

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.10.004

# 非饱和黏土状态相关本构模型的数值实现

李 舰<sup>1,2</sup>, 韦昌富<sup>2</sup>, 刘 艳<sup>1</sup>

(1. 北京交通大学 土建学院, 北京 100044; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘 要:** 基于双重塑性机制, 即剪切滑移和加载湿陷机制, 及毛细滞回和变形间的耦合作用, 提出了一个适用于非饱和黏土的状态相关本构模型。建立了该模型的隐式积分算法, 并处理了双重固相屈服面交点处的应力积分问题。考虑了吸力与应力间的关系, 推导了本构关系的一致性切线模量。最后, 利用该模型预测了一组非饱和黏土的三轴试验, 以此反映模型的描述能力; 对比了不同应变步长下应变控制试验的计算结果, 并以此验证算法的收敛性和准确性; 利用有限元程序平台 U\_DYSAC2 计算了二维情况下非饱和土地区地基固结问题, 从而验证所得一致性切线模量的有效性。

**关键词:** 非饱和土; 状态相关; 本构模型; 隐式积分算法; 一致性切线模量

**中图分类号:** TU 442

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 7598 (2017) 10 - 2799 - 010

## Numerical implementation of a state-dependent constitutive model for unsaturated clays

LI Jian<sup>1,2</sup>, WEI Chang-fu<sup>1</sup>, LIU Yan<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

**Abstract:** A state-dependent constitutive model for unsaturated clays is proposed based on the double plastic mechanisms (i.e., shear sliding and loading collapse mechanisms), and the coupling between hydraulic hysteresis and stress-strain behavior. In the proposed model, the stress integration at the intersection of two solid phase yield surfaces is addressed using an implicit integration algorithm. The consistent tangent matrix of constitutive model is explicitly derived by considering the relationship between stress and suction. Finally, the numerical simulations of triaxial tests on unsaturated clay are carried out to demonstrate the abilities of the constitutive model. The calculated results of strain-controlled tests on unsaturated soils with different step sizes are compared to demonstrate the convergence and accuracy of the implicit algorithm. The two-dimensional ground consolidation of unsaturated soils is analyzed using the U\_DYSAC2 program to demonstrate the validity of the consistent tangent matrix.

**Keywords:** unsaturated clays; state-dependent; constitutive model; implicit integration algorithm; consistent tangent matrix

## 1 引言

研究者们对饱和和非饱和状态下黏土的力学行为进行了广泛而深入的研究。试验结果表明, 饱和状态下正常固结或弱固结黏土会发生剪缩(排水条件下孔隙比减小或不排水条件下平均有效应力减小), 然而对于超固结土会产生剪胀(排水条件下孔隙比增加或不排水条件下平均有效应力增加), 同时伴随着应力状态及孔隙比趋向临界状态。目前已经

存在多个适用于饱和土的状态相关的本构关系模型<sup>[1-4]</sup>。这些模型可以有效模拟黏土的剪胀与压缩现象。对于非饱和黏土而言, 土体的剪胀现象不仅与孔隙比相关, 亦与吸力(或饱和度)相关<sup>[5-6]</sup>。为此, Chiu 等<sup>[7]</sup>选取净应力和基质吸力建立了非饱和土状态相关的弹塑性模型, 并考虑了基质吸力对土体剪胀现象的影响。然而, 模型中的参数和状态变量个数较多, 从而限制了模型的实用性。

相对于一般的饱和土本构模型而言, 非饱和土

收稿日期: 2016-06-15

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(No. 2016RC043); 国家自然科学基金资助项目(No. 51608033); 中国博士后科学基金(No. 2015M582314)。This work was supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities (2016RC043), the National Natural Science Foundation of China (NSFC) (51608033) and the China Postdoctoral Science Foundation (2015M582314)。

第一作者简介: 李舰, 男, 1985年生, 博士, 博士后, 主要从事非饱和土本构和数值计算工作。E-mail: jianli@bjtu.edu.cn

通讯作者: 韦昌富, 男, 1966年生, 博士, 研究员, 博导, 主要从事多孔隙介质理论及其工程应用研究。E-mail: cfwei@whrsm.ac.cn

本构模型中引入了额外的应力变量即吸力，因此，其应力积分算法较为复杂。按照积分方式的不同，本构方程的积分算法一般可分为两大类，即显式积分算法和隐式积分算法。两种算法各具特点，其中关于非饱和土本构模型的显式积分算法的研究可参阅文献[8 - 11]。隐式算法具有计算准确、全局收敛速度快等特点。Ortiz 等<sup>[12]</sup>采用 Return-mapping 算法对饱和土本构模型进行了数值实现。其后，采用相同算法，Vaunat<sup>[13]</sup>、Zhang<sup>[14]</sup>和 Ma<sup>[15]</sup>等分别对不同的非饱和土本构模型进行了数值实现。此外，李锡夔<sup>[16]</sup>、周雷<sup>[17]</sup>、胡冉<sup>[18]</sup>和刘艳<sup>[19]</sup>等采用欧拉向后积分算法分别对不同的非饱和土本构模型进行了数值实现。

本文提出了一个适用于非饱和黏土的状态相关本构模型，并建立了该模型的 Euler 向后隐式积分算法，随后推导了非饱和土本构关系的一致性切线模量。最后在高斯点尺度中预测了一组非饱和土黏土三轴试验结果，以此反映模型的描述能力，对比了不同应变步长下各向同性和轴对称应变控制试验的计算结果，以此验证该算法的收敛性和准确性，并进行了二维情况下非饱和土地基固结问题的有限元计算，从而验证所得一致性切线模量的有效性。

## 2 本构模型概述

Yin 等<sup>[4]</sup>建立的一个适用于饱和黏土状态相关的弹塑性模型考虑了双重塑性机制，即剪切滑移和加载湿陷机制，并考虑当前孔隙比对土体剪胀行为的影响。本文对上述模型进行扩展，使其适用于非饱和黏土。模型中选取平均骨架应力和吸力作为应力变量，分别建立弹塑性变形和土-水特征曲线模型，并考虑两者间的耦合作用。其次，力学模型中考虑了有效饱和度对土体剪胀行为的影响。

### 2.1 屈服面

模型中引入 3 组屈服面以此描述非饱和黏土的力学和持水行为特征。其中，第 1 个屈服面为剪切-滑移屈服面 (SS)，用来描述黏土颗粒间的剪切滑移行为；第 2 个屈服面为加载湿陷屈服面 (LC)，用来描述平均骨架应力或饱和度变化引起的黏土颗粒重排列；第 3 组屈服面是吸力变化屈服面 (SI 和 SD)，用来描述吸力及孔隙比变化引起的饱和度变化。

