

文章编号: 1000-4750(2017)11-0018-08

# 基于MLS-NMM的摩擦接触问题研究

李伟<sup>1,2</sup>, 郑宏<sup>1,2</sup>, 郭宏伟<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北, 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 摩擦接触问题的求解是将基于移动最小二乘插值的数值流形法(MLS-NMM)应用到裂纹扩展的必经之路。该文通过结合罚-线性互补方式的施加接触边界条件, 并使用拉格朗日乘子法施加本质边界条件, 得出一套基于MLS-NMM的摩擦接触问题的求解体系。该方法无需节点与边界重合, 则可域外布点和均匀布点, 来提高插值精度和降低布点难度, 尤其是接触边界处。采用罚-线性互补的方式施加接触条件, 使计算格式统一而简洁, 利于编程实现。通过算例表明, 该方法能准确地模拟接触面的张开、黏结和滑动状态, 证明该方法对求解摩擦接触问题是可行的、有效的。

**关键词:** 移动最小二乘插值; 数值流形法; 摩擦接触; 线性互补法; 裂纹扩展

中图分类号: O346.1; TU457 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.07.0552

## THE RESEARCH OF FRICTIONAL CONTACT PROBLEM BASED ON MLS-NMM

LI Wei<sup>1,2</sup>, ZHENG Hong<sup>1,2</sup>, GUO Hong-wei<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering,

Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** The solution of frictional contact problems is vital to the simulation of crack propagation in the MLS-based numerical manifold method (MLS-NMM). Through the application of penalty-linear complementarity model for contact constraint conditions and Lagrange multiplier method for imposing essential boundary condition, this study presents the solving method of frictional contact problems using MLS-NMM. The method does not require the nodes on the boundaries, which means that the nodes may be outside of domain and uniformly distributed. Thus it can improve the interpolation precision and reduce the difficulty of the distribution for nodes, especially for those on contact boundaries. The use of penalty-linear complementarity model can make the calculation format unified and concise, which is favorable for programming. Numerical examples show that the proposed method can accurately simulate the contact state of opening, bonding and slipping. The method is a feasible and effective solution for frictional contact problem.

**Key words:** moving least squares interpolation; numerical manifold method; frictional contact; linear complementary method; crack propagation

岩体中存在大量的节理和裂纹等不连续界面, 它们是影响岩体物理力学性质的重要因素, 所以它们是岩体的数值模拟必须克服的障碍。这些不连续的裂纹, 在岩体中有不同的存在形态, 主要有张开

型裂纹和闭合型裂纹。相对于张开型裂纹, 闭合型裂纹的数值模拟更加复杂, 它要考虑裂纹面的接触摩擦问题。而此问题是复杂的非线性问题, 对该问题的数值求解是非常具有挑战性的。

收稿日期: 2016-07-20; 修改日期: 2016-11-27

基金项目: 国家973项目(2014CB047100); 国家自然科学基金项目(11572009, 51538001)

通讯作者: 李伟(1988—), 男, 山东人, 博士生, 主要从事计算岩石力学研究(E-mail: liw9012@163.com).

作者简介: 郑宏(1964—), 男, 湖北人, 教授, 博士, 博导, 主要从事计算岩石力学研究(E-mail: hzheng@whrsm.ac.cn);

郭宏伟(1989—), 男, 湖北人, 博士生, 主要从事计算岩石力学研究(E-mail: ghway0723@gmail.com).

目前,对接触摩擦问题的数值模拟方法主要有有限元法<sup>[1-2]</sup>、扩展有限元法<sup>[3-5]</sup>、无网格伽辽金法<sup>[6-7]</sup>和数值流形法<sup>[8-9]</sup>等。文献[10-11]已经对它们进行评述。此外,钟志鹏等<sup>[12]</sup>采用逐点 Lagrange 乘子法求解巴西圆盘中心裂纹在压剪荷载作用下裂纹面可能发生的摩擦接触问题。薛冰寒等<sup>[13]</sup>提出了求解弹性摩擦接触问题的 IGA-B 可微方程组方法。而基于移动最小二乘的数值流形法(MLS-NMM)是由 Zheng 和 Liu 等<sup>[14]</sup>提出的,它是根据常规数值流形法(基于有限元网格的数值流形法)的思路,利用移动最小二乘插值(MLS)的单位分解性质,用节点的影响域来构造数学片,通过不同物理边界的切割相应的数学片生成物理片,最终得到数学覆盖和物理覆盖两套覆盖系统的方法。此方法兼有 MLS 的高插值精度特性和数值流形法处理连续和非连续问题的统一性的特性,丰富发展了数值流形法,为数值流形法的研究注入新的活力。此方法可以使节点布置均匀和域外布点,这样能提高全域的求解精度,尤其是边界处。此外,物理片上局部近似解的准确性,将直接影响整体解的精度,所以更加注重物理片上局部解的构造。该方法现已成功应用到张开型裂纹扩展模拟<sup>[14-15]</sup>和无压渗流问题<sup>[16]</sup>中。作者的目的是将该方法的应用进行扩展,使其能准确地模拟闭合型裂纹扩展。而接触摩擦问题的研究,是闭合型裂纹扩展研究的必经之路。

