

文章编号: 1000-7598(2010)07-2051-08

基于修正 Mohr-Coulomb 准则的 弹塑性本构模型及其数值实施

贾善坡^{1,2}, 陈卫忠^{2,3}, 杨建平³, 陈培帅³(1.长江大学 城市建设学院, 湖北 荆州 434023; 2.山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061;
3.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 针对 Mohr-Coulomb 准则高估岩土体抗拉性能的局限性, 建立考虑最大拉应力准则的修正 Mohr-Coulomb 模型; 系统地论述隐式本构积分算法的主要内容, 推导相应的一致性刚度矩阵。以 ABAQUS 软件为平台, 采用向后欧拉隐式应力积分算法编制了 UMAT 本构程序, 对单轴拉伸试验和三轴压缩试验进行数值模拟, 对比分析 ABAQUS 自带模型和自编模型的优劣, 结果表明编写的修正 Mohr-Coulomb 模型能够有效地反映岩土介质的抗拉性能, 弥补了 ABAQUS 自带模型的不足。

关 键 词: 修正 Mohr-Coulomb 准则; 本构模型; 应力积分算法; UMAT

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

An elastoplastic constitutive model based on modified Mohr-Coulomb criterion and its numerical implementation

JIA Shan-po^{1,2}, CHEN Wei-zhong^{2,3}, YANG Jian-ping³, CHEN Pei-shuai³

(1.School of Urban Construction, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434023, China;

2. Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China; 3.State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Due to the conventional Mohr-Coulomb criterion used for geotechnical materials with its limitation for overestimation of tensile performance, a modified Mohr-Coulomb model is established considering maximal tensile stress criterion. The main contents of the implicit constitutive integration algorithm are discussed systematically; and the consistent stiffness matrix is deduced. Based on the implicit Euler stress integration algorithm, the UMAT subroutine of the modified Mohr-Coulomb model is developed in ABAQUS. With the new developed model, the numerical simulation of uniaxial tensile test and triaxial compression test is implemented respectively. The study shows that the developed modified Mohr-Coulomb UMAT subroutine could effectively depict the tensile performance of geotechnical materials and fill up the deficiency of the Mohr-Coulomb model in ABAQUS.

Key words: modified Mohr-Coulomb criterion; constitutive model; stress integration algorithm; UMAT

1 引 言

岩土强度准则是岩土理论的重要组成部分, 一直是众多学者研究的热点, 大量的试验和工程实践已证实, Mohr-Coulomb 强度理论能较好地描述岩土材料的强度特性和破坏行为, 在岩土工程领域得到了广泛的应用^[1]。然而, Mohr-Coulomb 屈服面在主应力空间是一个六角锥面, 角点处的导数不连续, 给计算带来了不便, 导致 Mohr-Coulomb 准则不便

于应用到有限元数值计算中。为了计算方便, 许多软件(如 ANSYS、MARC、PATRAN、NASTRAN 等)采用 Drucker-Prager 类屈服准则去近似 Mohr-Coulomb 准则^[2], 但实际计算表明, 按照 Drucker-Prager 准则计算与 Mohr-Coulomb 理论计算结果存在较大误差。为此, Zienkiewicz-Pande 等人提出了二次型屈服准则去逼近 Mohr-Coulomb 屈服准则, 但不够理想; 邓楚键、徐干成、谢肖礼、戴自航等提出 Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则, 效果良好,

收稿日期: 2009-11-23

基金项目: 国家自然科学基金重大国际合作项目(No. 50720135906); 国家自然科学基金面上项目(No. 40772184); 863 项目(No.2007AA11Z108); 国家科技重大专项课题(No. 2008ZX05005-006); 长江大学科研发展基金项目资助。

第一作者简介: 贾善坡, 男, 1980 年生, 博士后, 讲师, 主要从事岩石力学与工程及地下工程方面的研究工作。E-mail: jiashanporsm@163.com