#### 2.1.1 剪切-滑移屈服面

剪切-滑移屈服面 (SS) 用来描述黏土颗粒间的剪切滑移现象。假设  $\tilde{p}$ - $q$  坐标系中 SS 屈服面为

一直线，其形状如图 1 所示。SS 屈服面的表达式为

$$f_{SS} = \sqrt{\frac{3}{2}} r_{ij} r_{ij} - H \tag{1}$$

式中： $r_{ij} = s_{ij} / \tilde{p}$ ， $s_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij}$ ， $\tilde{\sigma}_{ij}$  为平均骨架应力， $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} - s S_{re} \delta_{ij}$ ， $\tilde{p} = \tilde{\sigma}_{ii} / 3$ ， $\sigma'_{ij}$  为净应力， $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij}$ ， $s$  为吸力， $s = u_a - u_w$ ， $u_a$  和  $u_w$  分别为孔隙气压力和孔隙水压力， $S_{re}$  为有效饱和度， $S_{re} = (S_r - S_{rr}) / (1 - S_{rr})$ ， $S_{rr}$  为残余饱和度， $\delta_{ij}$  为克罗内克符号； $H$  为硬化参数。

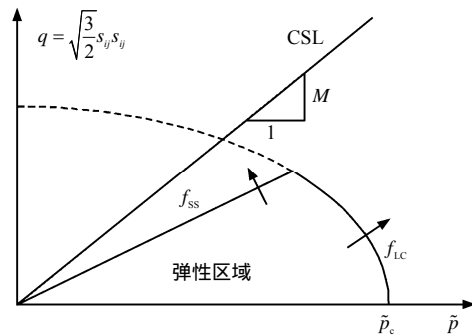


图 1 SS 和 LC 屈服面  
Fig.1 LC and SS yield surfaces

硬化参数  $H$  定义为与塑性剪应变  $\epsilon_d^p$  相关的双曲线函数，并表示为

$$H = \frac{M_p \epsilon_d^p}{1/G_p + \epsilon_d^p} \tag{2}$$

式中： $G_p$ 、 $M_p$  为土体参数； $G_p$  控制  $\eta$ - $\epsilon_d^p$  坐标系中双曲线的起始斜率， $\eta$  为应力比， $\eta = q / \tilde{p}$ ， $\epsilon_d^p$  为偏应变； $M_p$  代表峰值应力比，与峰值摩擦角  $\phi_p$  相关， $M_p = 6 \sin \phi_p / (3 - \sin \phi_p)$ 。

依据 Biarez 和 Hicher<sup>[20]</sup>，峰值摩擦角  $\phi_p$  的取值与内摩擦角  $\phi_\mu$  和土体密实状态 ( $e_c/e$ ) 相关，并表示为

$$\tan \phi_p = (e_c/e) \tan \phi_\mu \tag{3}$$

式中： $e$  为孔隙比； $e_c$  为与临界状态线相关的孔隙比。

在  $\tilde{p}$ - $q$  坐标系中临界状态线定义为

$$q = M_c \tilde{p} \tag{4}$$

式中： $M_c$  为  $\tilde{p}$ - $q$  坐标系中临界状态线的斜率，并且  $M_c = 6 \sin \phi_\mu / (3 - \sin \phi_\mu)$ 。

此外，在  $e$ - $\ln \tilde{p}$  坐标系中临界状态线的表达式定义为

$$e_c = e_{cr} - \lambda_c (S_{re}) \ln(\tilde{p} / \tilde{p}_{cr}) \tag{5}$$

式中： $e_{cr}$  和  $\tilde{p}_{cr}$  分别为临界状态线的参考点对应的孔隙比和平均骨架应力； $\lambda_c$  为  $e-\ln \tilde{p}$  坐标系中临界状态的斜率。

基于已有的试验结果<sup>[5, 21-22]</sup>可知，与正常固结线相似， $e-\ln \tilde{p}$  坐标系中饱和状态和非饱和状态下的临界状态线的位置并不相同，其与吸力或饱和度相关。假设不同饱和度下的临界状态线交于一参考点  $(e_{cr}, \tilde{p}_{cr})$ ，并且给定饱和度下的临界状态线的斜率  $\lambda_c(S_{re})$  可表示为

$$\lambda_c(S_{re}) = \lambda_{c0} + (1 - S_{re})^a (\lambda_{cd} - \lambda_{c0}) \quad (6)$$

式中： $\lambda_{c0}$  和  $\lambda_{cd}$  分别为  $e-\ln \tilde{p}$  坐标系中饱和和相对干燥对应的临界状态线的斜率； $a$  为拟合参数，控制  $\lambda_c$  随有效饱和度变化规律。

为了简化，假设  $\lambda_{c0}$  与  $e-\ln \tilde{p}$  坐标系中饱和状态下正常固结线的斜率一致，并且  $a=1$ ，即  $\lambda_c(S_{re})$  可通过插值获得。

### 2.1.2 加载湿陷屈服面

加载湿陷屈服面 (LC) 反映平均骨架应力或饱和度变化引起的黏土颗粒的重排列。LC 屈服面的形状亦如图 1 所示，并表示为

$$f_{LC} = \tilde{p}^2 + \frac{3}{2} \frac{s_{ij} s_{ij}}{R^2} - \tilde{p}_c \quad (7)$$

式中：材料参数  $R$  控制屈服面的形状； $\tilde{p}_c$  为硬化参数，控制 LC 屈服面的大小。

### 2.1.3 吸力变化屈服面

非饱和土在吸力循环时的持水滞回特性可以看作是孔隙水的弹塑性变化过程。此处为了简化，利用 Wheeler 等<sup>[23]</sup>提出的双线性土-水特征曲线模型描述吸力及孔隙比变化引起的饱和度变化，如图 2 所示。吸力变化屈服面 (SI 和 SD) 表示为

$$\left. \begin{aligned} f_{SI} &= s - s_1 = 0 & s > 0 \\ f_{SD} &= s_D - s = 0 & s < 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： $s_1$  和  $s_D$  分别为过当前应力状态的扫描线与主干燥线和主浸润线相交时对应的吸力。图 2 中  $s_e$  代表进气值。

基于上述分析， $d\boldsymbol{\varepsilon}$  和  $dS_{re}$  可分解为

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}_{SS}^p + d\boldsymbol{\varepsilon}_{LC}^p \\ dS_{re} &= dS_{re}^e + dS_{re}^p \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中： $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 、 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{SS}^p$  和  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{LC}^p$  分别为弹性应变增量以及 SS 和 LC 屈服面屈服所产生的塑性应变增量； $dS_{re}^e$  和  $dS_{re}^p$  分别为有效饱和度的弹性增量以及 SI 或 SD 屈服面屈服所产生的有效饱和度的塑性增量。

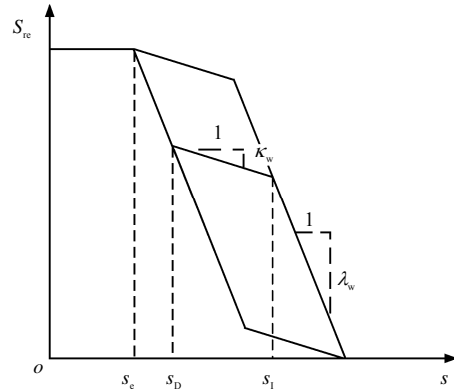


图 2 土-水特征曲面模型

Fig.2 Model for soil-water characteristic surface

## 2.2 弹性增量关系

变形的弹性增量定义为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} d\tilde{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (10)$$

式中： $\nu$  为泊松比； $E$  为弹性模量， $E = 3K(1-2\nu)$ ， $K$  为体积弹性模量， $K = \tilde{p}(1+e_0)/\kappa$ ， $\kappa$  为回弹曲线的斜率， $e_0$  为初始孔隙比。

