

• 文章编号: 1000-7598 (2010) 06-1971-06

基于边界元法的边坡矢量和稳定分析

邓 琴, 郭明伟, 李春光, 葛修润

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘 要: 矢量和法物理力学意义明确, 计算简单, 且能根据边坡当前的应力分布状态合理地评价其整体稳定性状态。其中边坡的应力状态通常是采用有限元法来求解。由于边界元法具有研究问题降阶、离散化带来的误差值仅产生在边界以及计算量小等优点, 在工程中得到了广泛应用; 对于平面问题, 以源点作为原点, 以所积分单元的切向和法向为坐标轴建立局部坐标系, 对于线性单元可以得到所有积分的解析解。因此, 可以得到计算区域内部任意点的场变量的解析解, 这就保证了位于边界附近区域场变量的精度。利用边界元法得到二维边坡体内连续的应力分布状态, 使用矢量和法对该边坡进行稳定性分析, 并且与基于有限元的矢量和法、极限平衡法进行对比分析。边坡圆弧滑面和折线滑面的计算结果表明, 基于边界元法得到的矢量和安全系数和基于有限元的矢量和法、极限平衡法基本一致; 边界元法对应的矢量和安全系数对边界单元尺寸不敏感。

关 键 词: 矢量和法; 有限元法; 边界元法; 解析解; 极限平衡法; 安全系数

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

Vector sum method for slope stability analysis based on boundary element method

DENG Qin, GUO Ming-wei, LI Chun-guang, GE Xiu-run

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: The vector sum method (VSM) has clear physical and mechanical definition, simple calculation and gives reasonable assessment of whole stability according to slope stress distribution; and the stress distribution are usually obtained by finite element method (FEM). The boundary element method (BEM) has gotten extensive application to engineering because of reduced order, discretization error only on the boundary and low computational complexity. For plane problem, using the source point serving as origin, the tangent and normal direction of integral element to establish local coordinate system, analytical solutions are obtained for all integrals of linear element. Therefore, analytical solutions for the variables in the region calculated can be acquired; and it guarantees the accuracy and continuity of the variables of region near the border. Using the stress distribution of two-dimensional slope obtained by BEM, together with VSM, the slope stability can be analyzed; the results obtained are compared and analyzed with the VSM based on FEM and the limit equilibrium method (LEM). The results of circle and fold line slip surface slopes show that the vector sum safety factor based on BEM is very close to the VSM based on FEM and LEM; the vector sum factor of safety based on BEM is not sensitive to boundary element size.

Key words: vector sum method; finite element method; boundary element method; analytical solutions; limit equilibrium method; safety factor

1 引 言

边坡稳定分析是一个相对古老, 而又十分重要的工程和学术课题。目前, 研究边坡稳定性已有很多方法, 归纳起来主要有极限平衡法、极限分析法、有限元法和滑移线场法。其中广泛使用的是极限平

衡法和有限元法。极限平衡法是将滑坡体划分为若干垂直的土条, 然后建立作用在这些垂直土条上力的平衡方程式, 计算出极限状态下的抗剪强度与实际剪应力之比, 即为安全系数。稳定系数最小的剪切面就是最危险滑动面。目前, 极限平衡法的主要方法有瑞典圆弧法、Bishop 法、Morgenstern-Price

收稿日期: 2009-09-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 50804044); 中国科学院武汉岩土力学重点实验室开放课题研究(No. Z00601)。

第一作者简介: 邓琴, 女, 1983 年生, 博士研究生, 主要从事岩土力学数值计算方面的研究。E-mail: dengqin_x@163.com

法、Spencer法、Sarma法等。极限平衡法中各种方法之间的区别仅仅在于对相邻条块的内力作何假定,也就是如何增加已知条件将超静定问题变为静定问题。这些假设的条件不同,所满足的平衡条件也不相同^[1]。与极限平衡法相比,有限单元法全面满足静力许可、应变相容和应力-应变之间的本构关系。同时,因为是采用数值分析方法,适于处理非线性、非均质和复杂边界等问题,因此是比较理想的分析边坡应力、变形和稳定的手段^[2]。21世纪初,国内学者开始致力于有限元强度折减法在边坡稳定分析中应用的研究。随着计算精度的提高,这种方法受到国内岩土工程界和设计部门的广泛关注:一方面,扩大了有限元极限分析法的应用范围;另一方面,也开始被一些工程设计部门实际采用。

