

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.07.027

盐穴地下储库地表沉降的黏弹模型及应用

李银平¹, 孔庆聪¹, 施锡林¹, 李 硕², 杨博进¹, 杨春和¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;

2. 即墨国际商贸城开发投资有限公司, 山东 即墨 266200)

摘 要: 盐穴地下油气储库在长期运行过程中的地表沉降预测是储库安全评价的重要内容, 目前尚无成熟的基于力学理论的解析模型。将盐穴储库地表沉降问题近似为半无限空间内球型空洞受力收缩导致的边界位移问题, 利用弹性无限域内球型空洞受力收缩的球对称位移解, 运用叠加原理, 推导得到半无限空间球型空洞在一定内压作用下引起的地表沉降的弹性积分形式解析解。然后运用对应原理, 将体积变形视为弹性, 畸变视为 Maxwell 黏弹性, 对地表沉降弹性解析解进行拉普拉斯变换, 得到时空域上的地表沉降的黏弹性积分形式解析解。通过与数值模拟结果的比对, 验证了文中弹性模型的准确性。最后将沉降预测黏弹模型运用于某盐穴储库地表沉降的预测分析, 并与该储库现场沉降观测数据进行对比, 分析表明, 新模型能够很好地预测盐穴储库地表沉降及发展趋势, 该模型为储库地表沉降预测提供了一套新的基于力学理论的方法。

关 键 词: 盐岩; 储库; 地表沉降; 预测; 黏弹性模型

中图分类号: TU 451

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 07-2049-10

Viscoelastic model of surface subsidence of salt cavern storage and its application

LI Yin-ping¹, KONG Qing-cong¹, SHI Xi-lin¹, LI Shuo², YANG Bo-jin¹, YANG Chun-he¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences,

Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Jimo International Trade City Development Investment Co., Ltd., Jimo, Shandong 266200, China)

Abstract: In the process of long-term operation of salt cavern storage, the surface subsidence prediction is important for the storage safety assessment. So far, there is no analytical model based on the theory of mechanics. The problem of the surface subsidence above salt cavern storage is similar to the one of boundary deformation of the sphere cavern with shrinkage force in the elastic half infinite space. By using the spherically symmetric displacement of the sphere cavern with shrinkage force in the elastic infinite space, the elastic analytical solution of the surface subsidence in integral form is derived with the principle of superposition. The surface subsidence is caused by the sphere cavern under a certain internal pressure in the half infinite space. Then, regarding volume deformation as elasticity and distortion as viscoelasticity Maxwell with the correspondence principle, the elastic analytical solution is transformed to be a viscoelastic analytical solution in integral form in space-time domain by Laplace transformation. In comparison with the results of numerical simulation, the accuracy of the elastic model is verified. Finally, the viscoelastic model is applied to predictive analysis of the surface subsidence in a salt cavern storage, and is compared with the observation data in cavern site, demonstrating the new model to be effective in predicting the surface subsidence and its development trend of the salt cavern storage. Therefore, the model can be expected to provide a theoretical method for subsidence prediction of salt cavern storage.

Keywords: salt rock; energy storage; surface subsidence; prediction; viscoelastic model

1 引 言

盐岩的主要化学成分为石盐, 化学式为 NaCl^[1]。岩石力学试验研究表明, 盐岩具有良好的蠕变特性、极低的渗透率、良好的密闭性, 高围压

下具有较高的强度和损伤与损伤自我恢复特性、以及良好的化学稳定性^[2]。此外, 盐穴地下储库具有密封性好、存储量大、能躲避战乱和灾害等优点, 被公认为是石油天然气等战略能源最佳的储存场所^[3-4]。

收稿日期: 2015-09-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 41472285, No. 51404241, No. 51304187)。

This work was supported by the National Natural Science Fund Project (41472285, 51404241, 51304187).