饱和度的弹性增量定义为

$$dS_{re}^e = \frac{\kappa_w}{s + p_{at}} ds \quad (11)$$

式中： $\kappa_w$  为  $S_{re}-\ln(s+p_{at})$  坐标系中土-水特征曲线的扫描线斜率； $p_{at}$  为大气压力。

## 2.3 硬化准则

硬化准则用来描述屈服面的演化。对于 SS 和 LC 屈服面而言，其硬化参数分别为  $H$  和  $\tilde{p}_c$ 。其增量可表示为

$$\left. \begin{aligned} dH &= \left[ \frac{M_p}{1/G_p + \varepsilon_d^p} - \frac{M_p \varepsilon_d^p}{(1/G_p + \varepsilon_d^p)^2} \right] d\varepsilon_d^p \\ \frac{d\tilde{p}_c}{\tilde{p}_c} &= \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} d\varepsilon_v^p - k_{sw} dS_{re} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中： $\lambda$  为  $e-\ln \tilde{p}$  坐标中饱和状态下正常固结线的斜率； $k_{sw}$  为耦合参数，控制饱和度变化引起的 LC 屈服面移动的大小<sup>[23]</sup>。

对于 SI 和 SD 屈服面而言，其硬化参数是  $s_1$  和  $s_D$ 。其增量可定义为<sup>[23]</sup>

$$\frac{ds_1}{s_1 + p_{at}} = \frac{ds_D}{s_D + p_{at}} = -\frac{1}{\lambda_w - \kappa_w} dS_{re}^p + k_{ws} d\varepsilon_v \quad (13)$$

式中： $\lambda_w$  为  $S_{re}-\ln(s+p_{at})$  坐标系中土-水特征曲线主干燥和浸润线的斜率； $k_{ws}$  为第 2 个耦合参数，控制体积应变引起的 SI 和 SD 屈服面移动的大小。

## 2.4 流动准则

用流动法则确定塑性应变增量的大小。为了考虑剪切过程中的剪胀与收缩行为，对 SS 屈服面采用非相关联流动准则。与 SS 屈服面对应的塑性势

函数的导数表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_{SS}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} &= \frac{\partial g_{SS}}{\partial \tilde{p}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} + \frac{\partial g_{SS}}{\partial s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \\ \frac{\partial g_{SS}}{\partial \tilde{p}} &= D \left( M_{pt} - \sqrt{\frac{3}{2}} r_{ij} r_{ij} \right) \\ \frac{\partial g_{SS}}{\partial s_{ij}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ij} r_{ij}}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中： $D$  和  $M_{pt}$  为土体参数； $D$  控制剪胀或剪缩的大小； $M_{pt}$  为相变线的斜率，与相变角  $\varphi_{pt}$  相关， $M_{pt} = 6 \sin \varphi_{pt} / (3 - \sin \varphi_{pt})$ 。 $\varphi_{pt}$  的取值亦假设与  $\varphi_{\mu}$  和  $(e_c/e)$  相关，并表示为

$$\tan \varphi_{pt} = (e_c/e)^{-1} \tan \varphi_{\mu} \quad (15)$$

对于 LC、SI 和 SD 屈服面采用相关联流动准则。利用 SS、LC、SI 或 SD 屈服面的一致性条件、硬化准则及流动准则，可求解出塑性加载指数；其后，应用流动准则便可得到塑性应变增量。

### 3 积分算法

本节基于完全隐式的 Euler 向后积分算法，对非饱和黏土状态相关本构模型进行数值实现。在有限元方法中，通常已知应变和孔压增量，并借此求解应力增量。由于在所建立的模型中 LC 屈服面的位置随饱和度变化，因此，首先需要基于已知的应变和孔压增量计算饱和度增量，其次基于已知的应变及更新后的饱和度增量计算应力增量。关于土-水特征曲线模型的积分算法与固相模型的相似，此处不再赘述。

隐式积分算法一般分为弹性预测和塑性修正两部分。在弹性预测阶段，根据已知应变和饱和度增量计算应力和内变量的弹性试值，并依据弹性试值判断是否发生塑性变形。依据固相屈服函数的取值，存在 4 种情况：弹性行为；仅 SS 屈服面屈服；仅 LC 屈服面屈服；SS 和 LC 屈服面同时屈服。对于第 1 种情况，弹性试应力仍处于弹性区域，可利用应力和内变量的弹性试值对其进行更新。相反的，对于后 3 种情况，弹性试应力处于弹性区域外，因此，需要塑性修正。此处仅给出 SS 和 LC 屈服面同时屈服时的塑性修正过程。

由本构关系得到需要求解的方程组为

$$\left. \begin{aligned} (D^e)^{-1} \tilde{\sigma}_{n+1} &= (D^e)^{-1} \tilde{\sigma}_n + \Delta \varepsilon_{n+1} - \Delta \varepsilon_{n+1}^p \\ H_{n+1} &= H_n + \left[ \frac{M_p}{1/G_p + \varepsilon_d^p} - \frac{M_p \varepsilon_d^p}{(1/G_p + \varepsilon_d^p)^2} \right] \Delta \varepsilon_{d,n+1}^p \\ \tilde{p}_{c,n+1} &= \tilde{p}_{c,n+1}^{(0)} \exp \left( \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \Delta \varepsilon_{v,n+1}^p \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中： $D^e$  为弹性矩阵； $\tilde{p}_{c,n+1}^{(0)} = p_{c,n} \exp(-k_{sw} \Delta S_{re,n+1})$ ；下标  $n$  代表步数；上标  $(k)$  代表迭代次数。在弹性预测阶段，需要根据已知饱和度增量  $\Delta S_{re}$  计算前期固结压力  $\tilde{p}_c$  的弹性试值。

在积分过程中需要满足 Kuhn-Tucker 条件：

$$\left. \begin{aligned} f_i(\tilde{\sigma}_{n+1}, \xi_{i,n+1}) &= 0 \\ \Delta \gamma_{i,n+1} &= 0 \\ \Delta \gamma_{i,n+1} f_i(\tilde{\sigma}_{n+1}, \xi_{i,n+1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i=1, 2 \quad (17)$$

式中：标有下标 1 和 2 的变量分别对应 SS 和 LC 屈服面；内变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别代表硬化参数  $H$  和  $\tilde{p}_c$ ； $\Delta \gamma_1$  和  $\Delta \gamma_2$  分别代表 SS 和 LC 屈服面的塑性算子。

利用 Newton 方法，式 (16) 中各个方程的残余形式表示为

$$\left. \begin{aligned} R_{\tilde{\sigma},n+1}^{(k)} &= (D^e)^{-1} \tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \Delta \varepsilon_{n+1} + \sum_i (\Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{\sigma}}) \\ R_{H,n+1}^{(k)} &= -H_{n+1}^{(k)} + H_n + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_d^p} \Big|_{n+1}^{(k)} \sum_i \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,q} \\ R_{\tilde{p}_c,n+1}^{(k)} &= -\tilde{p}_{c,n+1}^{(k)} + \tilde{p}_{c,n+1}^{(0)} \exp \left[ \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \sum_i (\Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{p}}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