由于力的矢量特征,抗滑稳定分析就应该在力的矢量特征上进行稳定性分析,因此,基于力的矢量特征意义下的安全系数定义应该更合理一些。矢量和分析法最早是由葛修润提出的,即根据极限抗滑合力矢与下滑合力矢,在边坡整体下滑趋势方向上进行投影来计算安全系数。矢量和法可以配合有限元方法和极限平衡方法来求解安全系数,目前常用的方法是在有限元计算得到的当前应力场基础上,分析潜在滑面应力状态来求解^[3-5]。

近年来,边界元法得到了广泛的应用,其存在的各种问题逐渐被科研工作者解决。针对边界元法中的“边界层效应”^[6],作者采用了一种纯数学的方法解决了当源点靠近边界时求解应力场出现的近奇异问题。因此,本文在边界元法中采用这种方法求解边坡内部的连续应力场的分布,使用矢量和法对其固定滑面进行稳定性分析,并且与基于有限元的矢量和法、极限平衡法进行了对比分析。

2 边界元法求解边坡内部的应力场

2.1 背景介绍

边界元法是在有限元法之后发展起来的一种较精确有效的工程数值分析方法,又称边界积分方程——边界元法。它以定义在边界上的边界积分方程为控制方程,通过对边界离散插值,化为代数方程组求解。边界元法使研究问题降阶、离散化带来的误差值仅产生在边界,并具有计算量小等优点,所以越来越受到工程师的青睐^[7]。

边界元法中常规积分常采用高斯积分。但当源点和边界距离较小时,采用高斯积分就会导致计算结果精度大大降低,甚至得到错误的结果,这种现象称为“边界层效应”^[7]。针对上述问题,科研工作

者做出了很大努力,提出了多种处理方法^[7-11]。文献^[11]给出了各种方法的简单介绍。但至今这些方法都没有得到广泛的应用,主要是因为公式的复杂性、局限性。

作者采用了一种纯数学的方法解决了边界元法中当源点靠近边界时求解应力场出现的近奇异问题。下面给以简单的介绍。

2.2 二维弹性问题的积分公式

在不考虑体力的情况下,对应于边界上的一点*i*,二维弹性问题的边界积分方程为^[12]

$$C^i U^i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* P d\Gamma + \int_V U^* B dV \quad (1)$$

式中: C^i 为一系数矩阵; U^i 为边界上点*i*的位移向量; U 和 P 分别为边界上任意一点的位移和面力向量; P^* 和 U^* 分别是以基本解 P_{ik}^* 和 U_{ik}^* 为元素的矩阵,具体各参数的含义可参考文献^[12]。

区域内任意点*p*的位移和应力可由边界位移和面力的积分形式表达:

$$U_i^p = \int_{\Gamma} U_{ij}^* P_j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^* U_j d\Gamma \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^p = \int_{\Gamma} D_{kij} P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma \quad (3)$$

式中: D_{kij} 、 S_{kij} 分别为 U_{ij}^* 和 P_{ij}^* 的梯度场函数的线性组合。

由于基本解 U_{ij}^* 和 P_{ij}^* 中含有 $1/r$ 项,在 D_{kij} 和 S_{kij} 中必然会出现 $1/r^\alpha$ (α 根据具体问题来取值)。在源点靠近的边界单元上,上述各项若采用常规的数值积分(高斯积分),就会使计算结果精度大大降低。下面就在局部坐标系下研究这些问题。

