

DOI : 10.16285/j.rsm.2017.S1.017

# 岩质边坡楔形体破坏概率的方向模拟

朱 勇<sup>1</sup>, 周 辉<sup>1</sup>, 冯夏庭<sup>1</sup>, 张传庆<sup>1</sup>, 张铭强<sup>2</sup>, 杨凡杰<sup>1</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;

2. 浙江省交通规划设计研究院, 浙江 杭州 310006)

**摘 要:** 针对边坡小概率破坏的高效模拟问题, 提出采用方向模拟方法进行计算, 介绍了方向模拟的基本理论和楔形体破坏功能函数的算法, 编制了岩质边坡楔形体破坏概率的方向模拟的 Matlab 程序, 分别将方向模拟结果与重要抽样模拟、子集模拟的计算结果进行了对比分析。结果表明, 方向模拟与子集模拟一样适合于小概率破坏的计算, 方向模拟方法在抽样次数较少的情况下就能获得较高的计算精度, 与其他两种方法相比效率更高。

**关 键 词:** 楔形体边坡; 方向模拟; 小概率破坏; 可靠度

**中图分类号:** TU 473

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 7598 (2017) 增 1 - 0151 - 07

## Directional simulation of failure probability of rock slope wedge

ZHU Yong<sup>1</sup>, ZHOU Hui<sup>1</sup>, FENG Xia-ting<sup>1</sup>, ZHANG Chuan-qing<sup>1</sup>, ZHANG Ming-qiang<sup>2</sup>, YANG Fan-jie<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Zhejiang Provincial Institute of Communications Planning, Design & Research, Hangzhou, Zhejiang 310006, China;)

**Abstract:** Directional simulation method is proposed to calculate the small probability of slope failure. Algorithms of directional simulation and wedge safety factor are introduced and programmed. The direction simulation results and the importance sampling respectively, compare the calculation results with the subset simulation analysis. The results show that the directional simulation method can be used to calculate the small probability of slope failure as the same with subset simulation method. And directional simulation method can get enough accuracy by a small number of sampling, which means more efficiency than the other two methods.

**Keywords:** wedge slope; directional simulation; small failure probability; reliability index

## 1 引 言

建立在边坡稳定性分析通用条分法基础上的功能函数具有非线性隐式特征, 导致求解功能函数的一阶或二阶导数比较困难, 解决这一问题的办法之一是采用 Monte Carlo 等模拟的方法代替分析的方法计算失稳概率, 根据规范<sup>[1]</sup>所设定的可靠度设计标准, 对于安全级别为 I 级的工程结构, 其可靠度指标需达到 4.2, 失稳概率为  $3 \times 10^{-5}$ , 在失稳概率的变异系数为 0.01 的条件下采用原始 Monte Carlo 方法求解所需计算样本数超过  $10^8$  个<sup>[2]</sup>, 计算量大大增加。同时, 极低的失稳概率要求可靠度分析方法的求解精度至少达到失稳概率所在的数量级。要使模拟的方法达到失稳概率所要求的精度, 就需要对

大量的样本进行重复运算, 耗费巨量的计算资源, 有些甚至远远超出了工程本身的设计使用时间, 大大降低了模拟方法的实用价值。要解决该问题, 就必须在保证计算精度的条件下提高模拟方法的计算效率, 使其更具实用价值。因此必须引进新方法, 改变抽样策略, 使其能更好地适应小概率失稳的高效计算。

针对小概率失稳的高效计算问题, 常用的方法是 Au 等<sup>[3]</sup>提出的子集模拟方法, 已在岩土工程领域已有应用。王宇等<sup>[2]</sup>提出采用子集模拟 (subset simulation) 的方法进行边坡小概率破坏的高效模拟, 并利用微软公司开发的 excel 电子表格, 编制了子集模拟和边坡稳定性分析程序, 取得了较好的分析结果, 王宇等<sup>[4]</sup>还将该方法应用于扩大地基的可靠性设计和桩基设计<sup>[5]</sup>, 拓展了该方法的应用范

收稿日期: 2016-06-29

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (No. 2014CB046902); 国家自然科学基金项目 (No. 51279201)。

This work was Supported by the National by Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB046902) and the National Natural Science Foundation of China (51279201).

