

渗流转角奇异问题的数值流形单元法

冯 强^{1,2}, 郑 宏^{1,2,3}

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100124)

摘要: 在水利工程中的渗流计算中, 大量存在着转角奇异性问题。一般有限元方法需要构建特殊的奇异形函数和单元属性来处理, 存在不便性, 而且广泛使用的等参单元又忽视了奇异性问题。运用数值流形方法, 提出了采用构造局部特殊片的方法来解决该奇异性问题。首先, 将转角奇异的解析解构建为一个基函数, 与常数项基函数一起形成奇异片覆盖函数, 在奇异点影响到的星点上采用奇异片覆盖函数, 其他星点采用常数片覆盖函数进行求解, 计算结果逼近真解, 并能很好地反映转角中的强奇异性。其次, 给出这类问题的流形元离散列式, 将经典正三角形流形元改进为正四边形, 并介绍程序的编制步骤, 和该特殊物理片的施加方法。再次, 3 个工程算例分别为坝基不透水帷幕有压渗流解析解对比、经典流速跌落试验对比以及堰下板桩有压渗流与已有计算流网对比, 算例表明了该方法的有效性和正确性, 为进一步分析奇异性对结构和复杂工程的影响打下基础。该方法也适用于其他基于单位分解插值的数值分析方法, 也为其他场变量连续而偏导数不连续问题提供了思路。

关键词: 数值分析; 数值流形法; 渗流; 转角奇异性

中图分类号: O 241

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2017)增 2-3892-10

Turning point singularity problem in seepage by numerical manifold method

FENG Qiang^{1,2}, ZHENG Hong^{1,2,3}

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: In seepage calculation of hydraulic engineering, there are a large number of singularity problems at turning point. It is inconvenience that the general finite element method needs to construct special singularity shape function and element property to deal with the singularity problem, which used to be ignored when the isoparametric element was widely used. In this paper, a new method by constructing a local special patch is proposed to solve this singularity problem by using numerical manifold method. Firstly, the singularity covering function is formed together by the constant term basis function and a new basis function constructed by the analytic solution at turning point. The singularity covering function is used on the star points affected by the singularity point, at the same time, the constant patch covering function is used on the other star points, and the calculation result approximates the real solution and can well reflect the strong singularity in the corner. Secondly, the discrete formula of the numerical manifold method about this kind of problem is given, and the classical regular triangle of manifold element is improved to square, as well as, the procedure of the program and the application method of the special physical patch are introduced. Thirdly, three engineering examples are

收稿日期: 2017-01-17; **修回日期:** 2017-04-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11572009, 51538001); 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2014CB047100)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11572009 and 51538001) and National Key Basic Research and Development Program of China(973 Program)(Grant No. 2014CB047100)

作者简介: 冯 强(1979-), 男, 博士, 2001 年毕业于武汉大学水利水电工程专业, 现任副教授, 主要从事计算岩土力学方面的研究。E-mail: qiangf2000@163.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0057

respectively confined seepage of dam foundation with impervious curtain contrast with the analytic solution, the comparison of the classical flow velocity drop test, and the confined seepage of weir with sheet pile compared with flow net which had been calculated, those show the effectiveness and correctness of the method, and provide a basis for further analysis of the effects of singularity on the structure and complex engineering. Finally, The proposed method is also applicable to other numerical analysis methods based on the partition of unity method of interpolation, and also provides an approach for those problems with continuous field and discontinuous partial derivatives.

Key words : numerical analysis ; numerical manifold method ; seepage ; turning point singularity

1 引 言

对于工程中遇到的特殊问题,如强间断问题、奇异性问题等,传统有限元一般都是通过构造特殊的单元和形函数来处理的。为了解决这些问题,在传统有限元的基础上不断涌现一些方法,它们大多把有限元的基空间从常数项扩充为高阶多项式和一些特殊的函数式,如 J. M. Melenk^[1-2]广义有限元法(GFEM), I. Babuška 和 J. E. Osborn^[3]特殊有限单元法和有限单元单位分解法(PUM)^[4], C. A. Duarte, J. T. Oden^[5]的 hp-clouds 型有限单元法,以及 N. Sukumar 和 T. Belytschko^[6]的扩展有限元法(XFEM)。但这些方法依然采用插值网格与积分网格重合的思想。无网格方法^[7]将插值和积分背景网格分开,并基于不同的插值模式(如移动最小二乘)和单位分解的权函数,形成了各种各样的无网格法。

G. H. Shi^[8]提出了数值流形法,它主要包括 3 个部分:(1) 数学覆盖(mathematical cover)和物理覆盖(physical cover),这使得插值网格和积分网格分开,方便处理强间断一类的不连续问题;(2) numerical manifold method(以下简称 NMM)空间,数值流形法扩充了有限元空间,在每一个物理片上可以定义一个函数空间;(3) 单位分解函数。

在渗流问题方面,李晓春等^[9]基于移动最小二乘的无网格法来模拟岩体中交叉裂隙的渗流规律;Y. X. Jie 和 Y. Liu^[10]基于模拟退火算法节点生成无网格法进行渗流分析;H. Zheng 等^[11]在提出了原始等价的混合提法的基础上,采用移动最小二乘(moving least square)无网格方法,解决了多孔介质中的无侧限渗流问题;Z. Y. Huo 等^[12]基于 XFEM 对结构裂缝的渗流进行了分析。

在渗流问题中除了采用无网格法以外,还有不少学者采用流形元法对其中的问题,特别是不连续问题,进行了研究,如冯 强^[13]采用数值流形方法

求解了二维有自由面渗流问题;姜清辉等^[14]则对三维有自由面的渗流问题进行了数值流形方法的求解;Y. Wang 等^[15]将自由面作为物理边界用数值流形法进行无压渗流分析,基于能量模型分析管道流体^[16],并且定位非承压含水层潜水面^[17]。