为了方便，此处及下文推导过程中省略了屈服面和塑性势函数的相关导数的上标  $(k)$  和下标  $n+1$ ，并且下标中的 ‘#’ 代表对相应变量 ‘#’ 的导数。式 (18) 需要满足约束条件：

$$f_{i,n+1}^{(k)}(\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \xi_{i,n+1}^{(k)}) = 0 \quad (19)$$

对式 (18) 线性化，整理有

$$\left. \begin{aligned} R_{\tilde{\sigma},n+1}^{(k)} - (D^e)^{-1} d\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \sum_i (\delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{\sigma}} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{\sigma}\xi} d\xi_{n+1}^{(k)}) &= 0 \\ R_{H,n+1}^{(k)} + dH_{n+1}^{(k)} - \zeta \sum_i (\delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,q} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,q\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,q\xi} d\xi_{n+1}^{(k)}) &= 0 \\ R_{\tilde{p}_c,n+1}^{(k)} + d\tilde{p}_{c,n+1}^{(k)} - \mathcal{G} \sum_i (\delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{p}} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{p}\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{p}\xi} d\xi_{n+1}^{(k)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中：

$$\zeta = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_d^p} \Big|_{n+1}^{(k)} ; \mathcal{G} = \tilde{p}_{c,n+1}^{(0)} \exp \left[ \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \sum_i \Delta \gamma_{i,n+1}^{(k)} g_{i,\tilde{p}} \right] \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} .$$

根据式 (20)，有

$$\left\{ \begin{aligned} d\tilde{\sigma}_{n+1}^{(k)} \\ dH_{n+1}^{(k)} \\ d\tilde{p}_{c,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\} = A^{-1} \left\{ \begin{aligned} R_{\tilde{\sigma},n+1}^{(k)} \\ R_{H,n+1}^{(k)} \\ R_{\tilde{p}_c,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\} - \sum_i \delta \gamma_i A^{-1} \left\{ \begin{aligned} g_{i,\tilde{\sigma}} \\ \zeta g_{i,q} \\ \mathcal{G} g_{i,\tilde{p}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中：

$$A_{11} = (\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}\bar{\sigma}}; A_{12} = \Delta\gamma_1 \mathbf{g}_{1,\bar{\sigma}H}; A_{13} = \Delta\gamma_2 \mathbf{g}_{2,\bar{\sigma}\bar{p}c};$$

$$A_{21} = \zeta \sum_i \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,q\bar{\sigma}}; A_{22} = \zeta \Delta\gamma_1 \mathbf{g}_{1,qH} - 1; A_{23} = \zeta \Delta\gamma_2 \mathbf{g}_{2,q\bar{p}c};$$

$$A_{31} = \mathcal{G} \sum_i \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{p}\bar{\sigma}}; A_{32} = \mathcal{G} \Delta\gamma_1 \mathbf{g}_{1,\bar{p}H}; A_{33} = \mathcal{G} \Delta\gamma_2 \mathbf{g}_{2,\bar{p}\bar{p}c} - 1.$$

根据一致性条件，有

$$\left. \begin{aligned} f_{1,n+1}^{(k)} + f_{1,\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + f_{1,H} dH_{n+1}^{(k)} &= 0 \\ f_{2,n+1}^{(k)} + f_{2,\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + f_{2,\bar{p}c} d\bar{p}_{c,n+1}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将式 (21) 代入式 (22)，整理有

$$\left\{ \begin{aligned} f_{1,n+1}^{(k)} \\ f_{2,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\} + \begin{bmatrix} f_{1,\bar{\sigma}} & f_{1,H} & 0 \\ f_{2,\bar{\sigma}} & 0 & f_{2,\bar{p}c} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{\sigma},n+1}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{H,n+1}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{\bar{p}c,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\} -$$

$$\begin{bmatrix} f_{1,\bar{\sigma}} & f_{1,H} & 0 \\ f_{2,\bar{\sigma}} & 0 & f_{2,\bar{p}c} \end{bmatrix} \sum_i \delta\gamma_{i,n+1}^{(k)} \mathbf{A}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}} \\ \zeta \mathbf{g}_{i,q} \\ \mathcal{G} \mathbf{g}_{i,\bar{p}} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (23)$$

求解式 (23)，有

$$\delta\gamma_{n+1}^{(k)} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{c} \quad (24)$$

式中：

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,\bar{\sigma}} & f_{1,H} & 0 \\ f_{2,\bar{\sigma}} & 0 & f_{2,\bar{p}c} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1,\bar{\sigma}} & \mathbf{g}_{2,\bar{\sigma}} \\ \zeta \mathbf{g}_{1,q} & \zeta \mathbf{g}_{2,q} \\ \mathcal{G} \mathbf{g}_{1,\bar{p}} & \mathcal{G} \mathbf{g}_{2,\bar{p}} \end{bmatrix};$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 \\ c_2 \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} f_{1,\bar{\sigma}} & f_{1,H} & 0 \\ f_{2,\bar{\sigma}} & 0 & f_{2,\bar{p}c} \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{\sigma},n+1}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{H,n+1}^{(k)} \\ \mathbf{R}_{\bar{p}c,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\} + \left\{ \begin{aligned} f_{1,n+1}^{(k)} \\ f_{2,n+1}^{(k)} \end{aligned} \right\}.$$

将计算后的塑性算子增量代入式 (21) 即得到第  $k$  迭代步的应力和内变量增量。当满足相应残余项  $\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}$  和屈服函数  $f_{n+1}^{(k)}$  的容许误差时则算法结束。该应力积分算法流程如表 1 所示。

表 1 应力积分算法流程

Table 1 Procedure of stress integration algorithm

步骤	公式
初始化	$k = 0, s_{n+1} = s_n + \Delta s_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1},$ $\Delta\gamma_{n+1}^{(0)} = 0$
弹性预测	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(0)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n + \mathbf{D}^e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(0)}),$ $\bar{p}_{c,n+1}^{(0)} = \bar{p}_{c,n} \exp(-k_{sw} \Delta s_{re,n+1})$
检查收敛条件	$f_{n+1}^{(k)} = f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)})$ ，并根据式 (18) 计算 $\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}$ 。若 $f_{n+1}^{(k)} < TOL_1$ ， $\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} < TOL_2$ ，则跳至第 6 步
计算塑性算子增量	式 (24)
计算应力和内变量增量	式 (21)
更新变量	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)} + d\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)} + d\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{(k)},$ $\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \delta\gamma_{n+1}^{(k)}, k = k + 1$ 并返回第 3 步

固相模型中存在两个屈服面，即 SS 和 LC 屈服面。在弹性预测阶段，当其中任一屈服面的屈服函数大于 0 时，即  $f_i > 0$  ( $i = \text{SS}$  或  $\text{LC}$ )，则表示  $\Delta\gamma_i > 0$ ，并且  $\Delta\gamma_j = 0$  ( $j \neq i$ )。然而，Simo 等<sup>[24]</sup>指出，在弹性预测阶段，当两个屈服面的屈服函数同时大于 0 时，即  $f_{SS} > 0$  和  $f_{LC} > 0$ ，并不代表  $\Delta\gamma_{SS} > 0$  和  $\Delta\gamma_{LC} > 0$  同时成立。此处采用 Simo 等<sup>[24]</sup>提出的方法，处理两个屈服面的屈服函数同时大于 0 的情况。在迭代计算过程中，若  $\Delta\gamma_{i,n+1}^{(k)} < 0$  时 ( $i = \text{SS}$  或  $\text{LC}$ )，则认为  $i$  屈服面并没有发生屈服，并重新进行第  $n+1$  步的计算。