第一作者简介: 朱勇, 男, 1979 年生, 博士研究生, 助理研究员, 主要从事岩土工程可靠度、稳定性、风险评估方面的研究, E-mail: yzhu@whrsm.ac.cn

围。李典庆等<sup>[6]</sup>为实现基于可靠度理论的岩土工程设计,提出了通用代理响应辅助子集模拟方法,同样利用子集模拟方法提高小概率事件的计算效率。曹子君等<sup>[7]</sup>采用子集模拟方法进行了边坡可靠性分析。目前已经提出的解决方案中子集模拟方法比较有效,但缺乏其他方法与之验证对比。另外,李邵军等<sup>[8]</sup>提出将更新支持向量机与 Monte Carlo 方法相结合来提高计算效率。

本文提出采用方向模拟方法开展小概率失稳的高效计算,以边坡楔形体破坏概率为模拟对象,介绍了方向模拟的基本理论<sup>[9]</sup>和楔形体破坏的功能函数亦即安全系数的算法<sup>[10]</sup>,编制岩质边坡楔形体破坏概率的方向模拟的 Matlab 程序,对比分析了方向模拟、重要抽样模拟、子集模拟 3 种随机模拟方法的计算效率。

## 2 方向模拟方法

方向模拟方法最初由匈牙利科学院计算机与自动化研究所的 Deak 教授提出<sup>[11]</sup>, Bjerager<sup>[12]</sup>、Ditlevsen 等<sup>[13-14]</sup>、Nie 等<sup>[15-16]</sup>在原始算法的基础上又进一步的改进,提出了方向重要抽样方法。贡金鑫等<sup>[17]</sup>、宋述芳等<sup>[18]</sup>、张良欣等<sup>[19]</sup>、池巧君等<sup>[20]</sup>引进该方法进行了截断正态分布情况下结构可靠性分析。方向模拟适用于高维和小概率破坏的模拟,与 Monte Carlo 法、重要性抽样、拉丁超立方抽样等随机模拟方法相比,方向模拟在计算效率和计算精度上更有优势。

### 2.1 原始 Monte Carlo 模拟

Monte Carlo 法可以用来求解给定函数  $h(X)$  ( $X \subset \mathbb{R}^n$ ) 在给定子集  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  上的积分,令  $Z$  为任意  $n$  维随机向量,其密度函数为  $f_Z(X)$ ,该函数在  $\mathcal{F}$  的任意位置均取正值,于是有

$$\int_{\mathcal{F}} h(X) d\mathbb{R}^n = \int_{\mathcal{F}} \frac{h(X)}{f_Z(X)} f_Z(X) d\mathbb{R}^n = E \left[ 1_{Z \in \mathcal{F}} \frac{h(X)}{f_Z(X)} \right] \quad (1)$$

如果能够生成随机变量  $X = 1_{Z \in \mathcal{F}} h(X) / f_Z(X)$  的相互独立的样本,则样本的均值就是式(1)的期望值的中心估计,也就是给定积分的值。

结构可靠度的积分问题通常跟破坏概率的求解有关,其一般表达式为

$$P_f = \int_{\mathcal{F}} f_X(X) d\mathbb{R}^n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{X \in \mathcal{F}} f_X(X) d\mathbb{R}^n = E[1_{X \in \mathcal{F}}] \quad (2)$$

求解该式的一个最直接的途径是定义  $Z = X$ , 模拟随机变量  $X$  的结果,由于  $P_f$  一般非常小,绝大多数  $1_{X \in \mathcal{F}}$  的结果为 0,只有极少数的结果大于 0,显然这样模拟的效果非常不好,因此有必要提出一种新的模拟方法解决这一问题,方向模拟便是解决方案之一。

### 2.2 方向模拟

设集合  $\mathcal{G}$  为式(1)积分集合  $\mathcal{F}$  的补集,该集合相对于 0 点在极坐标系统中具有星形(star shape)特征,该极坐标系统中式(1)积分可变为

$$\int_{\mathcal{F}} h(X) d\mathbb{R}^n = \int_{\text{unit sphere}} \left[ \int_{r(\alpha)}^{\infty} \frac{h(s\alpha)}{f_Z(s\alpha)} f_R(s|\alpha) ds \right] f_A(\alpha) d\alpha = E \left[ \int_{r(A)}^{\infty} \frac{h(sA)}{f_Z(sA)} f_R(s|A) ds \right] \quad (3)$$

