 2 材料力学参数表

Table 2 Mechanical parameters of materials

材料	弹性模量 E / GPa	泊松比 ν	凝聚力 c / MPa	内摩擦角 ϕ / (°)
围岩	25.0	0.25	2.80	50.0
注浆体	26.3	0.19	0.80	36.8
锚杆	210.0	0.17		

数值模拟中，围岩、注浆体和锚杆均采用平面实体单元来模拟，其中注浆体和锚杆建立黏结不分离的接触关系，而注浆体和围岩界面则采用本文建立的锚固界面非线性本构模型，建立接触关系。法向软接触指数形式的参数 $c_0 = 1 \times 10^{-5}$ m， $p_0 = 20$ kPa，锚固界面非线性剪切流变模型参数采用文献[11]中

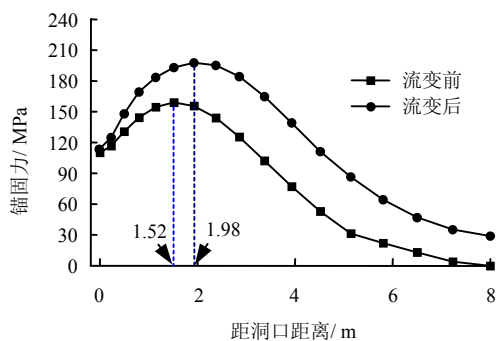
试样 2 的参数。注浆体和围岩体均采用 D-P 塑性模型。

6.2 计算步骤分析

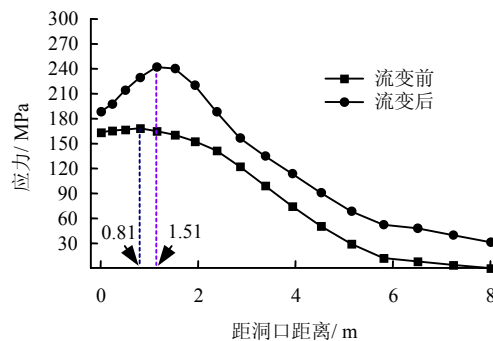
为研究地下工程开挖支护后的锚杆在锚固界面剪切流变下的时效性及锚固体的应力位移变化特征，具体分析步如下：①地应力平衡，所有单元都定义成围岩体材料；②隧洞开挖，实现应力释放；③锚杆支护，施加预应力分 100 MPa 和 175 MPa 两种工况；④锚固界面流变时间为 1 个月。

6.3 结果分析

预应力锚杆施作后，从锚头沿轴向的分布特征为两头小，中间大。锚杆预应力为 100 MPa 时，其峰值出现在距离锚头 1.52 m 的部位，最大轴向应力是 157 MPa，流变 1 个月后，其应力分布特征不变，但峰值和部位均出现了变化，峰值部位距离锚头 1.98 m，最大值为 196 MPa；锚杆预应力为 175 MPa 时，应力峰值位置由流变前的距锚头 0.81 m 变为流变后的 1.51 m，应力峰值由流变前的 178 MPa 变为流变后的 242 MPa，如图 10 所示。由此可见：锚固界面的流变将导致锚杆应力增大，且应力峰值会向锚根方向移动；而当锚杆预应力增大时(从 100 MPa 增大到 175 MPa)，锚杆应力的峰值会向隧道开挖面移动。



(a) 预应力为 100 MPa



(b) 预应力为 175 MPa

图 10 流变前后锚杆轴应力对比

Fig.10 Anchor axial stress comparison between before and after rheology

锚杆施加预应力后,对隧道周边岩体应力水平有一定改善,但随着锚固界面的流变,应力状况又进一步恶化,围岩体的最大压应力增大,由施作时的 32.3 MPa 增大到围岩体蠕变后的 43.7 MPa,见图 11。围岩体塑性区在流变后有稍许增大,且塑性屈服程度加大,等效塑性应变最大值由施作时的 2×10^{-3} 增大到流变后的 3.25×10^{-3} ,见图 12。