对于数值流形法覆盖函数方面的研究,大多采用有限元法中的形函数作为流形方法的权函数,且通过提高局部覆盖函数的阶次,来提高单元的插值精度^[18-23],但会增大计算量,为此,邓安福等^[24]提出了高低阶覆盖函数混合的数值流形方法。采用高阶的局部覆盖函数不仅降低计算效率,同时使得最终流形计算的刚度阵的对角元素很大,也即条件数很多,甚至导致病态或奇异方程^[25-28]。因此,为改善矩阵性态,避免数值求解的不稳定,林绍忠等^[26-27]将局部覆盖函数的级数形式进行了改进。但是,这些升阶方法,只能提高场变量的计算精度,不能反映场变量偏导数不连续的问题。

在数值流形法数学网格方面的研究中,苏海东^[29]提出了固定网格的流形方法,该方法具有拉格朗日法和欧拉法各自的优势,但是覆盖系统的生成复杂。蔡永昌等^[30]采用任意形状的数学网格来覆盖,祁勇峰等^[31]提出了部分重叠覆盖的方法,这些方法都能适用于不同非连续边界,以及不同界面的复杂几何构型。经典的数值流形法采用正三角形网格,单元 B 矩阵为常数矩阵,不利于渗流流速的求解。本文拟推荐使用正四边形网格,采用拉格朗日型显式表达的形函数。

对于普通的渗流问题研究得较多,而对于渗流中存在的转角奇异性问题,则研究得较少,基本上都是有限元法为主,如 J. Aalto^[32]用有限单元法,通过构建奇异单元对渗流中的奇异性进行了分析。

转角奇异性存在于大量的水利工程中^[33],属于场变量连续,而偏导数不连续。运用数值流形方法的传统升阶方法,只能提高精度,并不能反映转角的奇异性,本文对覆盖奇异点的物理片通过构建特

殊的奇异基函数来解决该奇异性问题，最后的算例表明了所提方法的有效性。

2 渗流问题的流形单元法

2.1 渗流问题的基本方程

设水头函数为 $\varphi = y + \frac{\Delta H}{\gamma_w}$ ，其中， γ_w 为水的单位重量， ΔH 为孔隙水压力， y 为该点的竖直坐标分量。稳定渗流条件下的水头函数 φ 满足以下拉普拉斯方程^[34]：

$$k_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

式中： k_x 和 k_y 分别为 x 和 y 方向的渗透系数。

同时也必须满足下列边界条件^[34]：

(1) 水头边界条件：

$$\varphi - \bar{\varphi} = 0 \quad (2)$$

(2) 流量边界条件：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

不透水边界条件是其中的特例，其在流形元中的处理方式在下文中有专门的叙述。

2.2 数值流形基本原理

2.2.1 覆盖函数

φ 可由 m 个基函数 p_k 近似构造，如下式：

$$\varphi = \mathbf{P}^T \mathbf{a} = \sum_{k=1}^m p_k a_k \quad (4)$$

式中： a_k 为星点的自由度。

一般情况下，基函数可选取不同阶次的多项式^[35]，如：

$$\mathbf{P}^T = \{1\} \quad (0 \text{ 阶}, m=1) \quad (5a)$$

$$\mathbf{P}^T = \{1, x, y\} \quad (1 \text{ 阶}, m=3) \quad (5b)$$

$$\mathbf{P}^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (2 \text{ 阶}, m=6) \quad (5c)$$

2.2.2 单位分解

本文采用如图 1 所示正四边形数学覆盖，单元的星点编号分别为 1, 2, 3, 4，设星点覆盖的水头函数分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ，为了简化了数学网格，整个数学覆盖都是采用同一大小的正四边形，可构建统一的拉格朗日型单元形函数(N_1, N_2, N_3, N_4)，如图 1 所示，则单元内任一点的水头满足如下的单位分解：

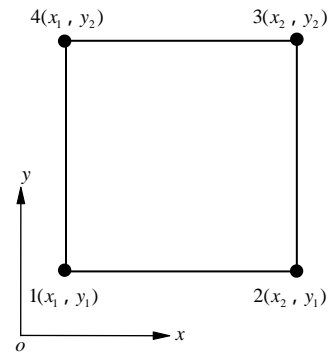


图 1 四边形流形覆盖及形函数

Fig.1 Quadrilateral manifold cover and shape function

$$\varphi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_i = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \sum_{k=1}^m p_k(x, y) a_{ik} = \sum_{i=1}^{4m} T_i d_i \quad (6)$$

其中，

$$N_1 = \frac{(x-x_2)(y-y_2)}{(x_1-x_2)(y_1-y_2)} \quad (7a)$$

$$N_2 = \frac{(x-x_1)(y-y_2)}{(x_2-x_1)(y_1-y_2)} \quad (7b)$$

$$N_3 = \frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)} \quad (7c)$$

$$N_4 = \frac{(x-x_2)(y-y_1)}{(x_1-x_2)(y_2-y_1)} \quad (7d)$$

式中： T_i 为广义形函数， d_i 为广义自由度。

经典数值流形法使用的是正三角形网格，0 阶覆盖时， \mathbf{B} 矩阵是常数矩阵，不利于流速的求解。本文建议渗流问题采用正四边形网格，推荐使用本文拉格朗日型形函数。该形函数属于显式表达式，便于公式推导和积分运算，可避免因使用有限元等参单元的形函数而做多次等参变换。