2.3 局部坐标系

假设在全局坐标系 $x'o'y'$ 中有一源点*p*和单元 $\bar{12}$ 。以源点*p*为原点,以所积分单元的法向*n*为*y*轴、切向为*x*轴建立局部坐标系 xy ,如图1所示,则*x*轴平行于该单元。

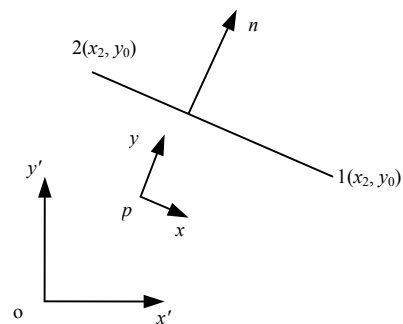


图1 局部坐标系

Fig.1 Local coordinate system

从图 1 可以看出，在局部坐标系下单元 $\bar{12}$ 上的各点具有相同的纵坐标，这样原点 p 到积分单元上任意点的距离就可以表示为 $r = \sqrt{x^2 + (y_0)^2}$ ，其中 x 代表积分单元上任意点的横坐标。

这样经过局部坐标变换，积分中的被积函数将表示为变量 x 的表达式，该特性将大大简化下面的积分过程。

2.4 局部坐标系下的边界积分

以式(3)中的积分 $\int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma$ 涉及的 $\int_{\Gamma} S_{111} \varphi_1 d\Gamma$ 为例，其余各项与之类似。

如图 1 所示，单元 $\bar{12}$ 的长度为

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \quad (4)$$

记

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos(x, x') = \cos(y, y') \\ b &= \cos(x', y) \\ c &= \cos(x, y') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{y_0}{r} \quad (6)$$

$$r_{,x'} = \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} = ar_{,x} + br_{,y} \quad (7)$$

$$r_{,y'} = \frac{\partial r}{\partial y'} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = cr_{,x} + ar_{,y} \quad (8)$$

自然坐标系下，从点 1 到单元上任意点的长度 $\Gamma = \frac{1+\xi}{2}L$ ，因为 $\frac{x_2-x_1}{2} = \frac{x-x_1}{1+\xi}$ ，所以，有：

$$\Gamma = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}L, d\Gamma = \frac{L}{x_2-x_1}dx \quad (9)$$

至此，可以得到积分 $\int_{\Gamma} S_{111} \varphi_1 d\Gamma$ 在单元 $\bar{12}$ 上的解析解：

$$\int_{\Gamma} S_{111} \varphi_1 d\Gamma = C_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r^2} \left[2 \frac{\partial r}{\partial n} (r_1 - 4r_1^3) + 2n_1 r_1^2 + n_1 \right] (x_2 - x) dx = C_0 (2M_1 + 2n_1 M_2 + n_1 M_3) \quad (10)$$

式中： $C_0 = \frac{G\Gamma_i}{2\pi(1-\nu)(x_2-x_1)^2}$ ， n_1 为全局坐标系下

单元的外法向和横坐标的夹角余弦，且 $n_1 = b$ ， $a^2 + b^2 = 1$ 。

$$M_1 = T_a - 4T_b \quad (11)$$

$$M_2 = a^2 Q_C + 2ab Q_A + b^2 Q_B \quad (12)$$

$$M_3 = \frac{x_2}{y_0} S_a - \frac{1}{2} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad (13)$$