式中: $\alpha$  为方向向量; $r(\alpha)$  为  $\alpha$  方向到集合  $\mathcal{F}$  的边界  $\partial\mathcal{F}$  上的半径向量; $f_R(s|\alpha)$  为给定  $A = \alpha$  时  $R$  的条件密度; $R$ 、 $A$  分别为半径向量分矢量和方向单位向量分矢量,在极坐标中  $Z$  表示为

$$Z = RA \quad (4)$$

当  $\mathcal{F}$  为系统失效集合且  $h(X) = f_X(X)$  时,式(3)的积分就是(2)中给定的破坏概率  $P_f$ 。

区别于直接模拟式(1)中  $Z$  的结果,方向模拟方法采用由  $Z$  模拟所得结果决定的模拟方向  $A$  来应用 Monte Carlo 方法开展模拟,式(4)可改写为

$$A = \frac{Z}{\|Z\|} \quad (5)$$

式中: $\|Z\| = R = \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2}$ . 对于  $A$  的结果  $\alpha$  模拟变量值:

$$\int_{r(\alpha)}^{\infty} \frac{h(s\alpha)}{f_Z(s\alpha)} f_R(s|\alpha) ds \quad (6)$$

可由适当的数值积分公式得出,如梯形公式或积分的封闭解。如果  $h(X)$  是  $n$  维标准正态函数  $\varphi_n(X)$ ,模拟分布也是同样的分布,则封闭解存在,如图 1 所示。 $R^2$ 、 $\chi^2$  分布也具有  $n$  个自由度,因此式(6)可压缩为

$$\int_{r(\alpha)}^{\infty} f_R(s|\alpha) ds = 1 - K_n[r(\alpha)^2] \quad (7)$$

式中: $K_n(\cdot)$  为具有  $n$  个自由的  $\chi^2$  分布函数,具有以下封闭公式,当  $n$  为偶数时,

$$K_n(r^2) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \sum_{q=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{q!} \left(\frac{r^2}{2}\right)^q \quad (8)$$

当  $n$  为奇数时,

$$K_n(r^2) = 2\phi(r) - 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

$$\sum_{q=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{\Gamma[(2q+3)/2]} \left(\frac{r^2}{2}\right)^{(2q+1)/2} \quad (9)$$

当方向模拟方法用于估计小概率破坏时，能够智能选择抽样分布，避免了式(2)所出现的只有少数点落入  $F$  域的问题，这样就解决了小概率失稳的高效模拟问题。

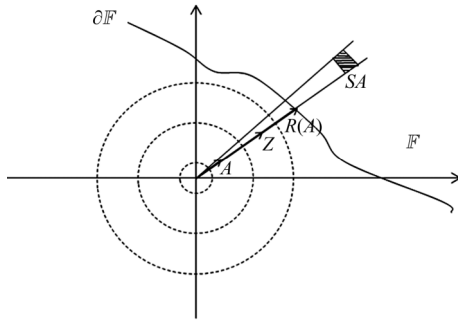


图 1 均匀方向模拟示意图

Fig.1 Sketch of uniform directional simulation

Deak 等<sup>[11]</sup>给出了方向模拟的具体算法步骤，此处不再赘述。

### 3 边坡楔形体破坏安全系数计算

#### 3.1 楔形体安全系数算法

对于边坡楔形体破坏安全系数的计算，Hoek 在其专著中给出了完整算法<sup>[10, 21]</sup>，Jimenez-Rodriguez 等<sup>[22]</sup>、李典庆等<sup>[23]</sup>、Reale 等<sup>[24]</sup>所采用的算法均源于此，包括 Rocscience 公司开发的 Swedge 软件也是采用 Hoek 给出的算法。陈祖煜等<sup>[25]</sup>则以空间解析几何的方式建立了楔形体稳定的极限平衡分析方法，提出了楔形体稳定分析的塑性力学广义解，其描述更简洁，原理更清晰，本文拟引用该方法简要介绍楔形体破坏安全系数的计算。

对形如图 2 的楔形体，结构面 1、2 分别为两

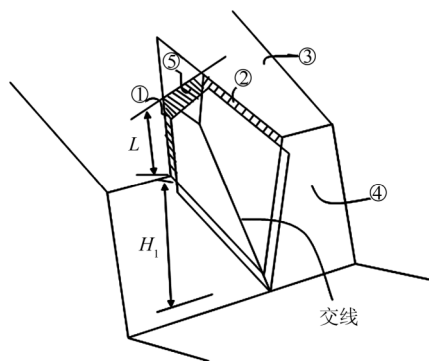


图 2 楔形体稳定分析示意图

Fig.2 Sketch of wedge failure analysis

个底滑面； 为边坡顶面； 为外坡面； 为后缘拉裂面； $H_1$  为坡高； $L$  为结构面 与坡顶面 的交线自后缘拉裂位置至外坡面的长度。

为便于描述，首先建立一个空间直角坐标系，设  $z$  轴与重力方向相反， $x$ 、 $y$  分别为正东和正北方向。某一面的产状（倾角  $\psi$  和倾向  $\alpha$ ）与该面内法线方向的方向导数（角度分别用  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  表示）存在以下关系