2.2.3 渗流问题的数值流形列式

边界条件一般可采用拉格朗日乘子法或罚函数方法。本文采用罚函数法。将单元 e 作为求解域 Ω 的一个子域 Ω_e ，构造这个子域上泛函^[13]：

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{D} (\nabla \varphi)^2 dA + \frac{1}{2} M \int_{\Gamma} (\varphi - \bar{\varphi})^2 ds = \\ & \frac{1}{2} \mathbf{D} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i d_i)^T (\mathbf{B}_i d_i) + \frac{1}{2} M \int_{\Gamma} (T_i d_i - \bar{\varphi})^2 ds \end{aligned} \quad (8)$$

其中，

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ \frac{\partial T_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

式中：M 为罚因子。

对所有独立变量 d_i 求偏导可得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = \int_{\Omega^e} B_i^T DB_i dA + M \int_{\Gamma^e} (T_i d_i - \bar{\varphi}) T_i ds = 0 \quad (9)$$

即

$$\int_{\Omega^e} B_i^T DB_i d_i dA + M \int_{\Gamma^e} T_i^T T_i d_i dA = M \int_{\Gamma^e} T_i^T \bar{\varphi} ds \quad (10)$$

写成矩阵的形式为

$$[G^e][d^e] = [F^e] \quad (11)$$

其中，

$$[G^e] = \int_{\Omega^e} B_i^T DB_i dA + M \int_{\Gamma^e} T_i^T T_i dA \quad (12)$$

单元传导矩阵：

$$[F^e] = M \int_{\Gamma^e} T_i^T \bar{\varphi} ds \quad (13)$$

将各单元 e 加以组装，容易得到整个求解域 Ω 上的数值流形列式：

$$[G][d] = [F] \quad (14)$$

2.3 不透水边界条件的处理

当不透水板穿越其中的一个四边形时，如图 2 所示，则一个单元被切割成 2 个流形单元，同时每个星点 S_i 也被分成相应的 2 个星点。图中的 Ω_1 由 $S_1^1, S_2^1, S_3^1, S_4^1$ 四个星点覆盖，而 Ω_2 由 $S_1^2, S_2^2, S_3^2, S_4^2$ 四个星点覆盖， Ω 被分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分，由于在不透水边界上 $\partial\varphi/\partial n=0$ ，其积分也为 0，因此不透水边界自动满足。

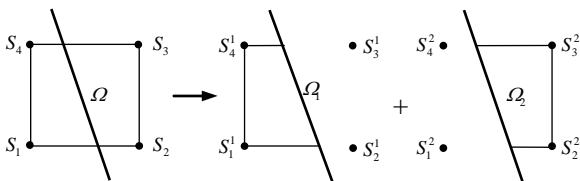


图 2 不透水边界处星点的切割处理

Fig.2 Cutting processing of star point at impermeable boundary

3 渗流转角奇异及其基函数

典型的工程渗流计算中在转角处存在渗流速度奇异性问题。表现为在转角点水头函数(势函数 φ) 连续，而 $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$ 不连续，也就是流速不连

续。如图 3 所示， ϕ_A 和 ϕ_D 为从常水头边界到不透水边界的转角， ϕ_B 和 ϕ_C 为不透水边界凹角的 1/2。当 $\phi > \pi/2$ 时，在这些点处存在转角奇异性。

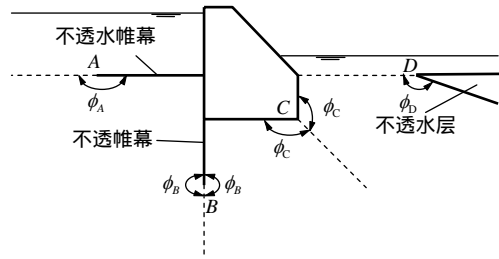


图 3 转角渗透速度奇异性问题

Fig.3 Singularity problem of penetration velocity at turning corners

4 渗流奇异性的数值流形实现

4.1 特殊物理片的构造

对于无限流问题在极坐标系下存在如下的解析解^[32]：

$$\varphi(r, \phi) = c_1 r^{\frac{\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\phi}{2\alpha}\right) + c_2 \quad (15)$$

本文将 $r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right)$ 作为覆盖函数的一个基函数，加上常数基后，奇异片的基函数为

$$P^T = \left\{ 1, r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right) \right\} \quad (16)$$

构造形成特殊的奇异片：

$$\varphi_{\text{Singularity}} = \sum_{i=1}^n N_i \left[1 \times a_1 + r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right) a_2 \right] \quad (17)$$

如图 4 所示，将奇异点所影响到的 4 个插值星点的覆盖函数取为奇异片函数，装配到流形元列式中求解。

流形单元内插值形式为

$$\varphi = \sum_{i=1} T_i d_i \quad (18)$$

广义形函数：

$$T_i = \{N_i, N_i p_2\} \quad (19)$$

式中： $p_2 = r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right)$ ，为奇异基函数，满足拉普拉斯方程。

B 矩阵：

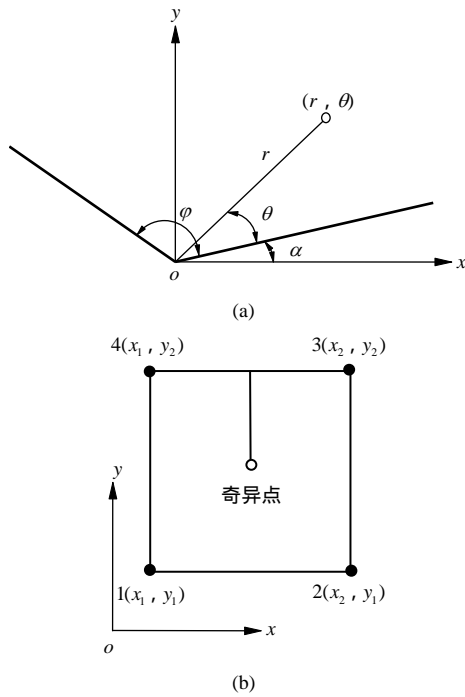


图4 奇异片构造

Fig.4 Singular patch construction

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ \frac{\partial T_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_i \frac{\partial p_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} + N_i \frac{\partial p_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