但缺乏物理意义^[2-5]。

另外，Mohr-Coulomb 准则高估了岩土介质的抗拉强度，不能准确描述岩土抗拉性能^[6]。然而，现有的软件中采用的都是比较经典的本构模型，不能对特殊类型岩土介质的塑性和流变等现象进行合理的描述，这就需要能够对能够合理描述这些材料行为的本构模型进行有限元实现，这样才能对岩土介质的变形行为进行合理的分析。本文结合拉伸型和剪切型 Mohr-Coulomb 屈服准则，建立了修正的 Mohr-Coulomb 准则，并以大型有限元软件 ABAQUS 为平台，采用 Fortran 语言编制了 UMAT 本构程序，通过压缩和单轴拉伸数值试验验证了程序的可靠性。

2 修正 Mohr-Coulomb 模型

以应力不变量形式表示的剪切型 Mohr-Coulomb 屈服准则可以表示为

$$F = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} K(\theta) - c \cos \phi = 0 \quad (1)$$

式中： c 、 ϕ 分别为黏聚力和内摩擦角； $\sigma_m = I_1/3$ 为平均应力； $\bar{\sigma} = \sqrt{J_2}$ 为等效应力； I_1 、 J_2 分别为应力第 1 不变量和应力偏量第 2 不变量； θ 为 Lode 角； $K(\theta) = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin \theta$ ；本文规定拉应力为正，压应力为负。

以应力不变量表示的拉伸型 Mohr-Coulomb 屈服准则为

$$F = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \sin(\theta + 120^\circ) + \sigma_m - f_t = 0 \quad (2)$$

式中： f_t 为岩土介质的抗拉强度。

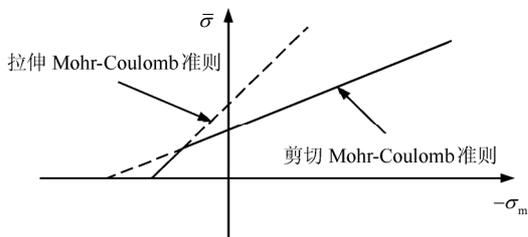


图 1 子午面上的复合准则

Fig.1 The complex yield criterion in the meridional plane

在 π 平面拉伸型 Mohr-Coulomb 屈服准则是一个等边三角形，在主应力空间屈服面由 3 个分别垂直于主应力轴的平面组成；在 π 平面剪切型 Mohr-Coulomb 屈服准则是一个不等角的六边形，在主应力空间为一个棱锥面，中心轴线与等倾线重

合。在子午面上，复合 Mohr-Coulomb 屈服准则的轨迹如图 1 所示。采用双曲线方程对拉伸型 Mohr-Coulomb 屈服准则和剪切型 Mohr-Coulomb 屈服准则进行拟合，如图 2 所示，通过调整参数 m 的大小来反映岩土介质的抗张强度的大小，取值范围为 $0 \leq m \leq 1$ 。当 $m=0$ 时，复合屈服准则退化为剪切型 Mohr-Coulomb 屈服准则；当 $m=1$ 时，岩土介质的抗张强度为 0。同时，参数 m 可以修正屈服面上的尖顶，使尖角变的光滑，避免了数值计算的发散和收敛的缓慢。

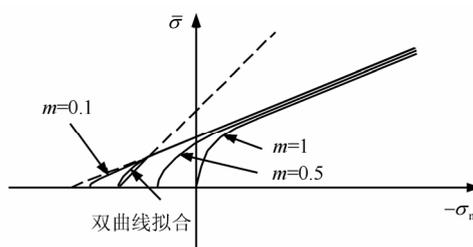


图 2 修正 Mohr-Coulomb 准则

Fig.2 The modified Mohr-Coulomb yield criterion

由于 Mohr-Coulomb 屈服面存在 6 个棱角这些奇异点，使数值计算变繁和收敛缓慢^[7-10]。为了尽量逼近和接近屈服面，采取分段函数的形式进行描述 $K(\theta)$ ，使得改进后的屈服面尽量接近 Mohr-Coulomb 屈服面，并且在棱角处得到光滑连续的处理，处理后的屈服面在 π 平面如图 3 所示。