#### 4 一致性切线模量

在有限元计算中，需要使用本构关系的一致性切线模量。这一方面可以避免材料在发生屈服时，连续弹塑性模量引起的伪加载和卸载；另一方面也使得整体有限元计算具有二阶收敛性。此处仅给出当 SS 和 LC 屈服面同时屈服时对应的一致性切线模量的推导过程。为了方便，下文推导过程中省略了标  $n+1$ 。

对于欧拉向后积分算法，切线模量定义为<sup>[16-19]</sup>

$$\mathbf{D}^{\text{con}} = (\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \partial \boldsymbol{\varepsilon})_{n+1}, \mathbf{W}^{\text{con}} = (\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \partial s)_{n+1} \quad (25)$$

根据应力-应变关系，有

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (26)$$

塑性应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  表示为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_i [\Delta\gamma_i (\mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}\bar{\sigma}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}\xi_i} d\xi_i) + d\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}}] \quad (27)$$

将式 (27) 代入式 (26)，整理有

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} [d\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_i (\Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}\xi_i} d\xi_i + d\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}})] \quad (28)$$

式中： $\mathbf{E} = [(\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i (\Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}\bar{\sigma}})]^{-1}$ 。

根据硬化方程，有

$$\left. \begin{aligned} dH &= \zeta \sum_i (d\gamma_i \mathbf{g}_{i,q} + \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,q\bar{\sigma}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,q\xi_i} d\xi_i) \\ d\bar{p}_c &= \mathcal{G} \sum_i (d\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{p}} + \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{p}\bar{\sigma}} d\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{p}\xi_i} d\xi_i) - \\ &k_{sw} \bar{p}_c dS_{re} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

与式 (20) 中  $\mathcal{G}$  的定义不同，此处，

$$\mathcal{G} = \bar{p}_{c,n} \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \sum_i \Delta\gamma_i \mathbf{g}_{i,\bar{p}}\right) \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa}$$

根据式 (28) (29)，有

$$\begin{bmatrix} d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ dH \\ d\bar{p}_c \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \\ k_{sw} \bar{p}_c dS_{re} \end{bmatrix} - \sum_i d\gamma_i \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i,\bar{\sigma}} \\ \zeta \mathbf{g}_{i,q} \\ \mathcal{G} \mathbf{g}_{i,\bar{p}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中：矩阵  $A$  在式 (21) 中已定义。

将式(21)代入一致性条件  $f_{,\sigma}^1 d\tilde{\sigma} + f_{,H}^1 dH = 0$  和  $f_{,\sigma}^2 d\tilde{\sigma} + f_{,\tilde{p}_c}^2 d\tilde{p}_c = 0$ ，整理后有

$$B \begin{Bmatrix} d\gamma_1 \\ d\gamma_2 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ 0 \\ k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

式中：矩阵  $B$  在式 (24) 中已定义。此外

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,\sigma} & f_{1,H} & 0 \\ f_{2,\sigma} & 0 & f_{2,\tilde{p}_c} \end{bmatrix} A^{-1}$$

求解式 (31)，有

$$\begin{Bmatrix} d\gamma_1 \\ d\gamma_2 \end{Bmatrix} = B^{-1} F \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ 0 \\ k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ 0 \\ k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (30)，整理后有

$$\begin{Bmatrix} d\tilde{\sigma} \\ dH \\ d\tilde{p}_c \end{Bmatrix} = A^{-1} \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ 0 \\ k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \end{Bmatrix} - HG \begin{Bmatrix} d\epsilon \\ 0 \\ k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

式中：

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} g_{1,\sigma} & g_{2,\sigma} \\ \zeta g_{1,q} & \zeta g_{2,q} \\ \vartheta g_{1,\tilde{p}} & \vartheta g_{2,\tilde{p}} \end{bmatrix}。$$

因此，可以得到

$$d\tilde{\sigma} = [(A_{11})^{-1} - H_{11}(G_{11} + G_{21})] d\epsilon + [(A_{13})^{-1} - H_{12}(G_{13} + G_{23})] k_{sw} \tilde{p}_c dS_{re} \quad (34)$$

将饱和度表达式，即  $dS_{re} = D_w^{con} d\epsilon_v + W_w^{con} ds$  代入式 (34) 中，整理后有

$$d\tilde{\sigma} = \left\{ [(A_{11})^{-1} - H_{11}(G_{11} + G_{21})] + [(A_{13})^{-1} - H_{12}(G_{13} + G_{23})] k_{sw} \tilde{p}_c D_w^{con} (\delta)^T \right\} d\epsilon + [(A_{13})^{-1} - H_{12}(G_{13} + G_{23})] k_{sw} \tilde{p}_c W_w^{con} ds \quad (35)$$

式中： $D_w^{con}$  和  $W_w^{con}$  为土-水特征曲线模型中的模量。

利用式 (35) 可以给出一致性切线模量表达式为

$$D^{con} = [(A_{11})^{-1} - H_{11}(G_{11} + G_{21})] + [(A_{13})^{-1} - H_{12}(G_{13} + G_{23})] k_{sw} \tilde{p}_c D_w^{con} (\delta)^T \quad (36)$$

$$W^{con} = [(A_{13})^{-1} - H_{12}(G_{13} + G_{23})] k_{sw} \tilde{p}_c W_w^{con} \quad (37)$$

### 5 数值算例

为了验证非饱和黏土状态相关本构模型的预测能力、模型隐式算法的收敛性和准确性，以及所得本构关系的一致性切线模量的有效性，此处首先选

取一组已发表的室内黏土试验进行预测，其次在高斯点尺度中对比不同应变步长下各向同性和轴对称应变控制试验的计算结果，最后进行二维情况下非饱和土地地区地基固结问题的有限元计算。

#### 5.1 粉质黏土三轴试验进行预测

Cui 等<sup>[5]</sup>对击实 Jossigny 粉质黏土进行了一系列的排水三轴压缩试验，此处选取其中部分试验进行验证。Jossigny 粉质黏土中的黏土成分为伊利石、高岭土和成层的伊利-蒙脱石。试验设备控制吸力的方法是渗透技术。试验过程中，土样首先干化至不同吸力 (400、800 kPa)，干化过程中的限制净平均应力为 0 kPa；其次，维持吸力不变，土样固结至不同的平均应力 (50、200、400 kPa)；最后，维持吸力和围压不变，对土样进行排水剪切。模型计算过程中参数取值为： $\lambda = 0.06$ 、 $\kappa = 0.004$ 、 $\nu = 0.3$ 、 $M_c = 1.1$ 、 $G_{p0} = 150$ 、 $D = 1.1$ 、 $e_{cr} = 0.125$ 、 $\tilde{p}_{cr} = 1.2 \times 10^2$  MPa、 $\lambda_{cd} = 0.11$ 、 $\lambda_w = 0.21$ 、 $\kappa_w = 0.01$ 、 $S_{res} = 0.5$ 、 $k_{sw} = 0.25$ 、 $k_{ws} = 0.25$ ；状态变量取值为： $e_0 = 0.621$ 、 $S_{r0} = 0.77$ 、 $\tilde{p}_c = 450$  kPa、 $s_1 = 279$  kPa、 $s_D = 180$ 。