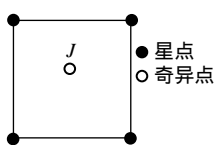
其中，

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = -\frac{\pi}{2\phi} r^{\frac{\pi}{2\phi}-1} \sin\left(\alpha + \theta - \frac{\pi}{2\phi}\theta\right) \quad (21)$$

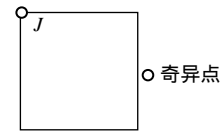
$$\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{\pi}{2\phi} r^{\frac{\pi}{2\phi}-1} \cos\left(\alpha + \theta - \frac{\pi}{2\phi}\theta\right) \quad (22)$$

4.2 特殊物理片的施加方法和程序实现

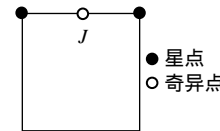
一般情况下，转角奇异点 J 在背景积分正四边形网格中会出现如图 5 所示的 4 种不同位置。图 5(a) 中，点 J 在四边形中间，宜在 4 个星点上施加特殊物理片，图 5(b) 中，点 J 在四边形顶点上，只需在一个星点上施加特殊物理片，图 5(c)，(d) 中，点 J 在四边形的边线上，需在 2 个星点上施加特殊物理片。当奇异点与星点重合时，这种特例等同于广义有限元(GFEM)和扩展有限元(XFEM)。



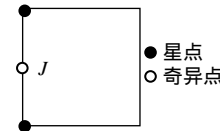
(a) 点 J 在四边形中间，需在 4 个星点上施加特殊物理片



(b) 点 J 在四边形顶点上，只需在点 J 上施加特殊物理片



(c) 点 J 在四边形的横边上，需在 2 个星点上施加特殊物理片



(d) 点 J 在四边形的竖边上，需在 2 个星点上施加特殊物理片

图 5 特殊物理片的施加方法

Fig.5 Imposed way of special physical cover

本文流形元渗流程序 NMM-Seep 是 Matlab 版本程序，该程序源自于石根华的流形元程序 C 语言版本 2D-Nmm。改编步骤如下：

(1) 将石根华的 2D-Nmm 从 C 语言完整移植为 Matlab 版本，输入文件方式、变量名、程序结构都不变。

(2) 将原正三角形网格形式改编为四边形形式。

(3) 根据渗流拉普拉斯方程的流形元离散列式(14)改编为渗流流形元程序。

(4) 由式(16)将常数片基函数扩展为奇异片基函数，奇异片覆盖函数为式(17)，广义形函数和 B 矩阵分别由式(19)，(20)扩展，单元集成总装方法同离散列式(14)。

5 算例及分析

5.1 算例一：坝基不透水帷幕有压渗流问题

一挡水建筑物有压渗流问题，几何尺寸及边界条件如图 6 所示，其中点 E 和 F 存在转角奇异性，它们 2 个的转角分别为 $\phi_E = \pi$ ， $\phi_F = \frac{3}{4}\pi$ 。常数片覆盖函数计算网格见图 7。

如仅采用常数片 $P^T = \{1\}$ 来作为覆盖函数求解，计算得到的流网如图 8 所示。

如在 $S1, S2, S3, S4, S5, S6$ 六个星点(见图 9)上引入奇异函数 $P^T = \left\{1, r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right)\right\}$ 作为覆盖