采用罚-线性互补的方式来施加接触条件的方法是由朱昌铭<sup>[17]</sup>提出的,它具有形式简洁,可使用成熟的 Lemke 算法求解的优势。余天堂<sup>[5]</sup>将其应用到基于扩展有限元的摩擦问题的分析中,马文涛<sup>[7]</sup>将其应用到基于无网格伽辽金法的摩擦问题的求解。

本文将结合 MLS-NMM 法,采用罚-线性互补的方式施加接触条件,并使用拉格朗日乘子法施加本质边界条件,建立了摩擦接触问题的求解格式。通过三个算例验证了本文方法求解摩擦接触问题的可行性。

### 1 MLS-NMM

图 1 表示一个含有裂纹的求解域,数学节点布置均匀且可布置在域外。本文采用矩形影响域来构造数学片,方框的中心点和对应的方框表示一个数学节点及其对应的数学片。 $M_i$  表示第  $i$  个数学片,阴影部分表示物理片  $P_{i,j}$ (数学片  $M_i$  经切割生成物理

片  $P_{i,j}$ )。 $MP_i$  表示第  $i$  个数学节点, $PP_{i,j}$  表示对应  $P_{i,j}$  的物理节点。下面简要介绍几种典型物理片的生成方式: $MP_1$  位于域内且  $M_1$  不被边界和裂纹切割,则  $P_1=M_1$ ,  $PP_1=MP_1$ ;  $MP_2$  位于域外且  $M_2$  被边界切割,生成  $P_2$ ,  $PP_2=MP_2$ ;  $MP_3$  位于域内且  $M_3$  被边界切割,生成  $P_3$ ,  $PP_3=MP_3$ ;  $MP_4$  位于域内且  $M_4$  被裂纹切穿,生成两个物理片  $P_{4-1}$  和  $P_{4-2}$ , 两个物理节点  $PP_{4-1}=PP_{4-2}=MP_4$ ;  $MP_5$  位于域外且  $M_5$  被边界和裂纹切穿,生成两个物理片  $P_{5-1}$  和  $P_{5-2}$ , 两个物理节点  $PP_{5-1}=PP_{5-2}=MP_5$ ;  $MP_6$  位于域内且  $M_6$  未被边界和裂纹完全切割且含裂尖,生成一个奇异物理片  $P_6$ ,  $PP_6=MP_6$ 。

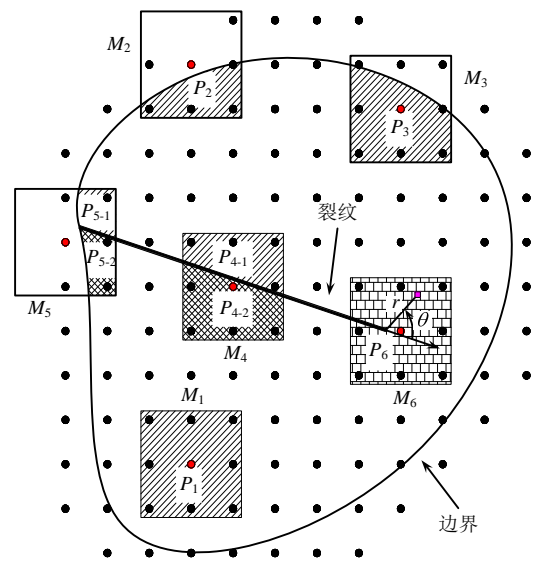


图 1 含有裂纹的求解域

Fig.1 A computational domain containing crack

从以上的分析中,根据构造物理片上局部准确近似解的不同,可将物理片分为普通物理片(如  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_{4-1}$ 、 $P_{4-2}$ 、 $P_{5-1}$ 、 $P_{5-2}$ )和奇异物理片(如  $P_6$ )。本文对普通物理片采用 0 阶近似,对奇异物理片在 0 阶近似的基础上扩充基函数<sup>[14]</sup> $c$ 。

$$c = \left[ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \quad \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \quad \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2} \quad \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (1)$$

式中,  $r$  和  $\theta$  的定义如图 1 中奇异物理片  $P_6$  所示。

将普通物理片和奇异物理片的局部近似函数写成统一格式为:

$$u_i^h = I_2 u_i + E_i A_i \quad (2)$$

式中:  $I_2$  为  $2 \times 2$  的单位矩阵;  $u_i$  为常规自由度;

$$E_i = \begin{bmatrix} c_i & 0_4 \\ 0_4 & c_i \end{bmatrix}, \quad A_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4, b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^4)$$

为广义自由度,当为普通物理片时,式(2)的第二项

去掉即可。

采用移动最小二乘插值(MLS)<sup>[18]</sup>记为  $\varphi$  作为权函数, 得到一个全局近似函数:

$$\mathbf{u}^h = \Phi \mathbf{U} \quad (3)$$

式中:  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_p}]$ ;  $\mathbf{U} = [p_1, p_2, \dots, p_{n_p}]$ ,

$\Phi_i = [\varphi_i \mathbf{I}_2, \varphi_i \mathbf{E}_i]$ ,  $p_i = (u_i^T, A_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_p$ ,  $n_p$  为物理片的总数。