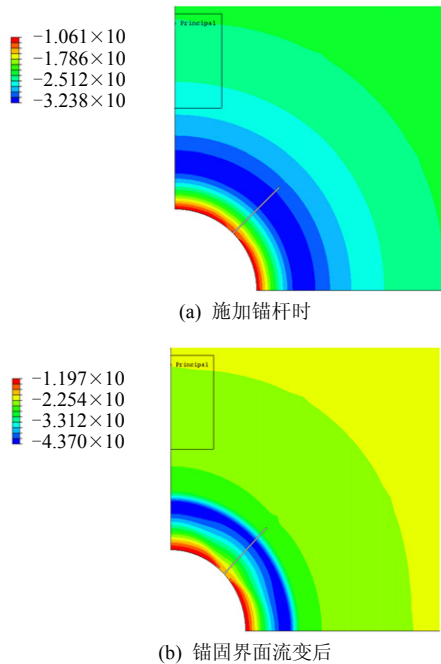


图 11 流变前后围岩最小主应力对比云图 (单位: MPa)

Fig.11 Minor principal stress comparison between before and after rheology (unit: MPa)

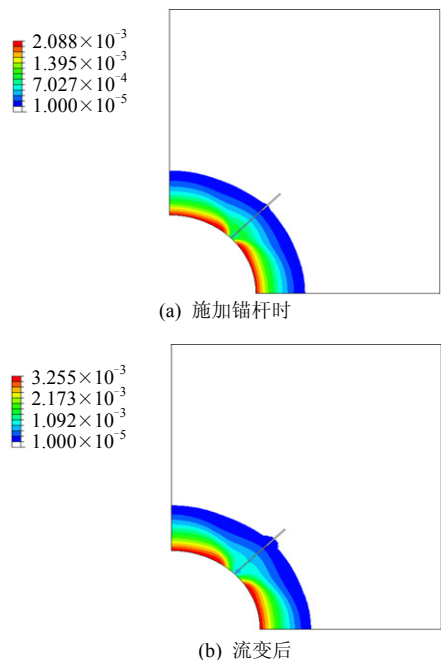


图 12 流变前后围岩塑性区对比云图

Fig.12 Plastic zone comparison between before and after rheology

7 结 论

(1) 针对传统接触面法向的“硬”接触和切向黏结、滑移两种状态的不连续经常会导致计算分析的无法继续问题,提出了锚固界面法向刚度服从指数分布的软接触型式,并建立了剪切面的非线性流变本构模型,解决了计算分析的难以收敛问题。剪切面的非线性流变模型考虑了法向应力对剪切流变的影响,可以更真实地反映界面剪切流变的力学过程。

(2) 编制 FORTRAN 子程序实现了 ABAQUS 二次程序开发,并将本文提出的锚固界面流变模型用于地下工程的锚固时效性分析,得到以下结论:地下工程锚固界面产生剪切流变导致锚杆应力增大,并使得预应力锚杆峰值的位置随着时间发生变化并有向锚根转移的趋势,而当锚杆预应力增大时,锚杆应力的峰值会向隧道开挖面移动。

参 考 文 献

- [1] 徐骏. 锚杆接触问题的有限元解法及其应用[D]. 成都:西南交通大学, 2003.
- [2] YAZICI S. Damage mechanics around a tunnel due to incremental ground pressure[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1997, 34 (3, 4): 655—627.
- [3] HYETT A J, BAWDEN W F, MACSPORRAM G R, et al. A constitutive law for bond failure of fully ground cable bolts using a modified Hoek cell[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1995, 32 (1): 11—34.
- [4] 朱训国, 杨庆, 栾茂田. 岩体锚固效应及锚杆的解析本构模型研究[J]. *岩土力学*, 2007, 28(3): 527—532.
ZHU Xun-guo, YANG Qing, LUAN Mao-tian. Study of reinforcement effect of anchored rock masses and analytic constitutive equation for rock bolt[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(3): 527—532.
- [5] 伍国军. 地下工程锚固时效性及可靠性研究[D]. 武汉:中国科学院武汉岩土力学研究所, 2009.
- [6] 陈安敏, 顾金才, 沈俊, 等. 软岩加固中锚索张拉吨位随时间变化规律的模型试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2002, 21(2): 251—256.
CHEN An-min, GU Jin-cai, SHEN Jun, et al. Model testing research on the variation of tension force of anchor cable with time in reinforcement of soft rocks[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*,