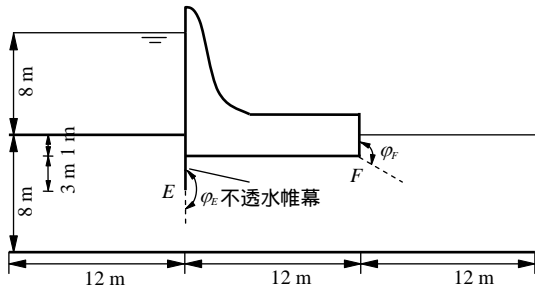


图 6 不透水帷幕渗流存在点 E 和 F 奇异性

Fig.6 Impermeable curtain seepage singularity at point E and F

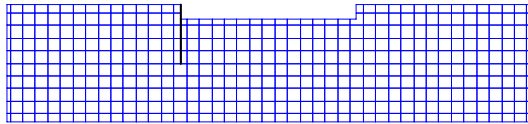


图 7 常数片覆盖函数计算网格

Fig.7 Constant patch cover function calculation grid

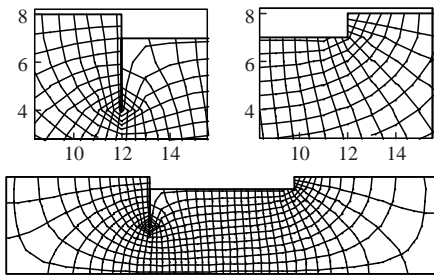


图 8 常数片覆盖函数计算流网

Fig.8 Constant patch cover function computing flow net

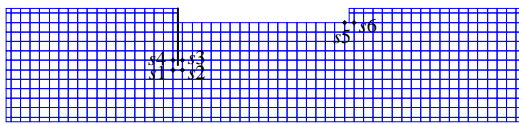


图 9 奇异片覆盖函数计算网格

Fig.9 Singular patch cover function calculation grid

函数，而其他节点仍采用常数片 $P^T = \{1\}$ 作为覆盖函数，采用如图 9 所示的网格进行求解，计算得到的流网如图 10 所示。

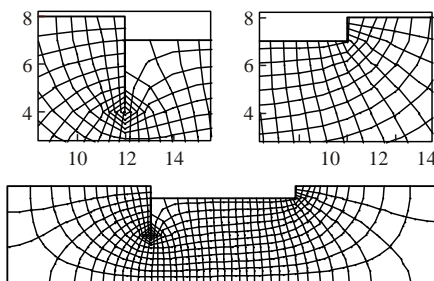
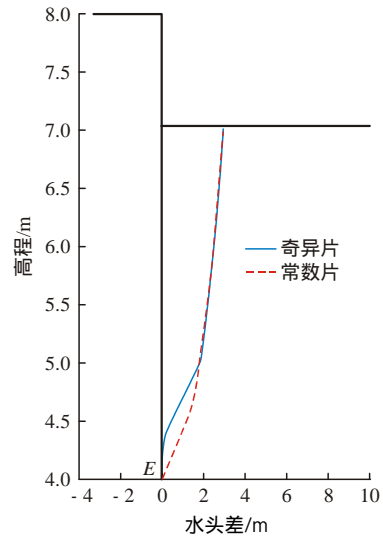


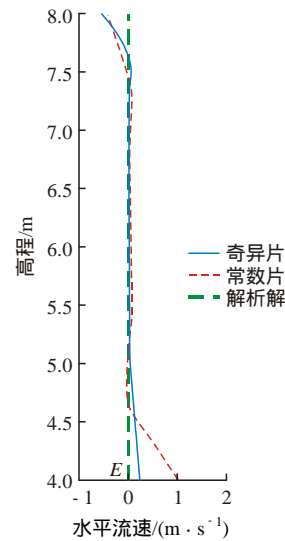
图 10 奇异片覆盖函数计算流网

Fig.10 Singular patch cover function computing flow net

为了分析考虑奇异片对计算结果的影响，图 11 显示了采用常数片和考虑奇异片求解时的沿不透水



(a) 沿不透水帷幕左右水头差



(b) 沿不透水帷幕水平流速

图 11 常数片和奇异片不透水帷幕左右水头差和沿帷幕水平流速

Fig.11 Head difference between left and right and horizontal seepage velocity along the curtain of constant patch and singular patch respectively

帷幕左右水头差以及沿不透水帷幕流速的比较，如图 11 所示。从图 11(a)可以看出：在转角 ϕ_E 附近，采用 2 种方法水头差有显著的差别，而在距离转角较远的地方，水头差几乎相差无几。

图 11(b)显示的水平流速也有同样的规律，与解析解相比，采用奇异片解更加逼近于解析解。

5.2 算例二：经典流速跌落试验

图 12 所示为经典的流速跌落渗流问题， $h \gg d$ ，在点 G 存在转角奇异性，转角大小为 $\phi_G = \pi$ 。分别采用常数片 $P^T = \{1\}$ 和奇异片 $P^T = \left\{ 1, r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right) \right\}$

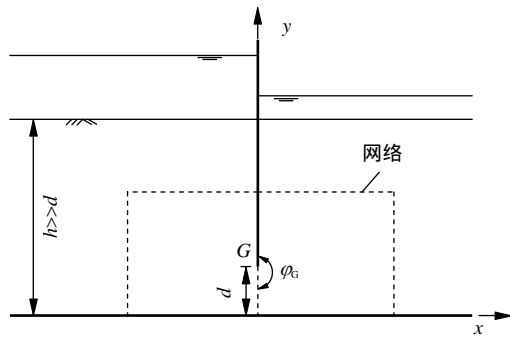


图 12 流速跌落问题转角奇异性

Fig.12 Corner singularity of velocity drop problem

作为覆盖函数对比求解。图中的虚线范围内是为了显示局部流网所取的范围，采用 2 种方法计算得到的虚线范围内的流网分别如图 13 和 14 所示。可见，采用奇异片得到的流网在转角附近更加合理。

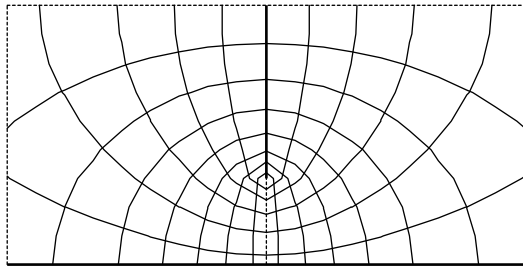


图 13 常数片覆盖函数计算流网

Fig.13 Constant patch cover function computing flow net

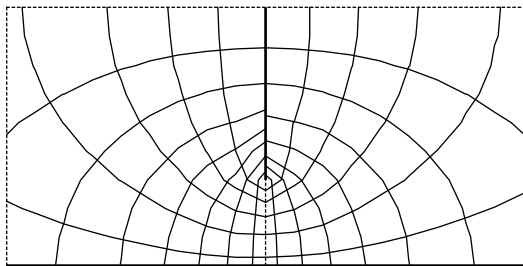
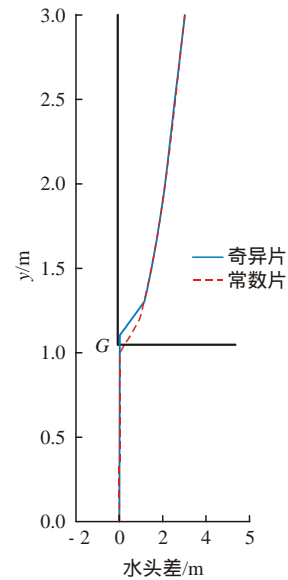