第一作者简介: 李银平, 男, 1969 年生, 博士, 研究员, 主要从事能源地下储备岩石力学与工程方面的研究工作。E-mail: ypli@whrsm.ac.cn

尽管在盐岩地层中建设地下油气储库具备诸多优势,但在储库建设及运行过程中仍会出现大面积地表沉降等问题。这种现象的主要原因是盐岩具有很强的蠕变特性,在盐腔的内压与其周围的地应力不平衡时,盐岩就会发生流变,导致腔体收缩,进而引起地表沉降。现阶段,如何有效准确地预测盐岩储库区地表变形及沉降发展趋势是亟待解决的问题。国外的储备库建设起步早,现场观测数据比较多。德国的 Bernburg 储气库群^[5]经过 5 年零 8 个月的观测,其中心区域的沉降量达到了 42 mm,影响半径约为 450 m;法国南部 Tersanne 储库^[6]在 10 年的运营期内,中心区域的地表沉降值接近 40 mm,影响半径达 1 800 m;美国路易斯安那州的 West Hackberry 储存场^[7]经过 14 年的观测,整个区域平均地表沉降约为 610 mm;德克萨斯州 Big Hill 储存场^[8]在 10 年内平均沉降速率为 91 mm/a;德克萨斯州 Bryan Mound 储油库群^[9]16 年内平均沉降速率为 18 mm/a,总沉降量为 306 mm。上述沉降事故给库区周边环境带来诸多负面影响,有些甚至是灾难性的破坏,因此,有必要建立起合理有效的地表沉降预测体系,减少和预防地表沉降事故的发生。

随着计算机技术高度发展,数值模拟逐渐成为评估预测盐穴储库区地表沉降的重要工具。Ehgartner^[10]利用有限元法分析了美国盐丘中战略石油储备地下储库间距和储备压力对地表沉降的影响;Hoffman^[11]利用 ABAQUS 程序分析了盐丘中地下储油库埋深对地表沉降和容积损失的影响;Neal^[12]利用有限元法预测了盐丘中溶腔蠕变收缩引起的地表沉降和沉降速率;李二兵等^[13]利用 FLAC^{3D} 对我国某盐穴储气库的地表沉降进行了数值模拟,得出了储气库地表沉降的动态发展过程;任松等^[14]建立了新概率积分三维预测模型,对储备库的地表沉降进行预测计算。然而,数值模拟自身固有的人工边界等缺陷,致使其只能作为地表沉降预测的辅助工具。

采矿地表沉降的研究历史已久,但有关盐穴储库地表沉降预测的研究还不够深入,大多采用的是数值模拟、唯象学^[15]等方法,没有形成一套完整的体系,基于经典力学原理的分析方法较少。日本学者 Mogi^[16]参考 Yamakawa^[17]的研究成果,将其变形公式引入到火山区地表变形预测研究中,得到了很好的近似效果;麻凤海等^[18-19]利用流变力学原理研究了地表下沉的动态变化过程,根据板壳弯曲理论分析了岩层与地表移动规律;Fialko 等^[20]利用半无限空间内一个水平圆形受压裂缝模型,推导出了地

表的垂直和水平位移;Eickemeier^[21]根据盐岩的蠕变建立了腔体收缩体积与地表沉降之间的关系;李银平等^[3]利用火山地震学中用于预测火山喷发地区地表变形的 Mogi 模型,得到库区地面垂直位移和水平位移的弹性解。

本文依据弹性力学理论,从无限域内球对称问题出发,将盐穴储库地表沉降问题近似为半无限空间内球型空洞收缩产生的边界位移问题,运用叠加原理推导出弹性半无限空间内部在一定埋深、一定内压作用下球型空洞产生的弹性地表沉降积分形式解析解。最后运用对应原理及拉普拉斯变换得到黏弹性地表沉降积分形式解析解,从而为储库地表沉降预测提供了一套新的基于力学理论的方法。