$$\left. \begin{aligned} \cos a_x &= \sin \psi \sin \alpha \\ \cos a_y &= \sin \psi \cos \alpha \\ \cos a_z &= \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于图 2 中的结构面 1、2，其交线的矢量为

$$J = n_1 \times n_2 \quad (11)$$

式中： $n_1$ 、 $n_2$  分别为结构面 1 和 2 的内法线矢量。

引进符号  $m_{a,b}$ ，向量  $a$  在向量  $b$  上的投影可由式(12)计算。

$$m_{a,b} = a \cdot b \quad (12)$$

假定楔形体滑动的剪切力平行于结构面 1、2 的交线方向，考察一个与交线垂直的剖面，将作用在该楔形体上的力投影到这个平面上，可得

$$\begin{aligned} (N_1 + U_1) + m_{n_2, n_1}(N_2 + U_2) + m_{w, n_1}W + \\ m_{v, n_1}V + m_{t, n_1}T = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (N_2 + U_2) + m_{n_1, n_2}(N_1 + U_1) + m_{w, n_2}W + \\ m_{v, n_2}V + m_{t, n_2}T = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

式中： $W$  为楔形体的重量； $V$  为后缘拉裂面的中水压力的总和（暂不考虑拉裂面的抗拉力）； $T$  为作用在楔形体上的外力； $N_1$ 、 $N_2$  分别为结构面 1、2 的有效法向反力； $U_1$ 、 $U_2$  分别为作用在结构面 1、2 上的水压力。按式(12)中的定义， $m_{n_2, n_1}$ 、 $m_{w, n_1}$ 、 $m_{v, n_1}$ 、 $m_{t, n_1}$  分别为向量  $n_2$  在向量  $n_1$  上的投影、楔形体重力矢量  $w$  在向量  $n_1$  上的投影、拉裂面中水压力矢量  $v$  在向量  $n_1$  上的投影、外力矢量  $t$  在向量  $n_1$  上的投影， $m_{n_1, n_2}$ 、 $m_{w, n_2}$ 、 $m_{v, n_2}$ 、 $m_{t, n_2}$  的含义可依次类推。

联立式(13)和式(14)，可解得  $N_1$ 、 $N_2$ ：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= qW + rV + sT - U_1 \\ N_2 &= iW + kV + lT - U_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} q &= (m_{n_1, n_2}m_{w, n_2} - m_{w, n_1}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \\ r &= (m_{n_1, n_2}m_{v, n_2} - m_{v, n_1}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \\ s &= (m_{n_1, n_2}m_{t, n_2} - m_{t, n_1}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \\ i &= (m_{n_1, n_2}m_{w, n_1} - m_{w, n_2}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \\ k &= (m_{n_1, n_2}m_{v, n_1} - m_{v, n_2}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \\ l &= (m_{n_1, n_2}m_{t, n_1} - m_{t, n_2}) / (1 - m_{n_1, n_2}^2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

沿交线(交线向量标号为  $j$ ) 向下的下滑力用  $S$  表示, 则作用在楔形体上的力在  $j$  方向上的投影为

$$S = m_{w,j}W + m_{v,j}V + m_{t,j}T \quad (17)$$

边坡的安全系数  $F$  为

$$F = \frac{c_1A_1 + c_2A_2 + N_1 \tan \phi_1 + N_2 \tan \phi_2}{S} \quad (18)$$

式中:  $c_1$ 、 $\phi_1$ 、 $A_1$ 、 $c_2$ 、 $\phi_2$ 、 $A_2$  分别为结构面、的黏聚力、内摩擦角和面积。

根据式(15)的计算结果, 分情况进行判断:

(1) 如果  $N_1 > 0$  且  $N_2 > 0$ , 安全系数由式(18)直接给出。

(2) 如果  $N_1 > 0$  且  $N_2 = 0$ , 则此时  $N_1$  应按单面滑动计算:

$$N_1 = -m_{w,n1}W - m_{v,n1}V - m_{t,n1}T - U_1 \quad (19)$$

将式(19)所得  $N_1$  代入式(18), 并令  $N_2 = 0$ , 即可得此种情况下的安全系数。

(3) 如果  $N_1 = 0$  且  $N_2 > 0$ , 则此时  $N_2$  也应按单面滑动计算:

$$N_2 = -m_{w,n2}W - m_{v,n2}V - m_{t,n2}T - U_2 \quad (20)$$

同样, 将式(20)所得  $N_2$  代入式(18), 并令  $N_1 = 0$ , 即可得此种情况下的安全系数。

### 3.2 安全系数校核

根据上述公式, 在 Matlab 中编程实现了边坡楔形体破坏的安全系数求解, 为了验证算法的有效性, 监控各中间变量的值, 本文在 excel 中也实现了该算法, 对于表 1 中的输入参数, 分别采用 Matlab 程