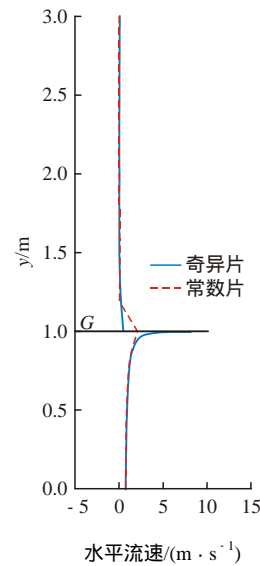
图 14 奇异片覆盖函数计算流网

Fig.14 Singular patch cover function computing flow net

采用常数片和考虑奇异片求解时的左右水头差与沿挡水板流速的比较如图 15 所示。对于水平流速，点 G 上、下两侧的解析解分别为 $v_x|_{y \rightarrow 1+0} = 0$ 和 $v_x|_{y \rightarrow 1-0} = \infty$ 。从图 15 可知，采用常数片根本不能表达这种强奇异性，其值表现为高程的连续函数；而采用奇异片后，点 G 下侧水平流速完全可以逼近无穷大，与解析解表现一致，从而表达出了该点的强奇异性，同时，点 G 上侧的水平流速也比常数片更加逼近解析解。



(a) 沿挡板左右水头差



(b) 沿挡板水平流速

图 15 常数片和奇异片计算挡水板左右水头差和沿挡水板水平流速

Fig.15 Head difference between left and right and horizontal seepage velocity along the curtain of constant patch and singular patch respectively

5.3 算例三：堰下板桩有压渗流问题

采用 F. T. Tracy 和 N. Radhakrishnan^[36]中的算例，堰下有压渗流的几何尺寸及边界条件如图 16 所示，其中点 M 存在转角奇异性，转角大小为 $\phi_M = \pi$ 。常数片覆盖函数计算网格见图 17。

如仅采用常数片 $P^T = \{1\}$ 来作为覆盖函数求解，计算得到的流网如图 18(a)所示，图 18(b)为 F. T. Tracy 和 N. Radhakrishnan^[36]中的有限元计算流网结果，没有考虑奇异性。

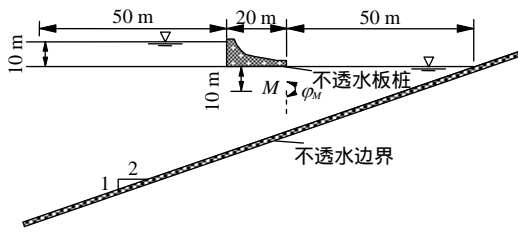


图 16 不透水板桩渗流存在点 M 奇异性

Fig.16 Impermeable sheet pile seepage singularity at point M

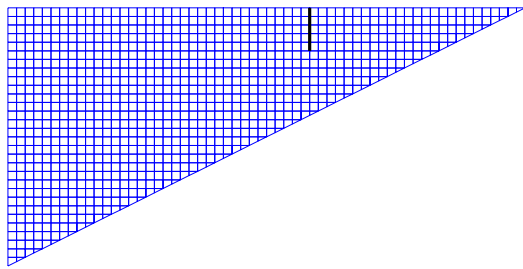
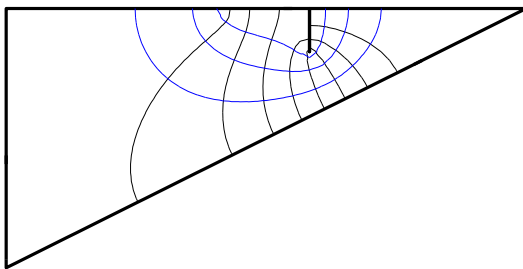
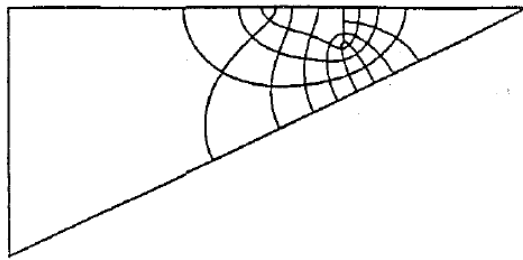


图 17 常数片覆盖函数计算网格

Fig.17 Constant patch cover function calculation grid



(a) 本文常数片计算流网



(b) F. T. Tracy 和 N. Radhakrishnan^[36]计算网格

图 18 常数片覆盖函数计算流网

Fig.18 Constant patch cover function computing flow net

如在 S7, S8 两个星点(见图 19)上引入奇异函数

$$P^T = \left\{ 1, r^{\frac{\pi}{2\phi}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\phi}\right) \right\}$$

作为覆盖函数,而其他星点仍采用常数片 $P^T = \{1\}$ 作为覆盖函数,采用如图 19 所示的网格进行求解,计算得到的流网如图 20 所示。

图 18 显示,在不考虑转角奇异性的情况下,流形元的流网计算结果与 F. T. Tracy 和 N.

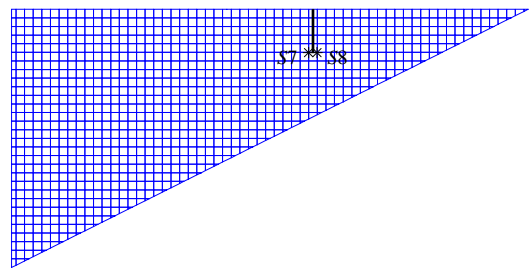


图 19 奇异片覆盖函数计算网格

Fig.19 Singular patch cover function calculation grid

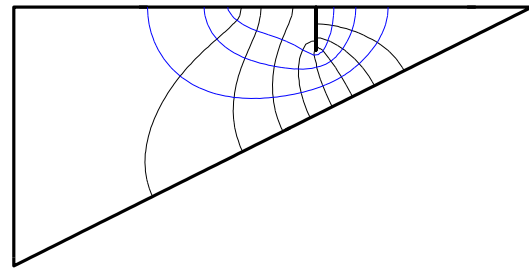


图 20 奇异片覆盖函数计算流网

Fig.20 Singular patch cover function computing flow net

Radhakrishnan^[36]中的有限元计算结果是一致的。该结果不能反映点 M 的转角奇异性,等势线在点 M 附近的梯度间距是相同的,不能反映流速的跳跃间断性。