2 半无限空间弹性沉降模型

2.1 弹性沉降模型的合理性论述

盐穴储库一般埋深大于 800 m,高径比一般在 0.8~1.6 之间,与球形、椭球形相近,在腔体中心埋深和体积均相同的情况下,腔体形状对地表沉降影响较小,适当地用形状影响系数予以修正即可^[22]。

一般情况下,为了保障盐穴储库的密闭性,储库内气体压力要小于其受到的地层应力。在地层应力和气体压力的共同作用下,腔体发生收缩。而这种收缩效果与腔体内壁受到等效的收缩面力相同,该等效面力与地层应力和气体压力差值相等。

因此,可将盐穴储库地表沉降问题近似为半无限空间内球型空洞受力收缩产生的边界位移问题。

2.2 总体思路

如图 1 所示,弹性半无限空间内球形空洞受力收缩导致的边界位移 $w(r)$ 问题,除了一些近似解,如 Mogi 模型^[3]等,目前尚未发现精确理论解。为了求解该问题,构造如图 2 所示含两个同样球形空洞的无限域模型。将该模型沿对称面分解为如图 3 所示的两部分,由于这两部分完全相同,计算时只需考虑其中一个即可。现以模型 3 为例进行分析,在球内面力 p 和表面法向面力 $\sigma_z(r)$ 共同作用下上表面法向位移为 0。而模型 3 是图 4 中模型 4 和 5 的叠加,由弹性理论中的叠加原理可以得到

$$w_1(r) + w_2(r) = 0 \quad (1)$$

因此

$$w(r) = -w_1(r) = w_2(r) \quad (2)$$

这样,就将原问题(模型 1,即模型 5,两者为同一理论模型)中 $w(r)$ 的问题转化为求模型 4 中 $w_1(r)$ 的问题,但目前表面法向面力 $\sigma_z(r)$ 未知。

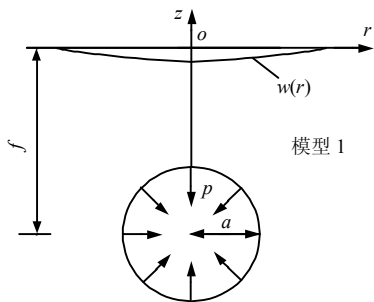


图 1 半无限空间内弹性模型 (模型 1)
Fig.1 Elastic model in elastic half infinite space (Model 1)