## 2 摩擦接触的罚—线性互补格式

在二维小变形情形下, 设接触体系为  $\Omega_A$ 、 $\Omega_B$  两个物体组成, 接触边界为  $\Gamma_c$ , 如图 2 所示。则定义接触面上对应点的法向和切向位移分别为  $(u_n^A, u_\tau^A)$  和  $(u_n^B, u_\tau^B)$ , 接触应力为  $p_n$ 、 $p_\tau$  (作用在物体  $\Omega_B$  的接触力, 方向与弹性力学假设相符)。所以接触面上对应点的相对位移为:

$$\begin{cases} \Delta u_n = u_n^A - u_n^B + g_n \\ \Delta u_\tau = u_\tau^A - u_\tau^B \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $g_n$  为法向初始间隙。

1) 法向接触条件

$$\Delta u_n \geq 0, \quad p_n \leq 0, \quad p_n \Delta u_n = 0 \quad (5)$$

三个式子, 依次表示为非侵入条件、法向不受拉条件和互补条件。

2) 切向接触条件

使用 M-C 摩擦定律, 则表示为:

$$\begin{cases} |p_\tau| < -\mu p_n + c, \text{黏结} \\ |p_\tau| = -\mu p_n + c, \text{滑动} \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\mu$  为摩擦系数;  $c$  为粘聚力。

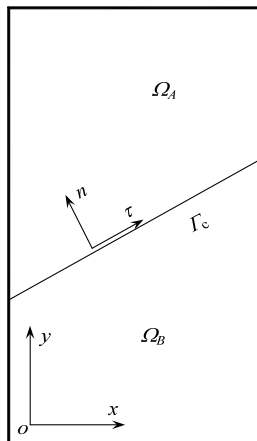


图 2 接触体系示意图

Fig.2 The schematic diagram of contact

参照文献[17], 式(5)、式(6)可参照理想刚塑性体单向应力-应变关系的表述为:

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} p_\tau \\ -p_\tau \\ p_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} p_\tau + \mu p_n - c \\ -p_\tau + \mu p_n - c \\ p_n \end{Bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{u}_c^p = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}_c} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (7)$$

$$\Delta \mathbf{u}_c = \Delta \mathbf{u}_c^e + \Delta \mathbf{u}_c^p \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad \mathbf{f} \leq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = 0 \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{p}_c = [p_\tau \quad p_n]^T$ ;  $\Delta \mathbf{u}_c^p = [\Delta u_\tau^p \quad \Delta u_n^p]^T$  为塑性位移值;  $\mathbf{g}$  为接触滑动势函数;  $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{p}_c$  表示切向和法向相对滑动位移的方向;  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$  表示接触点切向和法向滑动量的大小;  $\mathbf{f}$  为接触滑动函数。

引入惩罚因子, 可将式(7)、式(8)和式(9)另写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_c &= \mathbf{D}_c \Delta \mathbf{u}_c^e = \mathbf{D}_c (\Delta \mathbf{u}_c - \Delta \mathbf{u}_c^p) = \\ &\mathbf{D}_c \left( \Delta \mathbf{u}_c - \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}_c} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \right) = \mathbf{D}_c (\Delta \mathbf{u}_c - \mathbf{m}_g \boldsymbol{\lambda}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} E_\tau & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{m}_g = (\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{p}_c)^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E_\tau \text{ 和 } E_n \text{ 分别为切向和法向的罚因子。}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{m}_c^T \mathbf{p}_c + \mathbf{C} = \mathbf{m}_c^T \mathbf{D}_c (\Delta \mathbf{u}_c - \mathbf{m}_g \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{C} \leq 0 \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{m}_c = (\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{p}_c) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \mu & \mu & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = [-c \quad -c \quad 0]^T.$$

为了便于计算, 引入松弛变量  $\mathbf{v}^T = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$ , 则接触问题的线性互补关系为:

$$\begin{cases} \mathbf{f} + \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{f}$  即由式(12)确定。

通过拉格朗日乘子法施加本质边界条件则得到含裂纹结构的混合变分方程为:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Gamma_c} \delta (\Delta \mathbf{u}_c^T) \mathbf{D}_c (\Delta \mathbf{u}_c) d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \delta (\Delta \mathbf{u}_c^T) \mathbf{D}_c \mathbf{m}_g \boldsymbol{\lambda} d\Gamma + \\ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{P}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵;  $\mathbf{b}$  为体力;  $\bar{\mathbf{t}}$  为应力边界上的面力;  $\mathbf{P}$  表示为位移边界上力的负值(即拉氏乘

子);  $\bar{u}$  为位移边界上的已知位移。

式(12)和式(13)联立就可得到问题的解。

### 3 MLS-NMM 离散控制方程

式(13)含有接触面的积分, 因此必须对接触面进行离散, 面面接触。将接触面划分为有限区段。每个区段两侧布设相同数目的高斯点, 组成接触点对。对于某一个接触点对, 由式(4)求其相对位移为:

$$\Delta u_c = R\Phi_c U \quad (14)$$

式中:  $R = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix}$ ,  $n_x$  和  $n_y$  分别为裂纹面  $\Gamma_c$  的法向方向余弦;  $\Phi_c = \Phi_c^A - \Phi_c^B$ ,  $\Phi_c^A$  和  $\Phi_c^B$  为高斯点对对应于  $\Omega_A$  和  $\Omega_B$  的形函数。

将式(14)代入式(13)中得:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K & T \\ T^T & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix}}_{\bar{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{H}} \bar{\lambda} + \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ f_u \end{bmatrix}}_{\bar{f}} \quad (15)$$