图 3、4 显示了三轴固结试验中偏应力和体积应变随轴向应变的变化。试验与预测结果间的比较表明，模型能够合理地预测剪切过程中土体的剪胀和剪缩现象。在 400、800 kPa 的吸力下，当限制应力等于 50 kPa 时，土体发生剪胀。此外，由于缺少剪切过程中饱和度变化的测量，因此，并没有给出相关的比较。

#### 5.2 积分点尺度数值验证

为了验证所提算法在积分点尺度中的收敛性和准确性，此处对比不同应变步长下各向同性和轴对称应变路径下，计算了应力变量的相对误差和所需迭代次数。第 1 个应变路径为  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  和  $\epsilon_3$  从 0 增加至 0.02；第 2 个应变路径为  $\epsilon_1$  从 0 增加至 0.1， $\epsilon_2$  和  $\epsilon_3$  从 0 减小至 -0.025。应变步长分别选取为  $1 \times 10^{-5}$ 、 $1 \times 10^{-4}$ 、 $5 \times 10^{-4}$ 、 $1 \times 10^{-3}$  和  $2 \times 10^{-3}$ 。为了确定不同步长下计算结果的误差，选取应变步长为  $1 \times 10^{-5}$  时的结果为精确解，并且定义相对误差为

$$err_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i - p_{ex}}{p_{ex}} \right)^2} / N \quad (38)$$
$$err_q = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{q_i - q_{ex}}{q_{ex}} \right)^2} / N$$

式中： $err_p$  和  $err_q$  分别为平均应力  $p$  和偏应力  $q$  的相对误差； $p_{ex}$  和  $q_{ex}$  为精确解； $N$  代表选取的比值个数，在两种应变路径中  $N$  分别为 10 和 50。弹

塑性本构模型的参数及状态变量的取值与算例 1 中的一致。此外，初始应力状态为  $\tilde{p} = 50 \text{ kPa}$ 、 $s = 200 \text{ kPa}$ 。

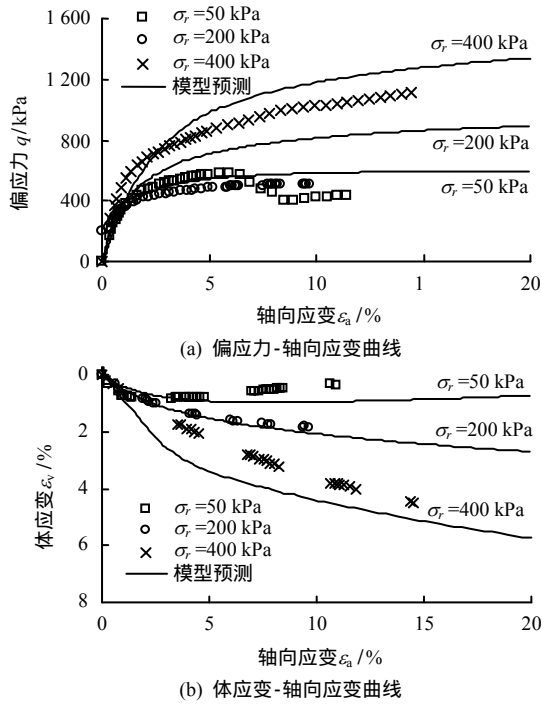


图 3 Jossigny 粉质黏土的常吸力 ( $s = 800 \text{ kPa}$ ) 及不同净限制应力下排水剪切试验结果与模型预测结果间的比较  
Fig.3 Comparison between the measured and predicted results of drained triaxial compression tests at different net confining stresses and  $s = 800 \text{ kPa}$  on Jossigny silty clay

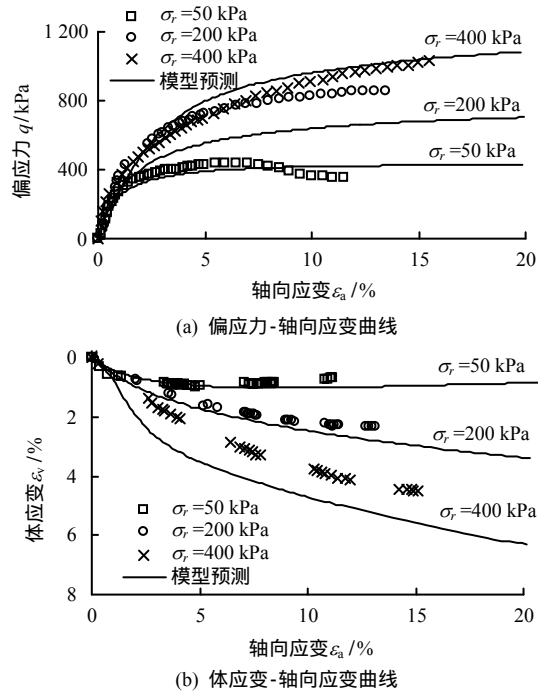


图 4 Jossigny 粉质黏土的常吸力 ( $s = 400 \text{ kPa}$ ) 及不同净限制应力下排水剪切试验结果与模型预测结果间的比较  
Fig.4 Comparison between the measured and predicted results of drained triaxial compression tests at different net confining stresses and  $s = 400 \text{ kPa}$  on Jossigny silty clay

图 5、6 给出了不同步长两种应变路径下计算结果的比较。表 2、3 分别给出了不同步长两种应变路径下相对误差和迭代次数的比较。结果表明：不同步长下计算应力间的偏离集中在弹塑性变形过渡阶段；随着步长的增加，相对误差逐渐增加；然而，

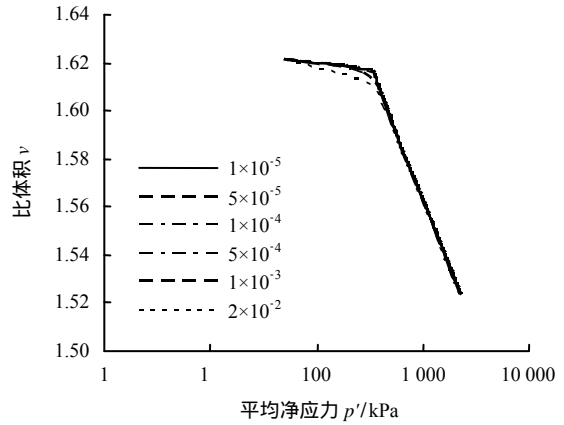


图 5 不同步长各向同性应变路径下计算结果比较  
Fig.5 Comparison of calculation results for the isotropic strain path at different step sizes

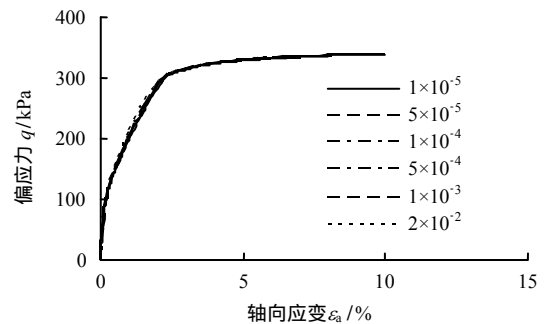


图 6 不同步长轴对称应变路径下计算结果比较  
Fig.6 Comparison of calculation results for the axial symmetry strain path at different step sizes