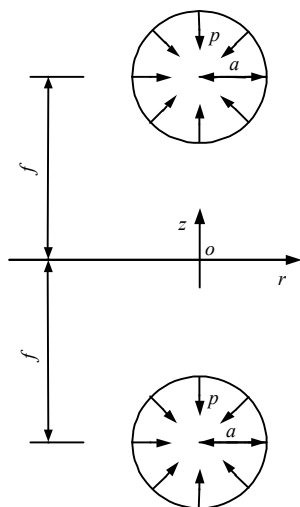


图 2 无限域内构造模型
Fig.2 Model constructed in infinite space

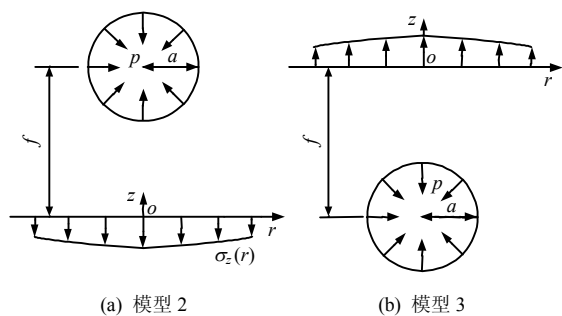


图 3 构造模型分解图
Fig.3 Breakdown drawings of model constructed

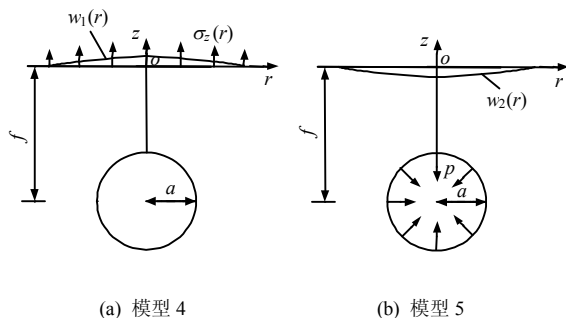


图 4 模型 3 分解图
Fig.4 Breakdown drawings of model 3

2.3 无限域内球对称问题的解

为了获得模型 4 中表面法向面力，先来研究如图 5 所示的球对称问题。

球对称问题的基本方程^[23]为

$$\frac{du}{dR} + \frac{2u}{R} = C \quad (3)$$

积分可得

$$u = \frac{1}{3}CR + \frac{A}{R^2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_R = \frac{du}{dR} = \frac{1}{3}C - \frac{2A}{R^3} \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{R} = \frac{1}{3}C + \frac{A}{R^3} \quad (6)$$

$$\sigma_R = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_R = \lambda C + \frac{2}{3}\mu C - \frac{4\mu A}{R^3} \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_\theta = \lambda C + \frac{2}{3}\mu C + \frac{2\mu A}{R^3} \quad (8)$$

式中： u 为径向位移； ε_R 为径向应变； ε_θ 和 ε_φ 为环向应变； σ_R 为径向应力； σ_θ 和 σ_φ 为环向应力； A 和 C 为常数； λ 和 μ 为 Lamé 常数； θ 为体积膨胀系数，且 $\theta = \varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi$ 。

设在内部球面上受有面力 p_i ，在外部球面上受有面力 p_o ，如图 5 所示。

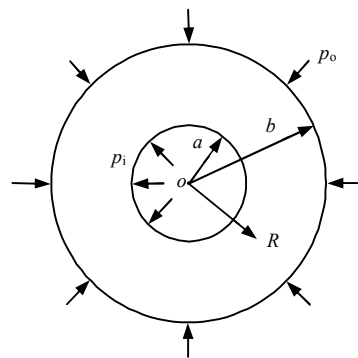


图 5 受内外压作用的空心球体
Fig.5 Hollow sphere applied internal and external pressures

将边界条件：当 $R = a$ 时， $\sigma_R = -p_i$ ；当 $R = b$ 时， $\sigma_R = -p_o$ ；代入式 (7) 可得

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{p_i - p_o}{4\mu} \frac{b^3 a^3}{b^3 - a^3} \\ C &= \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \frac{1}{b^3 - a^3} (p_i a^3 - p_o b^3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

令 $b \rightarrow \infty$ 、 $p_o = 0$ 、 $p_i = -p$ ；则可变成无限域内有一半径为 a 的空心球体受到面力 p 作用。那么

$$A = -\frac{pa^3}{4\mu}, C = 0 \quad (10)$$

将式 (10) 代入 (4) ~ (8) 可得

$$u = -\frac{pa^3}{4\mu R^2} \quad (11)$$

$$\varepsilon_R = \frac{pa^3}{2\mu R^3} \quad (12)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -\frac{pa^3}{4\mu R^3} \quad (13)$$

$$\sigma_R = \frac{pa^3}{R^3} \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = -\frac{pa^3}{2R^3} \quad (15)$$