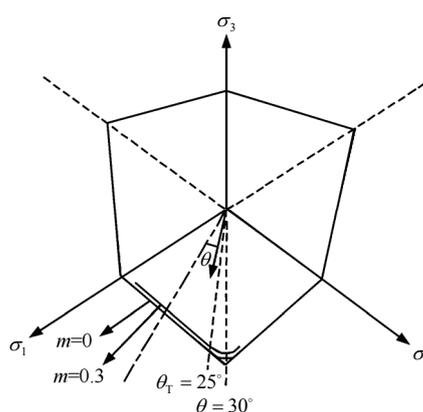


图 3 π 平面上复合 Mohr-Coulomb 准则的光滑处理

Fig.3 Smooth treatment of Mohr-Coulomb criterion in the π plane

修正的 Mohr-Coulomb 屈服准则的表达式为

$$F = \sigma_m \sin \phi + \sqrt{\bar{\sigma}^2 K^2(\theta) + m^2 c^2 \cos^2 \phi} - c \cos \phi = 0 \quad (3)$$

采用分段函数来描述 $K(\theta)$ ，具体表达式为

$$K(\theta) = \begin{cases} (A - B \sin 3\theta), & |\theta| > \theta_T \\ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin \theta, & |\theta| \leq \theta_T \end{cases} \quad (4)$$

本文取 $\theta_T = 25^\circ$ ， $|\theta| \leq \theta_T$ 时，在 π 平面屈服函数迹线不做处理，和经典的 Mohr-Coulomb 准则一致，而当 $|\theta| > \theta_T$ 时，对屈服函数的迹线进行光滑处理。式中：

$$A = \frac{1}{3} \cos \theta_T (3 + \tan \theta_T \tan 3\theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sign}(\theta) (\tan 3\theta_T - 3 \tan \theta_T) \sin \phi) \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{3 \cos 3\theta_T} \left(\text{sign}(\theta) \sin \theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \cos \theta_T \right) \quad (6)$$

ABAQUS 内嵌的 Mohr-Coulomb 屈服函数与岩土塑性力学中给出的公式是一致的，但它采用了双曲线型的塑性势函数，屈服函数与势函数的表达式是不一致的，不能真正体现岩土材料的关联流动特性。

本文取塑性势函数与屈服函数的表达式一致，即：

$$G = \sigma_m \sin \phi + \sqrt{\bar{\sigma}^2 K^2(\theta) + m^2 c^2 \cos^2 \phi} \quad (7)$$

式中： ϕ 为膨胀角；其中 $K(\theta)$ 也与 ϕ 有关，表达式与屈服函数中的 $K(\theta)$ 类似。若 $\phi = \phi$ ，则为关联流动；若 $\phi \neq \phi$ ，称为非关联流动，而当 $\phi = 0$ 时塑性变形时材料的体积不发生变化。

3 隐式本构积分算法

当应力超出屈服面后，要进行应力调整，使之返回更新后的屈服面，采用的方法称为本构积分算法^[11-13]。

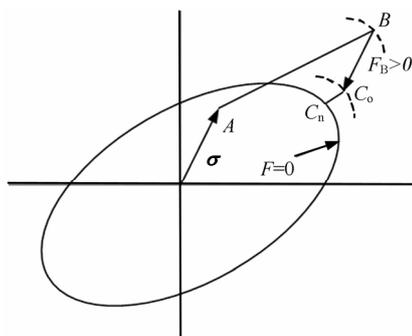


图 4 向后欧拉算法迭代示意图
Fig.4 The diagram of backward Euler integration algorithm

3.1 向后欧拉隐式积分算法

根据塑性理论，塑性应变率的计算公式为

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) = \dot{\lambda} b \quad (8)$$

式中： G 为塑性势函数。

等效塑性应变率的计算公示为

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p)^{1/2} \quad (9)$$

将式 (8) 代入式 (9)，可得：

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{pl} = \dot{\lambda} B(\sigma) \quad (10)$$

对于 Von Mises 屈服准则， $B(\sigma) = 1$ ，而岩土类屈服准则， $B(\sigma) \neq 1$ 。

将硬化看作是黏聚力 c 为等效塑性应变的函数，即

$$H' = \frac{\partial c}{\partial \bar{\epsilon}_{pl}} \quad (11)$$

式中： $\bar{\epsilon}_{pl} = \int \dot{\bar{\epsilon}}_{pl}$ 。

利用屈服函数 F 的一致性条件，可得：

$$\dot{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \bar{\epsilon}_{pl}} \dot{\bar{\epsilon}}_{pl} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial c} H' \dot{\bar{\epsilon}}_{pl} = 0 \quad (12)$$