图 20 中,采用奇异片覆盖函数计算流网,等势线在点 M 附近的梯度间距存在明显的错位变化,能够反映强奇异性 and 间断性以及流速的跳跃间断性。

6 结 论

(1) 渗流问题中的转角奇异性问题,一般有限元法需要构建特殊的奇异形函数和单元来处理,求解困难。而且广泛使用的等参单元,忽略了奇异性问题。

(2) 一般数值流形法使用常数片计算,等效于有限单元法,即使在覆盖函数片上进行升阶处理,也只是从一定程度上提高了求解的精度,并不能解决偏导数不连续的奇异性问题。

(3) 本文将奇异点的解析解构造为一个基函数,与常数项一起形成一个奇异片覆盖函数,在覆盖奇异点的物理片上施加该奇异覆盖函数,其他物理片上施加常数覆盖函数,能够较好地反映转角的流速奇异性问题,并且计算结果更加逼近真解。

(4) 3 个工程算例分别从解析解对比、经典流速跌落试验、与已有工程计算流网对比出发,从 3 个方面说明本文方法克服了渗流问题中常见的转角奇

异性问题，保证了转角附近的求解精度，并且程序实现简单、便捷，为进一步评价水工建筑物在转角处所受到的渗透力及流速问题提供一个可供参考的计算方法。

(5) 经典数值流形法是正三角形网格，导致 B 矩阵是常数矩阵。本文建议渗流计算改用正四边形网格，推荐使用拉格朗日型形函数，该形函数是显式表达式，可避免等参单元形函数的等参变换，便于公式推导和积分运算。

(6) 本文构造的奇异基函数同样适用于其他基于单位分解插值的数值分析方法，对于其他场变量连续而偏导数不连续的问题，也可采用类似施加局部特殊片的方法加以处理。

参考文献(References)：

- [1] MELENK J M. Finite element methods with harmonic shape functions for solving Laplace's equation[M. S. Thesis][D]. Maryland : The University of Maryland , 1992 : 1 – 89.
- [2] MELENK J M. On generalized finite element methods[Ph. D. Thesis][D]. Maryland : The University of Maryland , 1995 : 1 – 187.
- [3] BABUŠKA I , OSBORN J E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients[J]. Siam Journal on Numerical Analysis , 1994 , 31(4) : 945 – 981.
- [4] BABUŠKA I , MELENK J. The partition of unity method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1997 , 40(4) : 727 – 758.
- [5] DUARTE C A , ODEN J T. Hp clouds-an hp meshless method[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations , 1996 , 12(6) : 673 – 706.
- [6] SUKUMAR N , BELYTSCHKO T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2000 , 48 : 1 741 – 1 760.
- [7] BELYTSCHKO T , LU Y Y , GU L. Element free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 1994 , 37(2) : 229 – 256.
- [8] SHI G H. Manifold method of material analysis[C]// Transactions of the 9th Army conference on Applied Mathematics and Computing. Minneapolis : U. S. Army Research Office , 1991 : 57 – 76.
- [9] 李晓春, 陈剑平, 石丙飞, 等. 交叉裂隙渗流无网格法初探[J]. 岩土力学, 2007 , 28(增 1) : 371 – 374.(LI Xiaochun , CHEN Jianping , SHI Binfei , et al. A study on the meshless method on seepage of intersected fractures[J]. Rock and Soil Mechanics , 2007 , 28(Supp.1) : 371 – 374.(in Chinese))
- [10] JIE Y X , LIU Y. Simulated annealing based algorithm for node generation in seepage analysis with meshless method[J]. Mechanics Research Communications , 2012 , 43 : 96 – 100.
- [11] ZHENG H , LIU F , LI C. Primal mixed solution to unconfined seepage flow in porous media with numerical manifold method[J]. Applied Mathematical Modelling , 2015 , 39(2) : 794 – 808.
- [12] HUO Z Y , QIAN G X , ZHENG D J. Seepage analysis of the structure with cracks based on XFEM[J]. Open Civil Engineering Journal , 2015 , 9(1) : 90 – 97.
- [13] 冯 强. 数值流形法及其在无压渗流中的应用[硕士学位论文][D]. 宜昌 : 三峡大学, 2005 : 1 – 74.(FENG Qiang. Numerical manifold method and its application in unconfined seepage[M. S. Thesis][D]. Yichang : China Three Gorges University , 2005 : 1 – 74.(in Chinese)).
- [14] 姜清辉, 邓书申, 周创兵. 有自由面渗流分析的三维数值流形方法[J]. 岩土力学, 2011 , 32(3) : 879 – 884.(JIANG Qinghui , DENG Shushen , ZHOU Chuangbing. Three-dimensional numerical manifold method for seepage problems with free surfaces[J]. Rock and Soil Mechanics , 2011 , 32(3) : 879 – 884.(in Chinese))
- [15] WANG Y , HU M , ZHOU Q , et al. Energy-work-based numerical manifold seepage analysis with an efficient scheme to locate the phreatic surface[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics , 2014 , 38(15) : 1 633 – 1 650.
- [16] WANG Y , HU M , RUTQVIST J. Confined-unconfined seepage analysis using numerical manifold method with an energy-work-based model[C]// Frontiers of Discontinuous Numerical Methods and Practical Simulations in Engineering and Disaster Prevention , New York : CRC Press , 2013 : 349 – 355.
- [17] WANG Y , GONG J K. Simulation of seepage in porous medium by Numerical Manifold Method[C]// 10th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation- Advances in Discontinuous Numerical Methods and Applications in Geomechanics and Geoenvironmenting. [S. l.] : [s. n.] , 2012 : 275 – 280.
- [18] 蔡永昌, 廖林灿, 张湘伟. 高精度四节点四边形流形单元[J]. 应用力学学报, 2001 , 18(2) : 75 – 80.(CAI Yongchang , Liao Lincan , ZHANG Xiangwei. A high-order precision quadrilateral manifold method[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics , 2001 , 18(2) : 75 – 80.(in Chinese))
- [19] 蔡永昌, 张湘伟. 使用高阶覆盖位移函数的数值流形方法及其应力精度的改善[J]. 机械工程学报, 2000 , 36(9) : 20 – 25.(CAI Yongchang , ZHANG Xiangwei. Expansion to high-order cover function and improvement of the stress accuracy in numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering , 2000 , 36(9) : 20 – 25.(in Chinese))