式中:

$$K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega + \int_{\Gamma_c} \Phi_c^T R^T D_c R \Phi_c d\Gamma,$$

$$T = \int_{\Gamma_u} \Phi^T \Phi_p d\Gamma,$$

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_N],$$

$$h_i = \Phi_{ci}^T R^T D_c m_g w_i J_i,$$

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1^T \quad \lambda_2^T \quad \dots \quad \lambda_N^T]^T,$$

$$f = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma,$$

$$f_u = \int_{\Gamma_u} \Phi_p^T \bar{u} d\Gamma,$$

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_p],$$

$$B_l = \begin{bmatrix} \partial\Phi_l / \partial x & 0 & \partial\Phi_l / \partial y \\ 0 & \partial\Phi_l / \partial y & \partial\Phi_l / \partial x \end{bmatrix}^T$$

$N$  为接触面上高斯点的总数目;  $w_i$  高斯点权重;  $J_i$  为雅可比矩阵的行列式值;  $\Phi_p$  是用于插值  $P$  的线性拉格朗日形函数。

将式(14)代入式(12)得:

$$\begin{cases} M_g U + \bar{C} - M_c \bar{\lambda} + v = 0 \\ \bar{\lambda}^T v = 0, \quad v, \bar{\lambda} \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中:

$$M_g = [m_{g1}^T, \quad m_{g2}^T, \quad \dots, \quad m_{gN}^T]^T,$$

$$m_{gi} = m_c^T D_c R \Phi_{ci}, \quad M_c = \begin{bmatrix} m_{c1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{cN} \end{bmatrix},$$

$$m_{ci} = m_c^T D_c m_g, \quad \bar{C} = [C^T, C^T, \dots, C^T]_{1 \times 3N}^T.$$

为了便于编程令  $\bar{M}_g = [M_g \quad 0]$ , 使  $0$  矩阵的行数与  $M_g$  相同, 列数与  $\bar{U}$  中  $P_u$  的数目相同, 易知  $\bar{M}_g \bar{U} = M_g U$ 。所以, 由式(15)解得  $\bar{U} = \bar{K}^{-1}(\bar{H}\bar{\lambda} + \bar{f})$  代入式(16)中得:

$$\begin{cases} v - M\bar{\lambda} = \bar{q} \\ \bar{\lambda}^T v = 0, \quad v, \bar{\lambda} \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $M = M_c - \bar{M}_g \bar{K}^{-1} \bar{H}$ ;  $\bar{q} = -\bar{M}_g \bar{K}^{-1} \bar{f} - \bar{C}$ 。

式(17)是标准的线性互补问题, 即可使用成熟的 Lemke 法进行求解。

### 4 算例

下面的算例, 在所有的接触直线段部分, 都划分为 10 段, 每段布置 5 个高斯积分点。

#### 4.1 算例 1

此算例<sup>[3-4,19]</sup>已被广泛用来验证在非均匀的压荷载作用下接触面处的黏结和滑动行为。示意图见图 3, 1 m×1 m 的方板, 在  $y = 0.5$  m 处是接触面, 弹性模量为  $E_1 = E_2 = 10$  GPa, 泊松比  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 。顶部施加竖向位移  $u_y = (0.09x - 0.1)$  m 和水平位移  $u_x = 0.05$  m, 底部完全固定。

本文为了将计算结果与文献[4]比较, 也将考虑  $\mu_1 = 0.1$  和  $\mu_2 = 0.4$  两种情形, 在接触面的法向刚度取为  $k_n = k_s = 10^5 \times E$ 。为验证结果的收敛性, 取数学节点的间距为  $h$  为 0.1 m、0.05 m、0.025 m 和 0.04 m。节点间距  $h = 0.05$  m 的数学节点布置如图 4, 其他间距的数学节点布置类似, 都保证域外的点到外边界的最短距离为  $0.5h$ 。本例取  $2h$  作为生成数学片半径的尺寸。

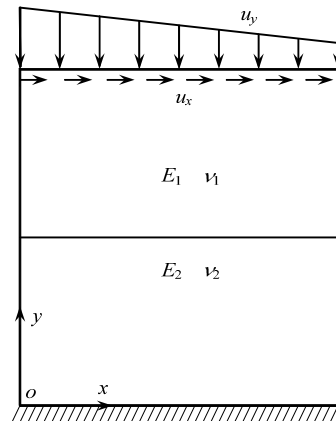


图 3 算例 1 计算简图

Fig.3 The calculation diagram for first example

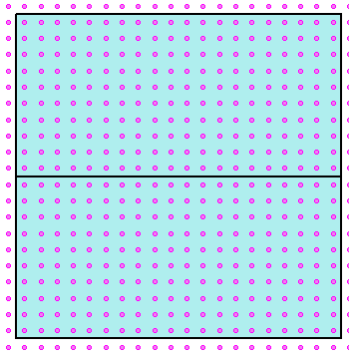


图 4 间距  $h=0.05$  m 的数学节点布置图

Fig.4 Math points layout for the first example when  $h=0.05$  m

本例的计算结果与文献[4]的计算结果(限于篇幅参考文献的结果不在列出)基本一致。计算结果显示随数学节点间距的减小,计算结果会收敛到一个固定解。

当接触面的摩擦系数取  $\mu_1$  时,从图 5(接触面上摩擦系数为  $\mu_1$  时切向滑动量分布图)中易知此时整个接触面处于滑动状态,对应于图 6(接触面上摩擦系数为  $\mu_1$  时接触应力分布图)可知,接触面上的接触切向应力呈递减的趋势,而接触法向应力的值受外部荷载的作用也是递减的。