将式 (10) 代入上式，可得：

$$\dot{F} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial c} H' B \dot{\lambda} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} - A' \dot{\lambda} = 0 \quad (13)$$

式中： $A' = -\frac{\partial F}{\partial c} H' B$ ，对于理想弹塑性问题有 $A' = 0$ 。

从图 4 中可知， A 点的应力状态 σ_A 在屈服面内， B 点在屈服面之外， B 的应力 σ_B 为：

$$\sigma_B = \sigma_A + D_e \Delta \epsilon = \sigma_A + \Delta \sigma_e \quad (14)$$

式中： D_e 为弹性矩阵； $\Delta \sigma_e$ 为弹性应力增量； σ_B 为弹性试探应力。

为了将试探应力 σ_B 拉回到屈服面，定义应力改变量的计算公式为

$$\Delta \sigma = D_e \Delta \epsilon - \Delta \lambda D_e b = \Delta \sigma_e - \Delta \lambda D_e b \quad (15)$$

式中： $b = \frac{\partial G}{\partial \sigma}$ 。

C 点的应力状态为

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta \lambda D_e b \quad (16)$$

可见，向后欧拉算法的作用就是将 C 点逐渐迭代到

屈服面上。

将屈服函数 F 在 B 点一阶 Taylor 展开, 可得:

$$F = F_B + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} = \quad (17)$$

$$F_B - \Delta \lambda \mathbf{a}_B^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}_B - \Delta \lambda A'_B = 0$$

由上式可得:

$$\Delta \lambda = \frac{F_B}{\mathbf{a}_B^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}_B + A'_B} \quad (18)$$

采用向后欧拉算法将应力拉回到屈服面的基本公式为

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C \quad (19)$$

首先给出 $\boldsymbol{\sigma}_C$ 的初始估计值, 即

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_B \quad (20)$$

通常应力初始估计值 $\boldsymbol{\sigma}_C$ 不会在屈服面上, 于是需要通过迭代将应力拉回到屈服面。定义矢量 \mathbf{r} 为当前应力与向后欧拉应力之差, 即

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_B + \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C \quad (21)$$

当应力返回到屈服面时有 $\mathbf{r} = 0$ 。将 $\boldsymbol{\sigma}_B$ 固定, 将 \mathbf{r} 进行 Taylor 展开, 可得:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C + \Delta \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (22)$$

式中: $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 为对于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的改变; $\dot{\lambda}$ 为对于 $\Delta \lambda$ 的改变。

令 $\mathbf{r}_n = 0$, 有:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \left(\mathbf{r}_0 + \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C \right) - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}_e \mathbf{b} \quad (23)$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵。

同样, 对屈服函数 F 在 C 点 Taylor 展开, 可得:

$$F_{Cn} = F_{C0} + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pl} = \quad (24)$$

$$F_{C0} + \mathbf{a}_C^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + A'_C \dot{\lambda} = 0$$

将式 (23) 代入上式, 可得:

$$\dot{\lambda} = \frac{F_C - \mathbf{a}_C^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}_C^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}_e \mathbf{b} + A'_C} \quad (25)$$

求得 $\dot{\lambda}$ 后, 即可将式 (25) 分别代入式 (23)、式 (10) 求得 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{pl}$ 。

3.2 一致性切线刚度矩阵

根据式 $\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b}_C$, 以下略掉公式中的下标 C 表示为当前构形的应力状态, 式中的下标 B

为弹性试探应力, 标准向后欧拉算法可表述为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b} \quad (26)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为当前构形的应力; $\boldsymbol{\sigma}_B$ 为弹性试探应力。

对式 (26) 进行微分, 可得:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{D}_e \mathbf{b} - \Delta \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (27)$$

对上式进行化简, 可得:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{I} + \Delta \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}) = \quad (28)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{b}) = \mathbf{R} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{b})$$