这里，有：

$$T_a = aQ_A + bQ_B \quad (14)$$

$$T_b = a^3 y_0 L_A + 3a^2 b y_0^2 L_B + 3ab^2 y_0^3 L_C + b^3 y_0^4 L_D \quad (15)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} Q_A &= \frac{y_0(x_2-x_1)}{2D_1} - \frac{S_a}{2} \\ Q_B &= \frac{x_2}{2} \left(D_D + \frac{S_a}{y_0} \right) + \frac{y_0^2}{2} D_A \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$S_a = \arctan \left(\frac{x_2}{y_0} \right) - \arctan \left(\frac{x_1}{y_0} \right) \quad (17)$$

$$D_i = x_i^2 + y_0^2 (i=1,2) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_A &= \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}, D_B = \frac{1}{(D_2)^2} - \frac{1}{(D_1)^2} \\ D_C &= \frac{x_2}{(D_2)^2} - \frac{x_1}{(D_1)^2}, D_D = \frac{x_2}{D_2} - \frac{x_1}{D_1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} L_A &= \frac{y_0^2}{4} \frac{x_1-x_2}{(D_1)^2} - \frac{3S_a}{8y_0} + \frac{1}{8} \left(\frac{x_2}{D_2} + \frac{4x_2-5x_1}{D_1} \right) \\ L_B &= \frac{x_2}{8y_0^2} \left(D_D + \frac{S_a}{y_0} \right) - \frac{x_2}{4} D_C + \frac{D_A}{2} - \frac{y_0^2}{4} D_B \\ L_C &= \frac{x_2-x_1}{4(D_1)^2} - \frac{1}{8y_0^2} \left(D_D + \frac{S_a}{y_0} \right) \\ L_D &= \frac{x_2}{4y_0^2} \left[D_C + \frac{3}{2y_0^2} \left(D_D + \frac{S_a}{y_0} \right) \right] + \frac{D_B}{4} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这样，上述积分就完全转化为解析表达式。

至此，可以得到位于边界附近区域场变量的解析解，这为下一步工作奠定了基础。

3 边坡平面问题的矢量和分析法

边坡稳定性安全系数 K 最原始的定义为潜在滑动面上总的抗滑能力 R 与总的下滑能力 T 的比值，即

$$K = \frac{R}{T} \quad (21)$$

由于抗滑力与下滑力都是矢量，所以式(21)中对抗滑力与下滑力的求和都应该是矢量的求和。因此，最经典抗滑稳定安全系数 K 的概念和定义应该是：坡体在受各种荷载（包括自重）作用条件下，潜在滑动面所能提供的极限抗滑力的“总和”与作用在潜在滑动面上滑动力的“总和”之比^[4]。这样的定义是非常直观和朴实的。

3.1 矢量和法中整体下滑趋势方向

矢量和分析方法中最关键的是求解边坡整体下

滑趋势方向和当前外部荷载条件下的应力状态。边坡体当前应力状态可由有限元、边界元等数值方法得到。关于边坡整体下滑趋势方向的确定,文献[13]进行了专门的讨论,并给出了确定边坡整体下滑趋势方向的合理方法,即通过潜在滑面各点极限抗滑剪力沿潜在滑面积分得到的单位方向的反方向,这样才能合理地确定边坡的整体下滑趋势方向。基于矢量和方法的边坡临界滑面搜索结果^[14],表明了该方法在边坡稳定性分析中的合理性和适用性。

3.2 矢量和法安全系数表达式

对于二维边坡矢量和分析方法,文献[4]给出了矢量和法安全系数的标量表达式,文献[13-14]给出了其矢量表达式。为避免重复,在此只给出矢量和法安全系数最终的矢量表达式,具体公式推导可参考上述文献。矢量和法安全系数可由式(21)表示,其中 R 、 T 可表达为

$$R = \int_S \sigma'_s (-\hat{d}) dS \quad (22)$$

$$T = \int_S (\sigma'_s \cdot \hat{d}) dS \quad (23)$$

式中: σ'_s 为滑面上任一点 A 对基岩的应力矢量; σ'_s 为基岩上对应的 A' 点对滑面的最大抗滑应力矢量; \hat{d} 为边坡整体下滑趋势方向; S 为潜在滑面。