表 1 校核输入参数

结构面	参数	数值
面	倾角 $\psi_1 / (^\circ)$	45
	倾向 $\alpha_1 / (^\circ)$	105
	坡高 $H_1 / \text{m}$	33
	顶面张裂面到坡面的距离 $L / \text{m}$	12
	黏聚力 $c_1 / \text{kPa}$	20
面	内摩擦角 $\phi_1 / (^\circ)$	30
	倾角 $\psi_2 / (^\circ)$	70
	倾向 $\alpha_2 / (^\circ)$	235
	黏聚力 $c_2 / \text{kPa}$	50
	内摩擦角 $\phi_2 / (^\circ)$	30
一般	岩石重度 $\gamma / (\text{kg}/\text{m}^3)$	2 600
	水的重度 $\gamma_w / (\text{kg}/\text{cm}^3)$	981
面	锚索拉力 $T / \text{kN}$	0
	外荷载 $E / \text{kN}$	0
	倾角 $\psi_3 / (^\circ)$	12
	倾向 $\alpha_3 / (^\circ)$	195
	倾角 $\psi_4 / (^\circ)$	65
面	倾向 $\alpha_4 / (^\circ)$	185
	倾角 $\psi_5 / (^\circ)$	70
面	倾向 $\psi_5 / (^\circ)$	165

序、excel 程序和商用软件的计算结果进行对比, 比较结果见表 2。由表中对比可知, 本文编制的边坡楔形体破坏安全系数求解程序有效, 可以得到正确的结果。

表 2 程序计算结果与商业软件结果对比

Table 2 Comparison of results with commercial software

安全系数	程序		
	Matlab	excel	商用软件
$F_s$	1.254	1.253	1.256

## 4 算 例

### 4.1 输入随机变量

各面的几何参数和岩体与水的重度为确定性输入参数, 取值见表 1。取结构面、的强度参数  $c_1$ 、 $\phi_1$ 、 $c_2$ 、 $\phi_2$  为随机变量, 假定其为对数正态分布。为考察方向模拟方法对于不同精度破坏概率的模拟效果, 均值不变, 改变标准差, 设计 8 组随机变量, 每个随机变量的变异系数均逐渐增加, 分别计算各组输入参数对应的楔形体失稳概率、可靠度以及安全系数和功能函数的分布形式, 暂不考虑参数之间的相关性, 输入随机参数设计见表 3。一般情况下, 内摩擦角都是以内摩擦系数的形式参与计算的, 因此表 3 中同时给出内摩擦角的正切值, 特此说明。

### 4.2 模拟结果分析

#### 4.2.1 计算结果可靠性分析

分别采用重要抽样、子集模拟以及本文引进的方向模拟方法, 计算楔形体边坡的破坏概率, 抽样次数为  $10^6$ , 最终计算结果见表 3。安全系数和功能函数输出结果的分布形式随着输入随机变量的变异性渐次发生变化, 当随机变量变异性较小时(对应较小的组号), 呈正态分布, 当随机变量变异性较大时(对应较大的组号), 则呈对数正态分布。

对各模拟方法计算所得失稳概率  $P_f$  取以 10 为底的对数, 将其展示在图 3 中, 可靠度指标  $\beta$  都在一个数量级内, 可直接做图 4。由图 3 可知, 3 种模拟方法的计算结果基本一致, 当失稳概率较小时, 方向模拟与子集模拟结果十分接近, 重要抽样结果则与其他两种方法出现较大的偏离, 与方向模拟与子集模拟适合于小概率破坏的理论预期一致。图 4 显示, 当可靠度比较高时, 方向模拟与子集模拟结果的一致性以及与重要抽样之间的差异。

#### 4.2.2 计算效率分析

任意取 1 组数据, 如第 2 组随机向量, 改变 3 种模拟方法的抽样次数, 分别取  $10^3$ 、 $10^4$ 、 $5 \times 10^4$ 、

表 3 方向模拟的输入随机变量与安全系数计算结果统计

Table 3 Input random variables of directional simulation and statistical results of safety factors