式中: $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}_e$ 。

为了使当前应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 落在屈服面上, 应使 $\dot{F} = 0$, 根据式 (12), 即屈服函数 F 的一致性条件有:

$$\dot{F} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - A' \dot{\lambda} = 0 \quad (29)$$

将式 (28) 代入式 (29), 并化简可得 $\dot{\lambda}$ 的表达式为

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{b} + A'} \quad (30)$$

将式 (30) 代入式 (28) 进行化简可得:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{b} + A'} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}_{ct} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (31)$$

式中: \mathbf{D}_{ct} 即为一致性刚度矩阵。

3.2 应力更新算法流程

在完全隐式向后欧拉方法中, 在 n 增量步结束时计算塑性应变和等效塑性应变增量, 积分算法可表示为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n)} + \Delta \lambda^{(n+1)} \mathbf{b}^{(n+1)} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n+1)} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n)} + \Delta \lambda^{(n+1)} B^{(n+1)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} &= \mathbf{D}_e : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n+1)}) \\ F^{(n+1)} &= F^{(n+1)}(\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n+1)}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式 (32) 是一个关于 $(\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n+1)}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n+1)})$ 的非线性方程组, 在时刻 t_n 给出一组 $(\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n)}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n)})$ 和应变增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 更新变量来自于前一个时间步结束时的收敛值, 这就达到了避免非物理意义的效果, 非线性方程组的解答由 Newton-Raphson 迭代方法求解。

应力更新算法流程如下:

第 1 步，设置初始值。塑性应变和等效塑性应变的初始值为上一载荷步结束时的收敛值，将塑性参数增量置 0，计算弹性试探应力。

$$k = 0: \boldsymbol{\varepsilon}_{p(0)}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon}_p^{(n-1)}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(0)}^{(n)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}^{(n-1)}, \Delta\lambda_0^{(n)} = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(0)}^{(n)} = \mathbf{D}_e : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{p(0)}^{(n)})$$

第 2 步，在第 k 次迭代时检查屈服条件和收敛性

$$F_{(k)}^{(n)} = F(\boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(n)}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(k)}^{(n)})$$

如果 $F_{(k)}^{(n)} < TOL$ ，则收敛；否则进入第三步。

第 3 步，计算塑性参数增量，并获得应力增量和等效塑性应变增量。

$$\delta\lambda_{(k)} = \frac{F_{(k)} - \mathbf{a}_{(k)}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}_{(k)}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{D}_e \mathbf{b} + A'_{(k)}}$$

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{(k)} = -\left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{D}_e \mathbf{b})$$

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(k)} = \delta\lambda_{(k)} B$$

第 4 步，更新塑性应变、应力及塑性乘子

$$\begin{cases} \Delta\lambda_{(k+1)} = \Delta\lambda_{(k)} + \delta\lambda_{(k)} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(k+1)}^{(n)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(k)}^{(n)} + \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl(k)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{p(k+1)}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{p(k)}^{(n)} + \mathbf{D}_e^{-1} : \delta\boldsymbol{\sigma}_k \\ \boldsymbol{\sigma}_{(k+1)}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(n)} + \mathbf{D}_e : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{p(k+1)}^{(n)}) \end{cases}$$

令 $k = k + 1$ ，转到第 3 步。

4 屈服函数和势函数的求导

采用隐式向后欧拉算法，需对屈服函数一次求导、势函数一次求导、势函数二次求导。

4.1 屈服函数的一次求导

令矢量 \mathbf{a} 表示屈服函数对应力的求导，具体表达式如下：

$$\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = C'_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C'_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C'_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (33)$$

式中： $C'_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$ ， $C'_2 = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} - \frac{\tan 3\theta}{\bar{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$ ， $C'_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta \bar{\sigma}^3} \frac{\partial F}{\partial \theta}$ ，其中：

$$\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} s_y s_z - \tau_{yz}^2 \\ s_x s_z - \tau_{xz}^2 \\ s_x s_y - \tau_{xy}^2 \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}) \\ 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}) \end{pmatrix} + \frac{\bar{\sigma}^2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} [s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz}]^T$$

$$C'_1 = \sin \phi$$

$$C'_2 = \alpha' \left(K - \tan 3\theta \frac{dK}{d\theta} \right)$$

$$C'_3 = \alpha' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta \bar{\sigma}^2} \frac{dK}{d\theta} \right)$$