- 2002, 21(2): 251—256.
- [7] 张发明, 刘宁, 赵维炳. 岩质边坡预应力锚固的力学行为及群锚效应[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(增刊): 1070—1077.
ZHANG Fa-ming, LIU Ning, ZHAO Wei-bing. Mechanical behaviour and effects of prestressed anchorage for rock slope[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2000, 19(Supp.): 1077—1070.
- [8] 张发明, 刘宁, 陈祖煜, 等. 影响大吨位预应力长锚索锚固力损失的因素分析[J]. 岩土力学, 2003, (4): 194—197.
ZHANG Fa-ming, LIU Ning, CHEN Zu-yu, et al. Analysis of factors affected on load losses of high capacity and long rock anchors[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2003, (4): 194—197.
- [9] 张玉军, 孙钧. 锚固岩体的流变模型及计算方法[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(3): 33—46.
ZHANG Yu-jun, SUN Jun. Rheological models and calculation methods for bolts rock masses[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1994, 16(3): 33—46.
- [10] 刘全林, 杨敏. 软弱围岩巷道锚注支护机制及其变形分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(8): 1158—1161.
LIU Quan-lin, YANG Min. Analysis of deformation of surrounding rock masses of tunnel using bolt-grouting support and its mechanism[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2002, 21(8): 1158—1161.
- [11] 伍国军, 陈卫忠, 贾善坡, 等. 岩石锚固界面剪切流变试验及模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 520—527.
WU Guo-jun, CHEN Wei-zhong, JIA Shan-po, et al. Shear rheology experiments for anchorage interface mechanics and nonlinear rheological model of rocks[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(3): 520—527.

上接第 185 页

- [10] 柴华友, 贺怀建. 阻尼对应力波传播的影响[J]. 岩土力学, 1994, 15: 42—49.
CHAI Hua-you, HE Huai-jian. Effects of surface damping on the propagation of stress wave[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1994, 15(1): 42—49.
- [11] 朱珏, 胡时胜, 王礼立. SHPB 试验中粘弹性材料的应力均匀性分析[J]. 爆炸与冲击, 2006, 26: 315—322.
ZHU Jue, HU Shi-sheng, WANG Li-li. Analysis on stress uniformity of viscoelastic materials in split Hopkinson bar tests[J]. **Explosion and Shock Waves**, 2006, 26: 315—322.
- [12] 周风华, 陈亮, 王礼立. 两种一维粘弹性应力波传播分析方法比较[J]. 工程力学, 2010, 27(7): 45—51.
ZHOU Feng-hua, CHEN Liang, WANG Li-li. Two approaches for analyzing one-dimensional viscoelastic wave propagations[J]. **Engineering Mechanics**, 2010, 27(7): 45—51.
- [13] ABATE J, VALKÓ P P. Multi-precision Laplace transform inversion[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004, 60: 979—993.
- [14] VALKÓ P P, ABATE J. Numerical Laplace inversion in rheological characterization[J]. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 2004, 116: 395—406.
- [15] COHEN A M. Numerical methods for Laplace transform inversion[M]. [S. l.]: Springer, 2007.
- [16] GRAFF K F. Wave motion in elastic solids[M]. [S. l.]: Dover Publication Inc, 1975.
- [17] 王礼立. 应力波基础(第二版)[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [18] 姜锡权. 水泥砂浆动态力学行为及短纤维增强性能研究[博士论文 D]. 合肥: 中国科学技术大学, 1996.
- [19] 胡时胜, 王道荣. 冲击载荷下混凝土材料的动态本构关系[J]. 爆炸与冲击, 2006, 22(3): 242—246.
HU Shi-sheng, WANG Dao-rong. Dynamic constitutive relation of concrete under impact[J]. **Explosion and Shock Waves**, 2006, 22(3): 242—246.
- [20] 朱珏. 混凝土类材料冲击本构特性的 SHPB 技术及 Lagrange 反解法的研究[博士论文 D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006.
- [21] STRONGE W J. Impact mechanics[M]. UK: Cambridge University Press, 2000.