当接触面的摩擦系数取  $\mu_2$  时,因为  $\mu_2 > \mu_1$ ,则抗滑摩擦力增大。从图 7(接触面上摩擦系数为  $\mu_2$  时切向滑动量分布图)知,大约在  $0 \leq x < 0.2$  m 的范围内,接触面处于黏结状态,  $0.2 \text{ m} < x \leq 1 \text{ m}$  范围内处于滑动状态。此外,图 8(接触面上摩擦系数为  $\mu_2$  时接触力分布图)中接触切应力的变化趋势是先增大后减少,转折的地方也恰恰是黏结和滑动状态的转变处,这说明切应力的变化趋势能间接地反映出接触状态的变化。

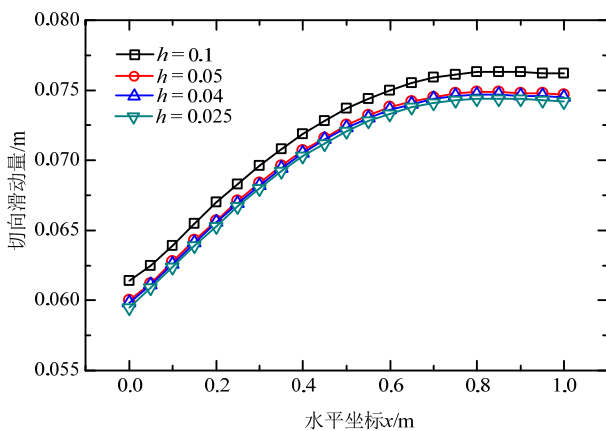


图 5 接触面上摩擦系数为  $\mu_1$  时切向滑动量分布

Fig.5 The distribution of tangential slip for  $\mu_1$

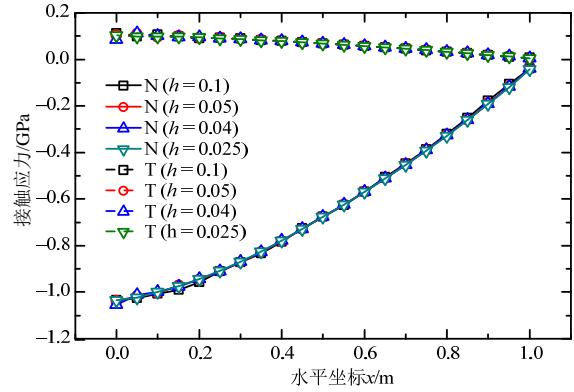


图 6 接触面上摩擦系数为  $\mu_1$  时接触应力分布图 (N 代表法向接触应力, T 代表切向接触应力)

Fig.6 The distribution of contact stress for  $\mu_1$  ('N' and 'T' represent the normal and tangential contact stress respectively)

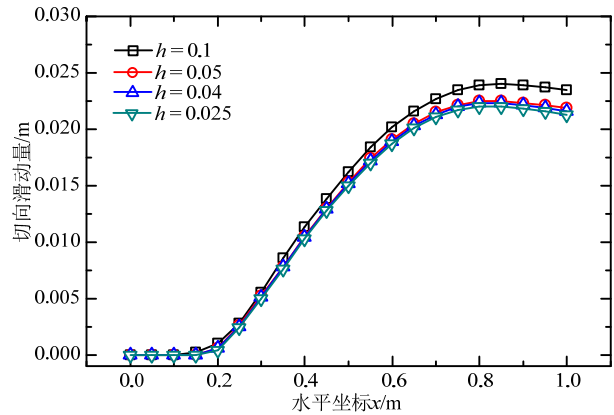


图 7 接触面上摩擦系数为  $\mu_2$  时切向滑动量分布

Fig.7 The distribution of tangential slip for  $\mu_2$

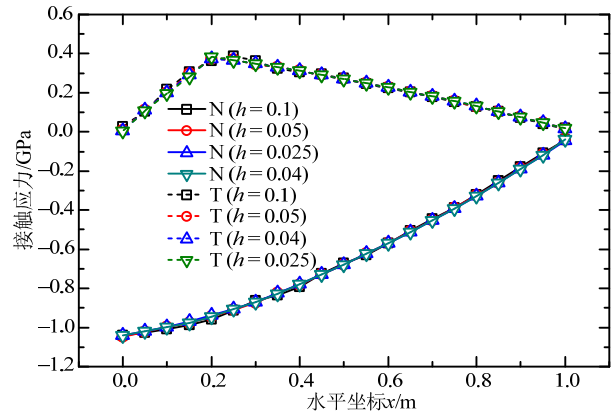


图 8 接触面上摩擦系数为  $\mu_2$  时接触应力分布 (N 代表法向接触应力, T 代表切向接触应力)

Fig.8 The distribution of contact stress for  $\mu_2$  ('N' and 'T' represent the normal and tangential contact stress, respectively)