表 2 不同步长相对误差比较  
Table 2 Comparison of relative errors at different step sizes

步长	试验 1		试验 2	
	$err_p/\%$	$err_q/\%$	$err_p/\%$	$err_q/\%$
$1 \times 10^{-4}$	0.46	0.18	0.65	
$5 \times 10^{-4}$	2.19	0.85	2.61	
$1 \times 10^{-3}$	4.21	1.50	3.78	
$2 \times 10^{-2}$	10.44	2.46	4.76	

表 3 不同步长迭代步数比较  
Table 3 Comparison of iteration number at different step sizes

步长	试验 1		试验 2	
	总迭代次数	迭代次数每步	总迭代次数	迭代次数每步
$5 \times 10^{-5}$	979	2.45	6 456	3.23
$1 \times 10^{-4}$	563	2.82	3 305	3.31
$5 \times 10^{-4}$	115	2.88	862	4.31
$1 \times 10^{-3}$	59	2.95	500	5.00
$2 \times 10^{-2}$	41	4.10	264	5.28

该隐式算法在步长较大的情况下，亦表现出较强的稳定性以及一定的准确性；总迭代次数随着步长的增加而减少，平均迭代次数每步随着步长的增加而略有增加。

### 5.3 有限元尺度数值验证

为了处理非饱和土边界值问题，本文利用非饱和和多孔介质有限元程序平台 U\_DYSAC2 进行求解。该有限元程序平台的有效性已在文献中得到验证<sup>[15, 25]</sup>。U\_DYSAC2 中使用了适用于非饱和土初边值问题的控制方程，采用 Galerkin 方法将非饱和土的控制方程在空间上离散，并利用广义 Newmark 方法将控制方程在时间域上离散形成迭代求解的基本方程。此处应用本构模型积分算法模块及有限元程序平台 U\_DYSAC2 计算一个二维情况下土体地基固结问题。

在算例中，一个柔性基础放置于非饱和的弹塑性的土层上。地基承受 100 kPa 均匀分布的荷载，荷载随时间的变化如图 7 所示。所研究问题的几何形状和有限元网格如图 8 所示，其中有限元网格由 81 个 4 节点等参单元组成。由于研究问题的对称性，此处仅取模型的 1/2 进行分析。土体边界条件定义为：左、右两侧为光滑不透水、不透气边界，底部为固定不透水、不透气边界，顶部为自由透水、透气边界。由于材料的弹性体积模量是平均骨架应力的函数，所以初始应力值应大于 0，此处假设各个高斯点上初始平均骨架应力为 300 kPa，初始前期固结压力为初始平均骨架应力的 1.5 倍，初始饱和度

为 70%。弹塑性本构模型的参数及其余状态变量的取值与算例 1 中的一致。计算中采用的基本材料参数列于表 4。

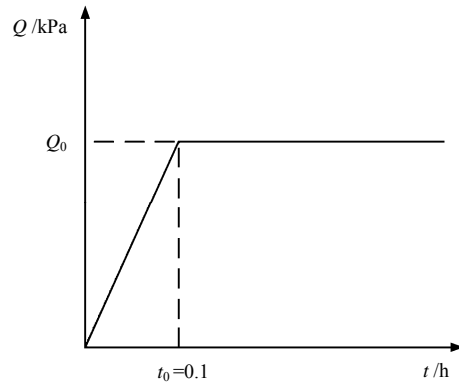


图 7 条形基础荷载历史  
Fig.7 Load history of strip footing

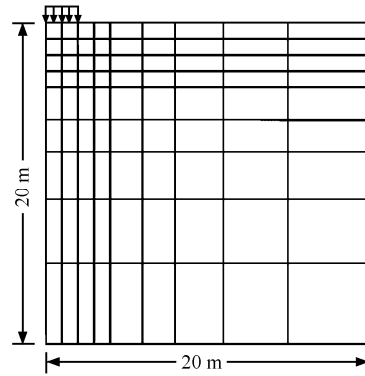


图 8 有限元网格  
Fig.8 Finite element meshes

表 4 基本材料参数

Table 4 Basic material parameters

骨架密度	水密度	空气密度	水的体积模量	空气体积模量	水相黏滞系数	气相黏滞系数	绝对渗透张量
$\rho_s / (\text{g}/\text{cm}^3)$	$\rho_w / (\text{g}/\text{cm}^3)$	$\rho_g / (\text{kg}/\text{m}^3)$	$K_w / \text{kPa}$	$K_g / \text{kPa}$	$\mu_w / (\text{kPa}\cdot\text{h})$	$\mu_g / (\text{kPa}\cdot\text{h})$	$k / \text{m}^2$
2.6	1.0	1.22	$2.2 \times 10^6$	100	$2.78 \times 10^{10}$	$5.0 \times 10^{-12}$	$1.0 \times 10^{-13}$

程序计算的基础下方中心线处和顶面边界的竖向位移发展情况如图 9、10 所示。从图中可以看出，基础下方中心线处的竖向位移随深度的增加而减小，并且随着时间的增长而逐渐趋于稳定；加载处附近的顶面边界的竖向位移明显大于其他顶面边界处的，并且顶面边界的竖向位移亦随着时间的增长而逐渐趋于稳定。图 11 给出了  $t = 480 \text{ h}$  时即相对稳定时刻，塑性体积应变和塑性偏应变的等值线图。从图中可以看出，土体的塑性应变随着其与基础间的距离而逐渐减弱。该预测结果与 Zamma<sup>[26]</sup>、Sheng<sup>[9]</sup>、Ma<sup>[15]</sup>等给出的一致。

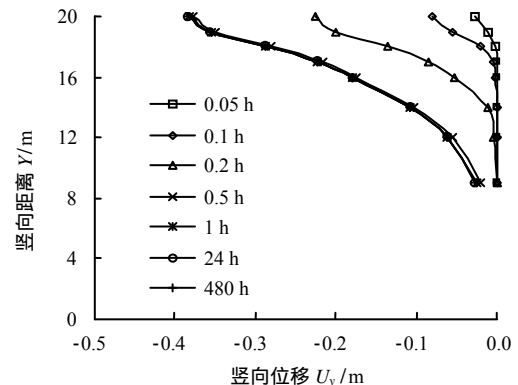


图 9 基础下方中心线处竖向位移随时间变化情况  
Fig.9 Variations of vertical displacement of central line under foundation



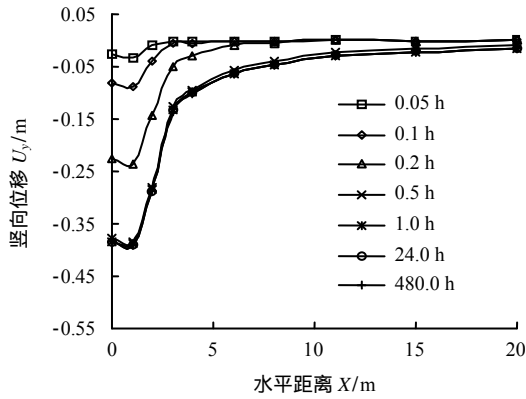


图 10 顶部边界竖向位移随时间变化情况  
Fig.10 Variations of vertical displacement of top surface boundary