序号	分类	结构面			结构面			失稳概率 $P_f$			可靠度 $\beta$		
		黏聚力 $c_1$ /kPa	内摩擦角		黏聚力 $c_2$ /kPa	内摩擦角		方向 模拟	重要 抽样	子集 模拟	方向 模拟	重要 抽样	子集 模拟
			$\varphi_1$ /( $^\circ$ )	正切		$\varphi_2$ /( $^\circ$ )	正切						
1	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$8.733 \times 10^{-6}$	$1.400 \times 10^{-5}$	$8.648 \times 10^{-6}$	4.295 0	4.205 9	4.297 2
	标准差	3	2.86	0.049 96	5	2.86	0.049 958						
2	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$1.262 \times 10^{-3}$	$1.247 \times 10^{-3}$	$1.260 \times 10^{-3}$	3.020 4	3.024 1	3.021 0
	标准差	4	3.86	0.067 47	8	3.36	0.058 710						
3	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$1.034 \times 10^{-2}$	$1.029 \times 10^{-2}$	$1.024 \times 10^{-2}$	2.313 8	2.315 6	2.317 3
	标准差	5	4.86	0.085 03	11	3.86	0.067 472						
4	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$3.114 \times 10^{-2}$	$3.126 \times 10^{-2}$	$3.120 \times 10^{-2}$	1.864 3	1.862 6	1.863 5
	标准差	6	5.86	0.102 63	14	4.36	0.076 244						
5	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$6.022 \times 10^{-2}$	$6.021 \times 10^{-2}$	$6.028 \times 10^{-2}$	1.552 9	1.553 0	1.552 5
	标准差	7	6.86	0.120 31	17	4.86	0.085 027						
6	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$9.193 \times 10^{-2}$	$9.322 \times 10^{-2}$	$9.318 \times 10^{-2}$	1.329 0	1.321 2	1.321 4
	标准差	8	7.86	0.138 05	20	5.36	0.093 824						
7	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$1.215 \times 10^{-1}$	$1.266 \times 10^{-1}$	$1.265 \times 10^{-1}$	1.167 7	1.142 8	1.143 2
	标准差	9	8.86	0.155 88	23	5.86	0.102 634						
8	均值	20	30.00	0.577 35	50	30.00	0.577 350	$1.455 \times 10^{-1}$	$1.586 \times 10^{-1}$	$1.584 \times 10^{-1}$	1.055 9	1.000 3	1.000 9
	标准差	10	9.86	0.173 81	26	6.36	0.111 461						

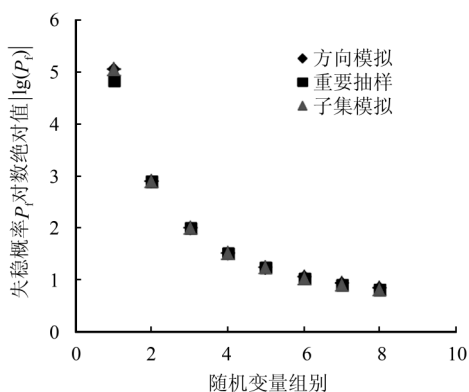


图 3 3 种模拟方法所得失稳概率  $P_f$  对数对比

Fig.3 Logarithm contrast of failure probabilities by three simulation methods

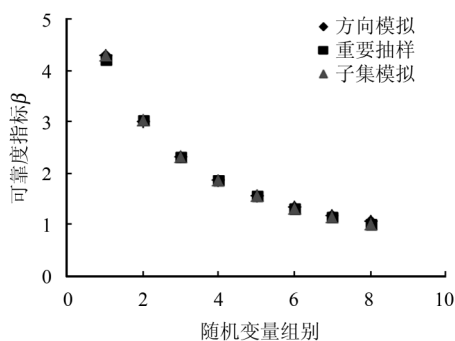


图 4 不同模拟方法可靠度指标  $\beta$  对比

Fig.4 Reliability index  $\beta$  contrast by three simulation methods

$10^5$ 、 $5 \times 10^5$ 、 $10^6$ 、 $5 \times 10^6$ 、 $10^7$ 、 $10^8$ ，考察每种方法要达到比较稳定的计算结果所需要的抽样次数，计算结果见表 4，但抽样次数为  $10^8$  时方向模拟与子