从图 5 和图 7 中可知,接触法向应力的值是不随摩擦系数的变化而变化的,这也与实际多接触摩擦的认识是相符的。

### 4.2 算例 2

此例是考虑刚性基础上的弹性块问题,它虽然

简单和理想化，但它很适合阐明方法的有效性，也已被大量论文所使用，如文献[19—21]，其计算尺寸如图9所示。

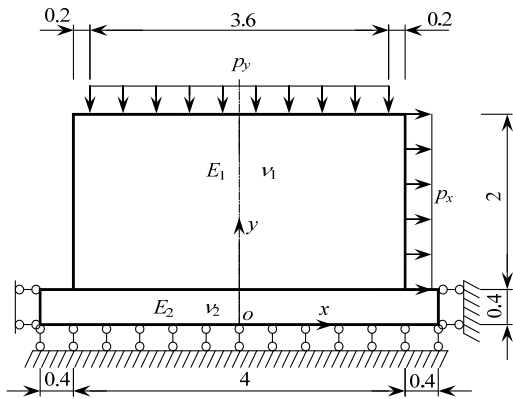


图9 算例2 计算模型尺寸图 /m

Fig.9 The dimension figure of the calculation model for second example

本例为了与文献[21]中的结果比较，取弹性块的材料参数为  $E_1=1000 \text{ Pa}$ ， $\nu_1=0.25$ 。弹性块的顶边在  $-1.8 \text{ m} \leq x \leq 1.8 \text{ m}$  的范围内施加  $P_y = -200 \text{ Pa}$  的竖向荷载，弹性块的右边施加  $P_x = 60 \text{ Pa}$  的水平荷载。取弹性块与刚性基础接触面的摩擦系数  $\mu = 0.5$ 。在刚性基础的底边和左右两边施加法向约。因基础是刚性的，所以取基础的材料参数为  $E_2 = 10 \text{ GPa}$ ， $\nu_1 = 0$ 。

数学节点间距  $h=0.2 \text{ m}$  的布置图，如图10所示。在接触面的法向刚度取为  $k_n = k_s = 10^5 \times E_2$ ，本例取  $1.5h$  作为生成数学片半径的尺寸。为了将接触面上接触应力计算结果同 Simo 等<sup>[21]</sup>的计算结果作比较，取计算范围为  $-1.8 \text{ m} \leq x \leq 1.8 \text{ m}$ ，且以压应力为正。

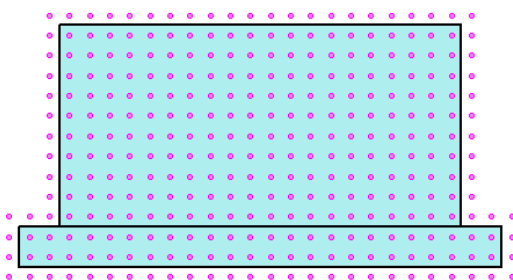


图10 数学节点间距  $h=0.2 \text{ m}$  的布置图

Fig.10 Math points layout when  $h=0.2 \text{ m}$

从图11 接触面上的法向和切向接触应力的分布图来看，本文的计算结果基本和文献[21]一致，且本文解光滑性更好。

图12 表示弹性体变形图，以及  $y$  方向位移的分布云图，与文献[21]如图13(弹性体的变形图)相比，

结果显示本文计算结果是合理的。

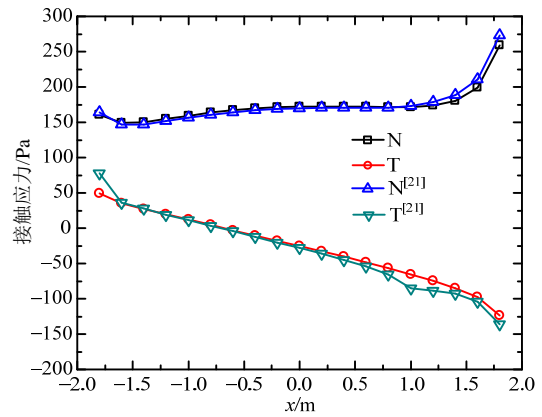


图11 接触面上的法向和切向接触应力 (T 代表法向接触应力，N 代表切向接触应力)

Fig.11 The distribution of the normal and tangential contact stress ('N' and 'T' represent the normal and tangential contact stress, respectively)

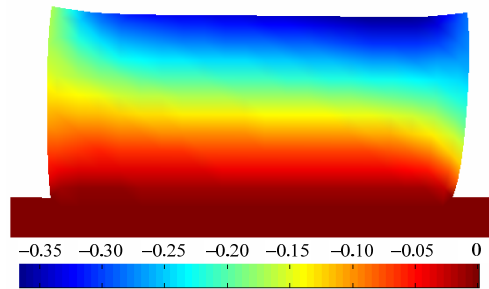


图12 弹性体的变形图和位移  $u_y$  分布云图 /m

Fig.12 The deformation of elastic body and the distribution of displacement  $u_y$

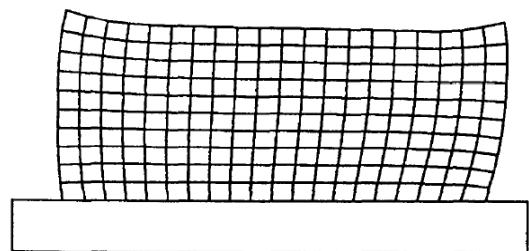


图13 弹性体的变形图(文献[21])