- [20] 苏海东, 谢小玲, 陈 琴. 高阶数值流形方法在结构静力分析中的应用研究[J]. 长江科学院院报, 2005, 22(5): 74 – 77.(SU Haidong, XIE Xiaoling, CHEN Qin. Application of high-order numerical manifold method in static analysis[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2005, 22(5): 74 – 77.(in Chinese))
- [21] 林绍忠, 祁勇峰, 苏海东. 基于矩阵特殊运算的高阶流形单元分析[J]. 长江科学院院报, 2006, 23(3): 36 – 39.(LIN Shaozhong, QI Yongfeng, SU Haidong. Element analysis of high-order numerical manifold method based on special matrix operations[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2006, 23(3): 36 – 39.(in Chinese))
- [22] 田 荣, 栾茂田, 杨 庆, 等. 高阶流形方法及其应用[J]. 工程力学, 2001, 18(2): 21 – 26.(TIAN Rong, LUAN Maotian, YANG Qing, et al. Fundamentals and applications of high-order manifold method[J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(2): 21 – 26.(in Chinese))
- [23] 张国新, 彭 静. 二阶流形单元法与结构变形分析[J]. 力学学报, 2002, 34(2): 261 – 269.(ZHANG Guoxin, PENG Jing. Second-order manifold method in structure failure analysis[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(2): 261 – 269.(in Chinese))
- [24] 邓安福, 朱爱军, 曾祥勇. 高低阶覆盖函数混合的数值流形方法[J]. 土木工程学报, 2006, 39(1): 75 – 78.(DENG Anfu, ZHU Aijun, ZENG Xiangyong. The unnumerical manifold method using low-order and high-order cover functions[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(1): 75 – 78.(in Chinese))
- [25] 彭自强, 葛修润. 数值流形方法中覆盖函数选用的建议[J]. 岩土力学, 2004, 25(4): 624 – 627.(PENG Ziqiang, GE Xiurun. Suggestion to the choice of physical cover functions in numerical manifold method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(4): 624 – 627.(in Chinese))
- [26] 林绍忠, 祁勇峰, 苏海东. 数值流形法中覆盖函数的改进形式及其应用[J]. 长江科学院院报, 2006, 23(6): 55 – 58.(LIN Shaozhong, QI Yongfeng, SU Haidong. Improved local cover function of numerical manifold method and its application[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2006, 23(6): 55 – 58.(in Chinese))
- [27] 周小义, 邓安福, 黄润英. 数值流形方法中覆盖位移函数的改进[J]. 岩土工程技术, 2007, 21(1): 1 – 3.(ZHOU Xiaoyi, DENG Anfu, HUANG Runying. Improvement of cover displacement functions in the numerical manifold method[J]. Geotechnical Engineering Technique, 2007, 21(1): 1 – 3.(in Chinese))
- [28] 郭朝旭, 郑 宏. 高阶数值流形方法中的线性相关问题研究[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 228 – 232.(GUO Chaoxu, ZHENG Hong. Study on linear dependence problem in high-order numerical manifold method[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(12): 228 – 232.(in Chinese))
- [29] 苏海东. 固定网格的数值流形方法研究[J]. 力学学报, 2011, 43(1): 169 – 178.(SU Haidong. Study on numerical manifold method with fixed meshes[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(1): 169 – 178.(in Chinese))
- [30] 蔡永昌, 朱合华, 夏才初. 流形方法覆盖系统自动生成算法[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2004, 32(5): 585 – 590.(CAI Yongchang, ZHU Hehua, XIA Caichu. Automatically forming of cover system in numerical manifold method[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(5): 585 – 590.(in Chinese))
- [31] 祁勇峰, 苏海东, 崔建华. 部分重叠覆盖的数值流形方法初步研究[J]. 长江科学院院报, 2013, 30(1): 65 – 70.(QI Yongfeng, SU Haidong, CUI Jianhua. Preliminary study on numerical manifold method with partially overlapping covers[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2013, 30(1): 65 – 70.(in Chinese))
- [32] AALTO J. Singularity elements for seepage analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, 9(2): 185 – 196.
- [33] HARR M E. Groundwater and seepage[M]. [S. l.]: McGraw-Hill, 1962: 101 – 136.
- [34] 苑莲菊. 工程渗流力学及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001: 33 – 45.(YUAN Lianju. Engineering seepage mechanics and its application[M]. Beijing: China Building Materials Industry Press, 2001: 33 – 45.(in Chinese))
- [35] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997: 11 – 12.(SHI Genhua. Numerical manifold method and the discontinuous deformation analysis[M]. Translated by PEI Juemin. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 11 – 12.(in Chinese))
- [36] TRACY F T, RADHAKRISHNAN N. Automatic generation of seepage flow nets by finite element method[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 1989, 3(3): 268 – 284.