表 4 不同抽样次数的模拟计算结果

Table 4 Simulation results of different sampling frequency

抽样 次数 /次	失稳概率 $P_f$			可靠度 $\beta$		
	方向模拟 / $10^{-3}$	重要抽样 / $10^{-3}$	子集模拟 / $10^{-3}$	方向模拟	重要抽样	子集模拟
$10^3$	1.250	1.000 0	2.190	3.023 3	3.090 2	2.849 4
$10^4$	1.260	1.300 0	1.307	3.020 9	3.011 5	3.009 8
$5 \times 10^4$	1.262	1.280 0	1.244	3.020 5	3.016 2	3.024 8
$10^5$	1.262	1.100 0	1.247	3.020 5	3.061 8	3.024 1
$5 \times 10^5$	1.262	1.276 0	1.263	3.020 4	3.017 1	3.020 2
$10^6$	1.262	1.247 0	1.260	3.020 4	3.024 1	3.021 0
$5 \times 10^6$	1.262	1.256 0	1.266	3.020 4	3.022 0	3.019 6
$10^7$	1.262	1.262 0	1.268	3.020 4	3.020 4	3.019 0
$10^8$		1.262 5			3.020 3	

集模拟方法均提示内存不足，因此未进行计算，而重要抽样则花费 2 011 s (约 33 min) 才得出结果。

3 种模拟方法所得破坏概率和可靠度指标随抽样次数的变化情况分别如图 5、6 所示。从图中可以看出，方向模拟在抽样样本低至 1 000 个时，其计算结果就十分接近稳定值，抽样次数到  $5 \times 10^4$  时计算结果就已经达到很高的精度，重要性抽样则需要超过  $10^6$  之后才渐趋稳定，抽样次数达  $10^7$  时，其结果才与方向模拟结果相同，子集模拟虽然在  $5 \times 10^4$  之后渐趋稳定，但在  $10^{-6}$  精度上始终无法趋近方向模拟和重要抽样在大样本情况下的计算结果，具体原因值得进一步研究。由此可见，方向模拟比子集模拟和重要抽样更加高效，能在较少的抽样次数下得到满足精度要求的模拟结果。

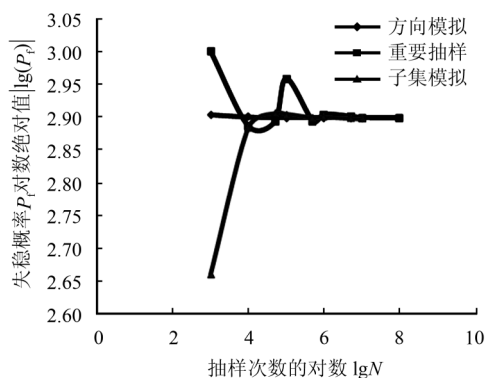


图5 破坏概率随抽样次数变化情况

Fig.5 Comparison of failure probabilities change with sampling frequency

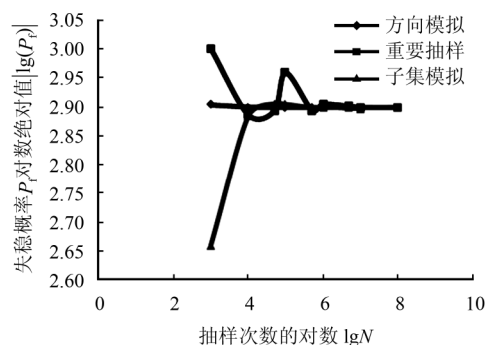


图6 可靠度指标随抽样次数变化情况

Fig.6 Comparison of reliability index change with sampling frequency

## 5 结论

(1) 对于标准差不同的随机变量, 3种模拟方法的计算结果基本一致。失稳概率较小时方向模拟与子集模拟结果十分接近, 重要抽样结果则与其他两种方法出现较大的偏离, 这与方向模拟与子集模拟适合于小概率破坏的理论预期一致。

(2) 对于同一组随机变量, 方向模拟在抽样样本低至1000个时, 其计算结果就十分接近稳定值, 方向模拟比子集模拟和重要抽样更加高效, 能在较少的抽样次数下得到满足精度要求的模拟结果。

(3) 安全系数和功能函数输出结果的分布形式随着输入随机变量的变异性渐次发生变化, 当随机变量变异性较小时(对应较小的组号), 呈正态分布, 当随机变量变异性较大时(对应较大的组号), 则呈对数正态分布。

需要指出的是, 岩质边坡楔形体破坏功能函数非线性程度并不高, 本文结论对于非线性程度较高的功能函数是否成立, 需进一步开展深入的研究。

## 参考文献

[1] 中国电力企业联合会. GB 50199-94 水利水电工程结

构可靠度设计统一标准[S]. 北京: 中国计划出版社, 1994.

China Electricity Council. GB 50199-94 Unified design standard for reliability of hydraulic engineering structures[S]. Beijing: China Planning Press, 1994.

[2] WANG Y, CAO Z, AU S K. Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2010, 48(1): 162 - 172.