4 计算实例

为了便于比较,采用极限平衡法(采用其中的M-P法)搜索得到的滑面为基础,使用3种数值方法进行安全系数的比较。其中基于有限元法得到的边坡应力分布采用大型有限元软件 ABAQUS 计算得到,边界元法得到的边坡应力分布采用自己编制的程序来实现,其中关于边坡内部应力的计算采用了前面介绍的方法,同时分析边坡在弹性、弹塑性应力状态下矢量和法安全系数的变化和边界单元长度大小对计算结果的影响。

4.1 圆弧滑动面

(1) 材料参数及计算模型

此例参考文献[15]。边坡材料参数黏聚力 $c = 58.86 \text{ kPa}$, 摩擦角 $\varphi = 11.31^\circ$, 重度 $\gamma = 19.62 \text{ kN/m}^3$, 弹性模量和泊松比分别为 $E = 80 \text{ MPa}$ 、 $\nu = 0.43$ 。边界条件为底部约束,两侧面法向约束,边坡只受重力作用。边坡模型尺寸如图2所示。有限元计算采用4节点单元,共划分19673个单元。边界元计算时边界单元长度取10m。

(2) 两种应力状态下的矢量和法分析

矢量和法是基于边坡当前应力状态和整体下滑

趋势方向的分析方法,边坡体在不同的应力状态下计算得到的矢量和法安全系数应有所不同。采用有限元法对该算例进行应力分析,分别计算边坡体在弹性和理想弹塑性本构关系下的应力分布状态,并在此基础上分别求解矢量和法安全系数和整体下滑趋势方向角(参考文献[14]),计算结果见表1。结果表明,在有限元弹性及弹塑性应力状态下矢量和法安全系数和方向角基本一致。

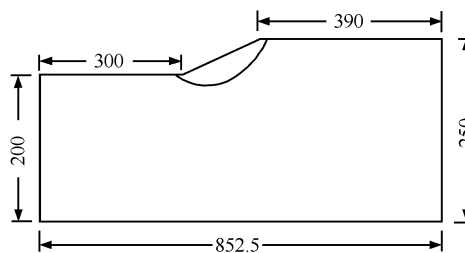


图2 模型尺寸及滑面位置(单位: m)

Fig.2 Size of the model and the location of slip surface (unit: m)

表1 两种应力状态下的矢量和法分析

Table 1 Vector sum method analysis under two stress states

安全系数		方向角/(°)	
弹性	弹塑性	弹性	弹塑性
1.358	1.356	13.817	13.832

(3) 3种计算方法得到的安全系数

为了验证矢量和法在边坡稳定性分析中的可靠性,分别采用极限平衡法、矢量和法结合有限元法、矢量和法结合边界元法对该算例进行稳定性分析。由表1可知,矢量和法在边坡弹性应力状态下与理想弹塑性应力状态下求解得到的安全系数及整体下滑方向基本一致。为了简化计算,这里的矢量和结合有限元法及结合边界元法只考虑边坡的弹性应力状态,即采用有限元及边界元对边坡体进行弹性应力计算,并在此应力分布的基础上求解矢量和法安全系数及整体下滑趋势方向,计算结果见表2。计算结果表明,3种不同的方法得到的安全系数差别不大,以极限平衡法得到的安全系数为标准,则矢量和法结合有限元法与结合边界元的相对误差分别为0.15%、3.65%。

表2 3种计算方法得到的安全系数

Table 2 Safety factors with three methods

计算方法	安全系数	方向角/(°)
极限平衡法(M-P)	1.360	
有限元法+矢量和法	1.358	13.817
边界元法+矢量和法	1.410	13.711

(4) 边界单元长度的敏感性分析

为了考察边界元法分析时单元尺寸对矢量和法安全系数的影响，对不同的边界尺寸进行了应力分析，并得到了矢量和法安全系数及整体下滑方向，计算结果见表 3。结果表明，单元边界尺寸越小，得到的边坡体应力状态就越精确，矢量和法安全系数随着边界尺寸的减小而减小，并逐渐接近于极限平衡法得到的安全系数。