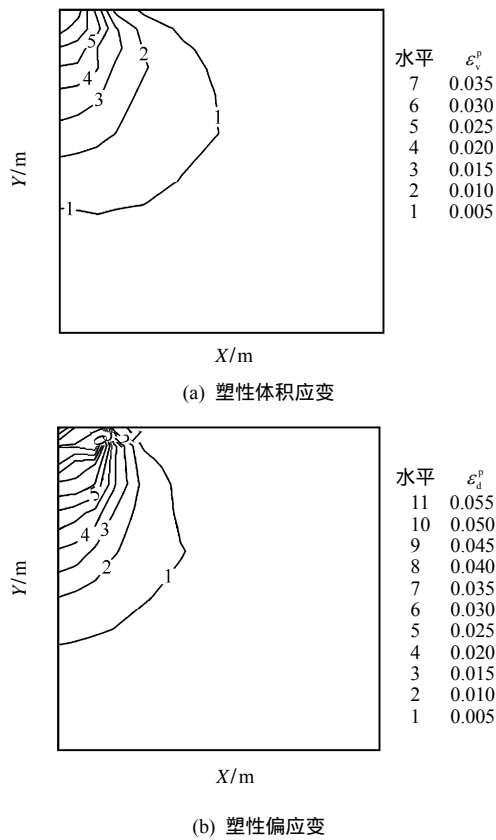


图 11  $t = 480\text{ h}$  塑性应变位移等值线  
Fig.11 Contours of plastic strain at  $t = 480\text{ h}$

## 6 结 论

(1) 文中对一非饱和黏土的状态相关的本构模型提出了隐式积分算法。算法中在弹性预测阶段考虑了饱和度的变化对前期固结压力的影响，并且在塑性修正阶段处理了双固相屈服面函数同时大于 0 的情况。

(2) 文中给出了模型的一致性切线模量，其中考虑了吸力变化对应力增量贡献的部分。

(3) 文中对一组粉质黏土三轴试验结果进行了预测，并利用不同应变步长对各向同性和轴对称应变控制试验结果进行了计算。结果表明，该本构模型能够合理地反映密实程度和饱和度对非饱和土力学行为的影响，并且该隐式算法在步长较大的情况下仍具有较快的收敛速度及一定的准确性。

(4) 文中将该模型应用于有限元程序平台 U\_DYSAC2，并对二维情况下非饱和土地区地基固结问题进行了计算。结果表明该模型的隐式算法及其一致性切线模量可应用于求解非饱和土的渗流-变形耦合问题。

## 参 考 文 献

- [1] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Geotechnique*, 1985, 35(2): 99 - 112.
- [2] GAJO A, WOOD M. Severn-Trent sand: A kinematic-hardening constitutive model: The  $q-p$  formulation[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(5): 595 - 614.
- [3] TAIEBAT M, DAFALIAS Y F. SANISAND: Simple anisotropic sand plasticity model[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2008, 32(8): 915 - 948.
- [4] YIN Z-Y, XU Q, HICHER P-Y. A simple critical-state-based double-yield-surface model for clay behavior under complex loading[J]. *Acta Geotechnica*, 2013, 8(5): 509 - 523.
- [5] CUI Y J, DELAGE P. Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt[J]. *Geotechnique*, 1996, 46(2): 291 - 311.
- [6] CHIU C F. Behaviour of unsaturated loosely compacted weathered materials[D]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 2001.
- [7] CHIU C F, NG C W W. A state-dependent elasto-plastic model for saturated and unsaturated soils[J]. *Geotechnique*, 2003, 53(9): 809 - 829.
- [8] SHENG D, SLOAN S W, GENS A, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(9): 745 - 765.
- [9] SHENG D, SMITH D W, SLOAN S W, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part II: Verification and application[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(9): 767 - 790.

- [10] SOŁOWSKI W T, GALLIPOLI D. Explicit stress integration with error control for the Barcelona basic model. Part I: Algorithms formulation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(1 - 2): 59 - 67.
- [11] SOŁOWSKI W T, GALLIPOLI D. Explicit stress integration with error control for the Barcelona basic model. Part II: Algorithms efficiency and accuracy[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(1 - 2): 68 - 81.
- [12] ORTIZ M, SIMO J C. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1986, 23(8): 353 - 366.
- [13] VAUNAT J, CANTE J C, LEDESMA A, et al. A stress point algorithm for an elastoplastic model in unsaturated soils[J]. **International Journal of Plasticity**, 2000, 16(2): 121 - 141.
- [14] ZHANG H W, HEERES O M, DE BORST R, et al. Implicit integration of a generalized plasticity constitutive model for partially saturated soil[J]. **Engineering Computations**, 2001, 18(1 - 2): 314 - 336.
- [15] MA T T, WEI C F, CHEN P, et al. Implicit scheme for integrating constitutive model of unsaturated soils with coupling hydraulic and mechanical behavior[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2014, 35(9): 1129 - 1154.
- [16] 李锡夔, 范益群. 非饱和土变形及渗流过程的有限元分析[J]. **岩土工程学报**, 1998, 20(4): 20 - 24.  
LI Xi-kui, FAN Yi-qun. Finite element analysis of deformation and seepage process in unsaturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1998, 20(4): 20 - 24.
- [17] 周雷, 张洪武. 非饱和土化学-塑性耦合本构行为的数值模拟[J]. **岩土力学**, 2009, 30(7): 2133 - 2140.  
ZHOU Lei, ZHANG Hong-wu. Numerical simulation for chemo-plastic coupled constitutive behavior of partially saturated soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(7): 2133 - 2140.
- [18] 胡冉. 非饱和土水力全耦合模型与数值模拟方法研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2013.  
HU Ran. A fully coupled hydromechanical model for unsaturated soils and its numerical simulations[D]. Wuhan: Wuhan University, 2013.
- [19] 刘艳, 韦昌富, 房倩, 等. 非饱和土水-力本构模型及其隐式积分算法[J]. **岩土力学**, 2014, 35(2): 365 - 370.  
LIU Yan, WEI Chang-fu, FANG Qian, et al. Implicit integration algorithm of a hydro-mechanical coupling constitutive model for unsaturated soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(2): 365 - 370.
- [20] BIAREZ J, HICHER P-Y. Elementary mechanics of soil behaviour[M]. Rotterdam: Balkema, 1994.
- [21] SIVAKUMAR V. A critical state framework for unsaturated soil[D]. Sheffield: University of Sheffield, 1993.
- [22] WHEELER S J, SIVAKUMAR V. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil[J]. **Géotechnique**, 1995, 45(1): 35 - 53.
- [23] WHEELER S J, SHARMA R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. **Géotechnique**, 2003, 53(1): 41 - 54.
- [24] SIMO J C, KENNEDY J G, GOVINDJEE S. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity: Loading/unloading conditions and numerical algorithms[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1988, 26(10): 2161 - 2185.
- [25] WEI C F. Static and dynamic behavior of multiphase porous media: Governing equations and finite element implementation[D]. Norman, Oklahoma: University of Oklahoma, 2001.
- [26] ZAMAN M, GOPALASINGAM A, LAGUROS J G. Consolidation settlement of bridge approach foundation[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1991, 117(2): 219 - 240.