Fig.13 The deformation of elastic body (from the paper [21])

### 4.3 算例3

图14 是一个中间带有斜裂纹的矩形板，顶部和底部施加受压荷载作用。取板的尺寸为  $w=31 \text{ mm}$ ， $h=55 \text{ mm}$ ，初始裂纹的长度为  $a=10 \text{ mm}$ ，裂纹与水平方向的角度为  $\theta$ 。取岩石试样的计算参数为：弹性模量  $E=10 \text{ GPa}$ ，泊松比  $\nu_1 = 0.25$ ，密度  $\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ ，内摩擦角  $\varphi=40^\circ$ ，抗拉强度  $T_0=0.5 \text{ MPa}$ ，预制裂纹面的接触面假定为无摩擦、无粘聚力、无拉伸强度。

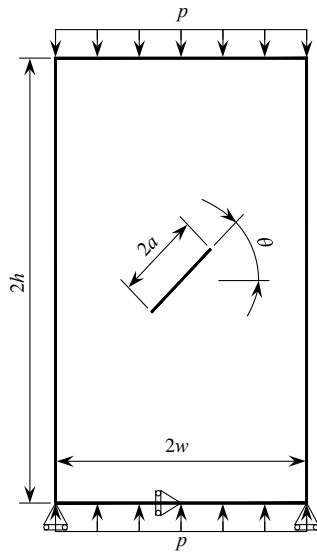


图 14 带预置裂纹受压板

Fig.14 A rectangular plate containing crack under compression

为了模拟裂纹的扩展，本文采用基于强度准则的裂纹扩展准则，详细内容可参见文献[22]。裂尖应力是采用 Shepard 插值来计算的。为了简要模拟裂纹的扩展路径，采用循环加卸载的方式进行，且每步施加的荷载是相同的。本例所施加的荷载大小为  $p=100\text{ MPa}$ ，固定步长取为  $0.002\text{ m}$ ，底边两端点施加法向约束，中点施加切向约束，取  $k_n = k_s = 10 \times E$ 。计算模型采用数学节点间距为  $0.003\text{ m}$ 。

图 15 表示受压下  $\theta=30^\circ$  时扩展 22 步后的裂纹扩展图。裂纹扩展过程中拉伸翼形裂纹先出现，裂纹向受压荷载作用线位置附近扩展，且裂纹扩展方向慢慢趋向于平行于压荷载作用线的方向。文献[23]是使用相同计算参数基于 RFPa 的岩石试样的裂纹扩展模拟，如图 16 所示，对比图 15 和图 16，本文的裂纹扩展路径和文献[23]的基本相似，说明本文的结果也是合理的。

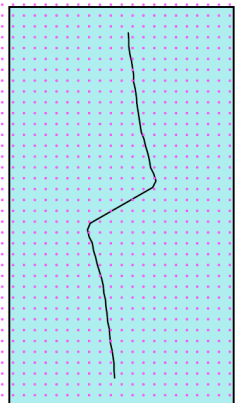


图 15 受压  $\theta=30^\circ$  时扩展 22 步后的裂纹扩展图

Fig.15 The crack propagation after 22 steps for  $\theta=30^\circ$  under compression

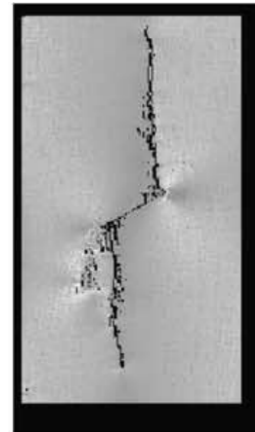


图 16 受压  $\theta=30^\circ$  时 RFPa 模拟结果<sup>[23]</sup>

Fig.16 The crack propagation for  $\theta=30^\circ$  under compression by using RFPa<sup>[23]</sup>

此外，图 17(受拉下  $\theta=0^\circ$  时扩展 10 步后的裂纹扩展图)显示出使用本文的方法不仅能模拟处理受压的裂纹扩展路径，也能准确模拟裂纹受拉张开的裂纹扩展路径。

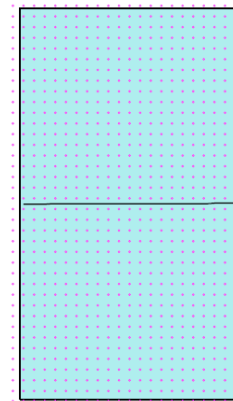


图 17 受拉  $\theta=0^\circ$  时扩展 10 步后的裂纹扩展图

Fig.17 The crack propagation after 10 steps for  $\theta=0^\circ$  under tensile

## 5 结论

本文通过结合罚-线性互补的施加接触条件的方式，并使用拉格朗日乘子法施加本质边界条件，得出了一套基于移动最小二乘插值的数值流形法 (MLS-NMM) 的摩擦接触问题的求解体系。本文方法允许节点布置到域外，即节点布置无需与边界重合，这样不仅能增加边界附近插值节点数目，还能容易地均匀布置节点，从而降低布点难度和提高插值精度，尤其是在接触边界处。此外本文方法还允许裂尖位于物理片中，通过在局部近似函数中添加扩充基函数(式(1))，来模拟裂尖奇异性，提高求解精度，减少前处理工作量。采用罚-线性互补的方式施加接触条件，使计算格式统一而简洁，利于编程