式中： $\alpha' = \frac{\bar{\sigma} K}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 K^2 + m^2 c^2 \cos^2 \phi}}$ ，

$$\frac{dK}{d\theta} = \begin{cases} -3B \cos 3\theta, & |\theta| > \theta_T \\ -\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \phi \cos \theta, & |\theta| \leq \theta_T \end{cases}$$

4.2 塑性势函数的一次求导

令矢量 \mathbf{b} 表示势函数对应力的求导，表达式与 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ 类似，只需要将 $K(\theta)$ 、 C'_1 、 C'_2 、 C'_3 、 α' 以及 $\frac{dK}{d\theta}$ 计算公式中的 ϕ 换成 φ 即可，具体表达式如下：

$$\mathbf{b} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = C_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + C_3 \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (34)$$

式中： $C_1 = \frac{\partial G}{\partial \sigma_m}$ ， $C_2 = \frac{\partial G}{\partial \bar{\sigma}} - \frac{\tan 3\theta}{\bar{\sigma}} \frac{\partial G}{\partial \theta}$ ， $C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta \bar{\sigma}^3} \frac{\partial G}{\partial \theta}$ ，其中：

$$C_1 = \sin \phi, \quad C_2 = \alpha C_2^{mc}, \quad C_3 = \alpha C_3^{mc}$$

式中： $\alpha = \frac{\bar{\sigma} K}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 K^2 + m^2 c^2 \cos^2 \phi}}$ ，

$$C_2^{mc} = K - \tan 3\theta \frac{dK}{d\theta}, \quad C_3^{mc} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta \bar{\sigma}^2} \frac{dK}{d\theta}。$$

提供应力张量 ${}^t_n \sigma$ 、总应变 ${}^t_n \varepsilon$ 、总应变增量 ${}^t_n \Delta \varepsilon$ 以及时间增量 Δt ，这四个值传入 UMAT 子程序。

第 2 步，计算弹性试探应力，根据隐式向后欧拉算法计算塑性参数，通过迭代将应力拉回到屈服面，并计算一致切线刚度 D_{ct} ，即 Jacobian 矩阵，计算应力增量 $\Delta \sigma = J^t_n \Delta \varepsilon$ ，并更新应力 ${}^t_{n+\Delta t} \sigma = {}^t_n \sigma + \Delta \sigma$ 。

第 3 步：在 t_{n+1} 时刻，ABAQUS 主程序采用 Newton-Raphson 进行平衡迭代，如果计算结果收敛，进行下一步增量， $n = n + 1$ ；否则，减小该步时间增量 Δt 直到计算结果收敛。

6 算例

开发了基于修正 Mohr-Coulomb 本构模型的 UMAT 本构程序，经编译调试后对室内常规岩石力学试验进行有限元分析，并与 ABAQUS 内嵌的 Mohr-Coulomb 模型的计算结果相比较，以测试 UMAT 程序的计算能力、精度和效率。

6.1 常规三轴压缩试验

圆柱体高度为 100 mm，直径为 50 mm，沿模型垂直方向施加竖向位移 5 mm。材料参数如下：弹性模量为 300 MPa，泊松比为 0.25，内摩擦角为 18° ，黏聚力为 0.3 MPa。

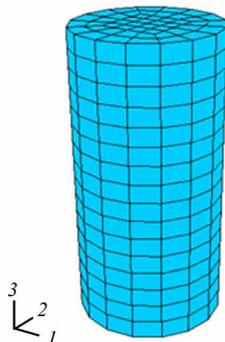


图 6 三轴压缩试验分析模型
Fig.6 Finite element model for triaxial test

从图 7~10 中计算结果的对比可以发现，采用 UMAT 时屈服应力稍小于 ABAQU 内嵌 Mohr-Coulomb 模型的计算结果，这是因为修正 Mohr-Coulomb 准则的屈服面在 Mohr-Coulomb 准则内侧，是后者的拟合，所以屈服应力稍微小一些。