表 3 不同单元长度下的安全系数

Table 3 Safety factors with different element lengths

边界单元长度/m	安全系数	方向角/(°)
40	1.420	13.706 0
20	1.412	13.715 0
10	1.409	13.711 5
5	1.408	13.708 5

4.2 折线滑动面

(1) 材料参数及计算模型

此例参考文献[16]。边坡剖面几何特征和材料特性见表 4、5。模型尺寸及滑面位置如图 3 所示。有限元计算时采用 4 节点单元，共划分 4 855 个单元。边界元计算时边坡单元长度取 2 m。

表 4 滑面控制点坐标

Table 4 Coordinates of control points for sliding surface

X/m	Y/m
41.85	27.75
44.00	26.50
63.50	27.00
73.31	40.00

表 5 边坡材料参数

Table 5 Material parameters for slope

土层编号	c /kPa	φ / (°)	γ /(kN/m ³)	E /kPa	ν	K_0
1#	28.5	20.0	18.84	6.0×10^4	0.25	0.65
2#	0.0	10.0	18.84	2.0×10^3	0.25	0.65

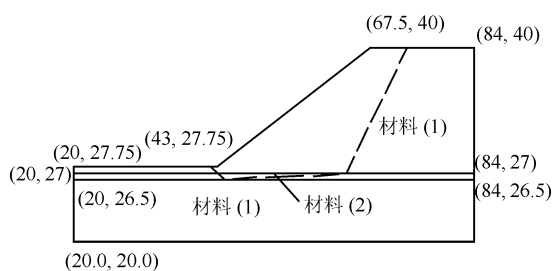


图 3 模型尺寸及滑面位置 (单位: m)

Fig.3 Size of the model and the location of slip surface

(2) 两种应力状态下的矢量和法分析

与算例 1 相似，采用有限元算法计算边坡在弹性及弹塑性本构关系下的应力分布状态，并计算矢量和法安全系数及下滑方向角，结果如表 6 所示。

表 6 两种应力状态下的矢量和法分析

Table 6 Vector sum method analysis under two stress states

安全系数		方向角/(°)	
弹性	弹塑性	弹性	弹塑性
1.221	1.204	31.562	31.317

(3) 3 种计算方法得到的安全系数

同算例 1，分别采用 3 种方法对该算例进行计算，得到的安全系数见表 7。若以极限平衡法为标准，则矢量和法结合有限元及边界元得到的矢量和法安全系数的相对误差分别为 3.16%、3.69%。

表 7 3 种计算方法得到的安全系数

Table 7 Safety factors with three methods

计算方法	安全系数	方向角/(°)
极限平衡法 (M-P)	1.261	
有限元法+矢量和法	1.221	31.306
边界元法+矢量和法	1.214	32.367

(4) 边界单元长度的敏感性分析

同算例 1，在矢量和结合边界元分析时，考察了不同的边界单元尺寸对矢量和法安全系数的影响，计算结果见表 8。

表 8 不同单元长度下的安全系数

Table 8 Safety factors with different element lengths

边界单元长度/m	安全系数	方向角/(°)
10	1.252	32.651
5	1.225	32.593
2	1.214	32.367
1	1.211	32.338

5 结果分析

通过以上两个算例的比较，可以得出以下结论：

(1) 基于边界元法的矢量和法安全系数与基于有限元的安全系数、极限平衡法安全系数基本一致，因此，基于边界元法的矢量和安全系数是合理的和可靠的。

(2) 表 1 和表 6 表明，边坡矢量和法安全系数在弹性和弹塑性状态下基本一致，且弹性状态下得到的安全系数稍大于弹塑性应力状态下得到的安全系数。这是因为矢量和法安全系数的定义是抗滑力和滑动力在整体下滑趋势方向上的投影比值。边坡