[3] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, 16(4): 263 - 277.

[4] WANG Y. Reliability-based design of spread foundations by Monte Carlo simulations[J]. *Géotechnique*, 2011, 61(8): 677 - 685.

[5] WANG Y, CAO Z. Expanded reliability-based design of piles in spatially variable soil using efficient Monte Carlo simulations[J]. *Soils and Foundations*, 2013, 53(6): 820 - 834.

[6] LI D Q, SHAO K B, CAO Z J, et al. A generalized surrogate response aided-subset simulation approach for efficient geotechnical reliability-Based design[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, 74: 88 - 101.

[7] 曹子君. 子集模拟在边坡可靠性分析中的应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2009.

CAO Zi-jun. Application of subset simulation on reliability analysis of slope stability[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009.

[8] LI S, ZHAO H B, RU Z. Slope reliability analysis by updated support vector machine and Monte Carlo simulation[J]. *Natural Hazards*, 2013, 65(1): 707 - 722.

[9] DITLEVSEN O, MADSEN H O. Structural reliability methods[M]. New York: Wiley, 1996.

[10] WYLLIE D C, MAH C. Rock slope engineering[M]. London: CRC Press, 2004.

[11] DEAK I. Three digit accurate multiple normal probabilities[J]. *Numerische Mathematik*, 1980, 35(4): 369 - 380.

[12] BJERAGER P. Probability integration by directional

- simulation[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1988, 114(8): 1285 - 1302.
- [13] DITLEVSEN O, MELCHERS R E, GLUVER H. General multi-dimensional probability integration by directional simulation[J]. **Computers & Structures**, 1990, 36(2): 355 - 368.
- [14] DITLEVSEN O, MADSEN H O. Structural reliability methods[M]. New York: Wiley, 1996.
- [15] NIE J, ELLINGWOOD B R. Directional methods for structural reliability analysis[J]. **Structural Safety**, 2000, 22(3): 233 - 249.
- [16] NIE J, ELLINGWOOD B R. Finite element-based structural reliability assessment using efficient directional simulation[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2005, 131(3): 259 - 267.
- [17] 贡金鑫, 何世钦, 赵国藩. 结构可靠度模拟的方向重要抽样法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 655 - 661.  
GONG Jin-xin, HE Shi-qing, ZHAO Guo-fan. Structural reliability analysis by importance directional simulation[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2003, 20(6): 655 - 661.
- [18] 宋述芳, 吕震宙, 郑春青. 结构可靠性灵敏度分析的方向(重要)抽样法[J]. 固体力学学报, 2008, 29(3): 264 - 271.  
SONG Shu-fang, LÜ Zhen-zhou, ZHENG Chun-qing. Directional simulation for sensitivity analysis of structural reliability[J]. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, 2008, 29(3): 264 - 271.
- [19] 张良欣, 胡云昌. 基于方向向量模拟技术的结构系统可靠性评价[J]. 固体力学学报, 2001, 22(3): 247 - 255.  
ZHANG Liang-xin, HU Yun-chang. Reliability assessment of structural systems based on directional vector simulation technique[J]. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, 2001, 22(3): 247 - 255.
- [20] 池巧君, 吕震宙, 宋述芳. 截断正态分布情况下结构可靠性分析的方向抽样和方向重要抽样估计及其方差分析[J]. 机械强度, 2010, 32(3): 384 - 390.  
CHI Qiao-jun, LÜ Zhen-zhou, SONG Shu-fang. Reliability estimation and its variance analysis of structure with truncated normal distribution by directional sampling and directional importance sampling[J]. **Journal of Mechanical Strength**, 2010, 32(3): 384 - 390.
- [21] HOEK E, BRAY J D. Rock slope engineering[M]. London: CRC Press, 1981.
- [22] JIMENEZ-RODRIGUEZ R, SITAR N, CHACON J. System reliability approach to rock slope stability[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2006, 43(6): 847 - 859.
- [23] LI D, ZHOU C, LÜ W, et al. A system reliability approach for evaluating stability of rock wedges with correlated failure modes[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(8): 1298 - 1307.
- [24] REALE C, XUE J, GAVIN K. System reliability of slopes using multimodal optimisation[J]. **Géotechnique**, 2016, 66(5): 1 - 11.
- [25] 陈祖煜, 汪小刚, 杨健, 等. 岩质边坡稳定分析原理方法程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.  
CHEN Zu-yu, WANG Xiao-gang, YANG Jian, et al. Stability analysis of soil slopes—Theory, methods and programs[M]. Beijing: Chinese Water Power Press, 2003.