6.2 单轴拉伸试验

计算模型同上，沿模型垂直方向施加拉伸方向的位移，所施加的竖向位移为 2 mm，计算结果如图 11 所示，可以看出，在 $m = 0.05$ 时，UMAT 的计算结果与 ANAQUS 的计算结果非常接近， m 值越

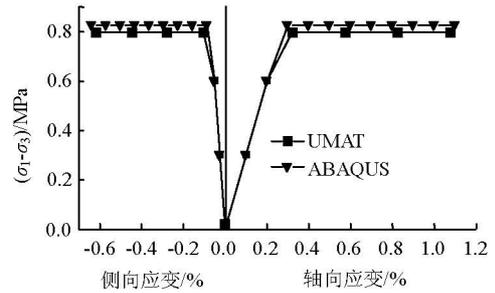


图 7 非关联情况下单轴应力-应变关系
Fig.7 The stress-strain curves of uniaxial compression test with non-associated flow

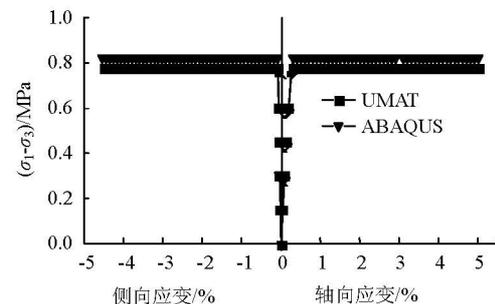


图 8 关联情况下单轴应力-应变关系
Fig.8 The stress-strain curves of uniaxial compression test with associated flow

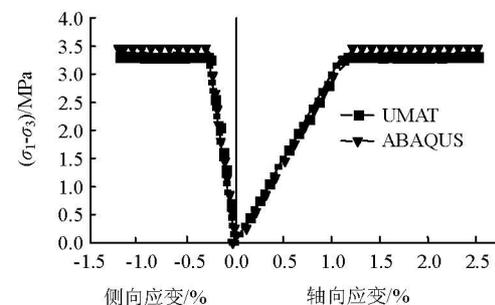


图 9 非关联情况下围压为 3 MPa 时应力-应变关系曲线
Fig.9 The stress-strain curves under confining pressure of 3 MPa with non-associated flow

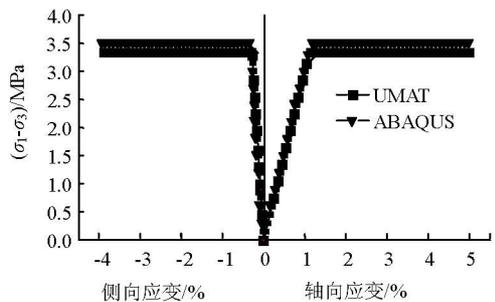


图 10 关联情况下围压为 3 MPa 时应力-应变关系曲线
Fig.10 The stress-strain curves under confining pressure of 3 MPa with associated flow

接近 0, 两者的计算结果越相近; 当 $m = 0.2$ 时, 采用 UMAT 程序计算, 单元更早进入塑性状态, 屈服应力比 ABAQUS 内嵌 Mohr-Coulomb 模型的计算结果要小, 前者屈服应力为 0.353 MPa, 后者屈服应力为 0.434 MPa, 由于岩石的抗拉强度远小于抗压强度。所以, 通过调整 m 值的大小可以实际反映岩石的抗拉性质, 在受拉状态下, UMAT 程序的计算结果更接近实际情况。