在重力或者外界荷载的作用下,对于边坡体内任一滑面,滑面上所受到的合力(滑动力)是与自重等外荷载相平衡的。滑面无论处于弹性应力状态或弹塑性应力分布状态,沿滑面上的整体滑动力是不变的。如果整体下滑趋势方向是固定的,则滑动力在整体下滑趋势方向上的投影也是不变的。弹塑性应力状态只不过是在弹性应力状态基础上对不满足剪切强度准则部分的剪应力向周围区域不断转移的结果,而在滑面剪应力调整的过程中滑面上任意点的法向应力变化很小,所以沿滑面上的整体抗滑力的变化也很小,从而两种应力状态下矢量和安全系数的变化是很小的。因此,在边坡矢量分析中可以使用简单的弹性计算得到边坡体在各种荷载作用的抗滑稳定性安全系数。

(3)表3和表8的结果表明,边界单元尺寸的大小对安全系数的影响很小。这样,计算边坡安全系数就不需要花大量的时间考虑单元尺寸的选取,大大简化了计算过程,提高了工作效率。

6 结 语

边界元法具有降阶、离散化带来的误差值仅产生在边界和计算量小等优点,矢量和法物理学意义明确,计算简单。将边界元法用于求解边坡的场变量,利用矢量和法求解边坡的安全系数,这种方法具备了二者的优点,为工程界计算边坡抗滑稳定性安全系数提供了一种新的方法。

参 考 文 献

- [1] 苗立忠, 刘杰峰, 王宝泉. 边坡稳定性分析方法简述[J]. 建筑与预算, 2009, (1): 95—96.
MIAO Li-zhong, LIU Jie-feng, WANG Bao-quan. Briefing on methods of slope stability[J]. **Construction and Budget**, 2009, (1): 95—96.
- [2] 张玉浩, 张立宏. 边坡稳定性分析方法及其研究进展[J]. 广西水利水电, 2005, (2): 13—16.
ZHANG Yu-hao, ZHANG Li-hong. Slope stability analysis method and study development[J]. **Guangxi Water Resources & Hydropower Engineering**, 2005, (2): 13—16.
- [3] 葛修润. 用 PC 型微机对岩体工程课题进行有限元分析[C]/第一届全国计算岩土力学研讨会论文集. 成都: 西南交通大学出版社, 1987: 74—85.
- [4] 刘艳章. 边坡与坝基抗滑稳定的矢量和分析法研究[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2007.
- [5] 刘艳章, 葛修润, 李春光, 等. 基于矢量法安全系数的边坡与坝基稳定分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(10): 2130—2140.
LIU Yan-zhang, GE Xiu-run, LI Chun-guang, et al. Stability analysis of slope and dam foundation based on vector method safety factor[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(10): 2130—2140.
- [6] 周焕林. 边界元法中边界层效应和薄体问题的研究[博士学位论文 D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2003.
- [7] 杨德全, 赵忠生. 边界元理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002.
- [8] ZHANG X S, ZHANG X X. Exact integration in the boundary element method for two-dimensional elastostatic problems[J]. **Engineering Analysis with Boundary Element**, 2003, 27(10): 987—97.
- [9] GHOSH N, RAJIYAH H, GHOSH S, et al. A new boundary element formulation for linear elasticity[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1986, 53(1): 69—76.
- [10] GAO X W, YANG K, WANG J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals[J]. **Engineering Analysis with Boundary Element**, 2008, 32(8): 692—696.
- [11] GAO XIAO WEI. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals-Theory and Fortran code[J]. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 2006, 188(1): 44—64.
- [12] 蔡瑞璜, 曾昭景, 黄文龙. 边界元法程序设计及工程应用[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1996.
- [13] 郭明伟, 李春光, 葛修润. 基于矢量和分析方法的边坡滑面搜索[J]. 岩土力学, 2009, 30(6): 1775—1781.
GUO Ming-wei, LI Chun-guang, GE Xiu-run. Searching potential slip surface of slopes based on the vector sum analysis method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(6): 1775—1781.
- [14] ZHENG H, LIU D F, LI C G. Slope stability analysis based on elasto-plastic finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 64(14): 1871—1888.
- [15] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.