实现。为确保本质边界条件施加准确采用拉氏乘子法。通过算例的计算分析表明, 本文方法具有良好的收敛特性, 接触应力的计算准确可靠, 且能准确地模拟接触面的张开、黏结和滑动状态。同时, 算例 3 也表明该方法对模拟受压和受拉裂纹扩展的可行性。本文的工作也将为 MLS-NMM 应用到复杂闭合裂纹的扩展模拟奠定基础。

#### 参考文献:

- [1] Wriggers P. Computational contact mechanics [M]. Berlin: Springer, 2006: 183–217.
- [2] 郑宏, 李焯芬, 葛修润, 等. 界面问题的混合有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(1): 1–8.  
Zheng Hong, Li Zhuofen, Ge Xiurun, et al. A mixed finite element solution for interface problems [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(1): 1–8. (in Chinese)
- [3] Liu F, Borja R I. A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 76(10): 1489–1512.
- [4] Hirmand M, Vahab M, Khoei A R. An augmented Lagrangian contact formulation for frictional discontinuities with the extended finite element method [J]. Finite Elements in Analysis & Design, 2015, 107(C): 28–43.
- [5] 余天堂. 摩擦接触裂纹问题的扩展有限元法[J]. 工程力学, 2010, 27(4): 84–89.  
Yu Tiantang. An extended finite element method for modeling crack problems with frictional contact [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(4): 84–89. (in Chinese)
- [6] Belytschko T, Fleming M. Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method [J]. Computers & Structures, 1999, 71(2): 173–195.
- [7] 马文涛, 师俊平, 李宁. 模拟摩擦接触问题的新型无网格数值方法[J]. 岩土力学, 2012, 33(10): 3145–3150.  
Ma Wentao, Shi Junping, Li Ning. A new meshless numerical method for simulating frictional contact problems [J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(10): 3145–3150. (in Chinese)
- [8] Shi G. Manifold method of material analysis [R]. Army Research Office Research Triangle Park NC, 1992.
- [9] 王水林, 葛修润, 章光. 受压状态下裂纹扩展的数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(6): 671–675.  
Wang Shuilin, Ge Xiurun, Zhang Guang. Numerical analysis of crack propagation under compression [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(6): 671–675. (in Chinese)
- [10] 刘丰, 郑宏, 李春光. 基于 NMM 的 EFG 方法及其裂纹扩展模拟[J]. 力学学报, 2014, 46(4): 582–590.  
Liu Feng Zheng Hong, Li Chunguang. The NMM-based EFG method and simulation of crack propagation [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(4): 582–590. (in Chinese)
- [11] 刘丰, 郑宏. 基于 MLS 的数值流形法模拟多裂纹扩展[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(1): 76–86.  
Liu Feng, Zheng Hong. A MLS-based numerical manifold method for multiple cracks propagation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(1): 76–86. (in Chinese)
- [12] 钟志鹏, 万水, 任大龙. 巴西圆盘中心裂纹摩擦接触问题的逐点 Lagrange 乘子法[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 15–22.  
Zhong Zhipeng, Wan Shui, Ren Dalong. A point-by-point Lagrange multiplier method for modeling brazilian disk central crack with contact and friction [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 15–22. (in Chinese)
- [13] 薛冰寒, 林皋, 胡志强, 张勇. 求解摩擦接触问题的 IGA-B 可微方程组方法[J]. 工程力学, 2016, 33(10): 35–43.  
Xue Binghan, Lin Gao, Hu Zhiqiang, Zhang Yong. Analysis of frictional contact mechanics problems by IGA-B differential equation method [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(10): 35–43. (in Chinese)
- [14] Zheng H, Liu F, Li C. The MLS-based numerical manifold method with applications to crack analysis [J]. International Journal of Fracture, 2014, 190(1/2): 147–166.
- [15] Zheng H, Liu F, Du X. Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 295: 150–171.
- [16] Zheng H, Liu F, Li C. Primal mixed solution to unconfined seepage flow in porous media with numerical manifold method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(2): 794–808.
- [17] 朱昌铭. 基于虚功原理的弹性接触问题的线性互补方法[J]. 力学学报, 1995, 27(2): 189–197.  
Zhu Changming. A linear complementarity method for elastic contact problems based on the principle of virtual work [J]. ACTA Mechanica Sinica, 1995, 27(2): 189–197. (in Chinese)
- [18] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229–256.
- [19] Chandrasekhar Annavarapu, Martin Hautefeuille, John E. Dolbow. A Nitsche stabilized finite element method for frictional sliding on embedded interfaces. Part I: Single interface [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 268(4): 417–436.
- [20] Oden J T, Pires E B. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws [J]. Computers & Structures, 1984, 19(1/2): 137–147.
- [21] Simo J C, Laursen T A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction [J]. Computers & Structures, 1992, 42(1): 97–116.
- [22] 杨永涛. 多裂纹动态扩展的数值流形法[D]. 北京: 中国科学院大学, 2015.  
Yang Yongtao. Multiple dynamic crack propagation based on numerical manifold method [D]. Beijing: The University of Chinese Academy of Sciences, 2015. (in Chinese)
- [23] Li Y P, Chen L Z, Wang Y H. Experimental research on pre-cracked marble under compression [J]. International Journal of Solids & Structures, 2005, 42(9/10): 2505–2516.