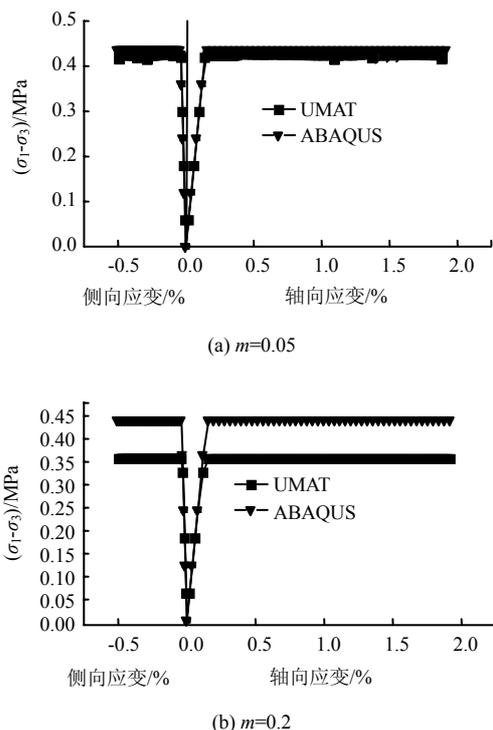


图 11 单轴拉伸情况下的应力-应变曲线

Fig.11 The stress-strain curves of uniaxial tensile test

7 结 论

本文建立了考虑最大拉应力准则的修正 Mohr-Coulomb 模型, 以 ABAQUS 软件为平台, 采用完全隐式欧拉回映算法编制了 UMAT 本构程序, 并通过压缩和单轴拉伸数值试验验证了程序算法的正确性和可靠性; 另外, 为了描述软岩的软化行为, 可将损伤引入到修正的 Mohr-Coulomb 准则中, 修改相应的 UMAT 本构程序, 即可实现岩土介质弹塑性损伤计算, 由于篇幅的限制, 具体数值实施过程将另文进行详细介绍, 具体见文献[14]。

参 考 文 献

[1] 史述昭, 杨光华. 岩土常用屈服函数的改进[J]. 岩土工程学报, 1987, 9(4): 60—69.
SHI Shu-zhao, YANG Guang-hua. An improvement of the commonly used yield function for rock material[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1987,

9(4): 60—69.
[2] 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩土工程中的应用研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(6): 735—739.
DENG Chu-jian, HE Guo-jie, ZHENG Ying-ren. Studies on Drucker-Prager yield criteria based on M-C yield criterion and application to geotechnical engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(6): 735—739.
[3] 徐干成, 郑颖人. 岩石工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93—99.
XU Gan-cheng, ZHENG Ying-ren. Study on the yield criteria in rock engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1990, 12(2): 93—99.
[4] 谢肖礼, 张喜德, 许靖, 等. 建议一种有关岩土力学的屈服准则及其应用[J]. 广西大学学报, 2005, 30(4): 275—282.
XIE Xiao-li, ZHANG Xi-de, XU Jing, et al. Proposing a new yield criterion of geotechnical mechanics and its application[J]. *Journal of Guangxi University*, 2005, 30(4): 275—282.
[5] 戴自航, 沈蒲生. 莫尔-库仑等面积圆屈服准则的简化形式及应用[J]. 福州大学学报, 2003, 31(4): 454—459.
DAI Zi-hang, SHEN Pu-sheng. Simplified form and applications of Mohr-Coulomb equivalent area circle yield criterion[J]. *Journal of Fuzhou University*, 2003, 31(4): 454—459.
[6] 贾善坡. Boom Clay 泥岩渗流应力损伤耦合流变模型、参数反演与工程应用[博士论文 D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2009.
[7] 王金昌, 陈页开. ABAQUS 在土木工程中的应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2006.
[8] ABBO A J, SLOAN S W. A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion[J]. *Computers & Structures*, 1995, 54(3): 427—441.
[9] SUN De-an, YAO Yang-ping, MATSUOKA H. Modification of critical state models by Mohr-Coulomb criterion[J]. *Mechanics Research Communications*, 2006, 33: 217—232.
[10] CLAUSEN J, DAMKILDE L, ANDERSEN L. An efficient return algorithm for non-associated plasticity with linear yield criteria in principal stress space[J]. *Computers and Structures*, 2007, 85: 1795—1807.
[11] 庄茁. 连续体和结构的非线性有限元[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
[12] WANG X, WANG L B, XU L M. Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models[J]. *Computers and Geotechnics*, 2004, 31: 315—338.
[13] CRISFIELD M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures[M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.
[14] 贾善坡, 陈卫忠, 于洪丹, 等. 泥岩弹塑性损伤本构模型及其参数辨识[J]. 岩土力学, 2009, 30(12): 3607—3614.
JIA Shan-po, CHEN Wei-zhong, YU Hong-dan, et al. Parameter identification of new elastoplastic damage constitutive model for claystone[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(12): 3607—3614.