2.4 球与柱坐标系的变换

盐穴储库弹性地表沉降模型是轴对称模型，地表沉降仅与中心点的距离 r 有关，与角度 φ 无关。为简化计算，需将球坐标系转化为柱坐标系。

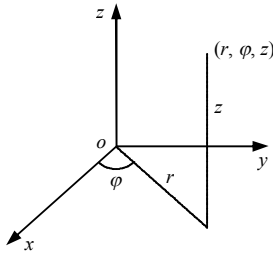


图 6 柱坐标系图

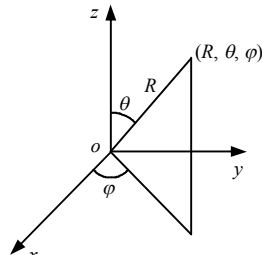


图 7 球坐标系

Fig.6 Cylindrical coordinates Fig.7 Spherical coordinates

柱坐标系 (r, φ, z) 与球坐标系 (R, θ, φ) 的转换关系为 $r = R \sin \theta$ 、 $\varphi = \varphi$ 、 $z = R \cos \theta$ 。

直角、柱和球坐标系下的应力张量分别为

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_d] &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, [\sigma_c] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ [\sigma_s] &= \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & \sigma_{\theta R} & \sigma_{\varphi R} \\ \sigma_{R\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\varphi\theta} \\ \sigma_{R\varphi} & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

球与直角坐标系之间单位矢量间的变换矩阵^[24]，柱与直角坐标系之间单位矢量间的变换矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} [\beta_s] &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}, \\ [\beta_c] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上述两个变换矩阵均为单位正交矩阵，即

$$[\beta_s]^T = [\beta_s]^{-1}, [\beta_c]^T = [\beta_c]^{-1} \quad (18)$$

由于

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_s] &= [\beta_s][\sigma_d][\beta_s]^T, [\sigma_d] = [\beta_s]^T[\sigma_s][\beta_s] \\ [\sigma_c] &= [\beta_c][\sigma_c][\beta_c]^T, [\sigma_c] = [\beta_c]^T[\sigma_c][\beta_c] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

故

$$[\sigma_c] = [\beta_c][\beta_s]^T[\sigma_s][\beta_s][\beta_c]^T = \left[[\beta_s][\beta_c]^T \right]^T [\sigma_s][\beta_s][\beta_c]^T \quad (20)$$

$$\text{令 } [\beta] = [\beta_s][\beta_c]^T = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $[\beta]$ 也是单位正交矩阵。

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_c] &= [\beta]^T[\sigma_s][\beta] = \begin{bmatrix} \sigma_R \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta & 0 & (\sigma_R - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ (\sigma_R - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta & 0 & \sigma_R \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将 (14) 和 (15) 代入上述矩阵，可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_R \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta = \frac{pa^3}{2R^5}(2r^2 - z^2) = \sigma_r \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{pa^3}{2R^3} = \sigma_\varphi \\ \sigma_{zz} &= \sigma_R \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta = \frac{pa^3}{2R^5}(2z^2 - r^2) = \sigma_z \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0 \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz} = \sigma_R \sin \theta \cos \theta - \sigma_\theta \sin \theta \cos \theta = \frac{3pa^3 rz}{2R^5} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中： $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ 。

2.5 半无限空间弹性沉降模型的求解

图 2 中的构造模型是对称模型，对称面上没有法向位移，且切向应力为 0，仅分布着法向应力。并且两个球内面力引起的对称面上的法向应力大小相等，那么对称面上法向应力的大小由式 (23) 可得

$$\sigma_z(r)|_{z=f} = 2\frac{pa^3}{2R^5}(2z^2 - r^2)|_{z=f} = pa^3 \frac{(2f^2 - r^2)}{(r^2 + f^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (24)$$

这样就获得了模型 4 中法向面力表达式。半无限空间在边界上受法向集中力作用，地表沉降值^[25]为 $w = \frac{(1-\nu^2)F}{\pi Er}$ (ν 为泊松比， E 为弹性模量， F 为集中作用力， r 为与圆点之间的距离)。

由于该法向面力是非均匀分布面力，需进行积分计算。以球型腔体中心点在地表平面上的投影为坐标原点，为求得平面内与原点距离为 r 的任意一点的沉降值，以该点与坐标原点所在的直线为 x 轴， y 轴与 x 轴垂直，建立如图 8 所示的直角坐标系。

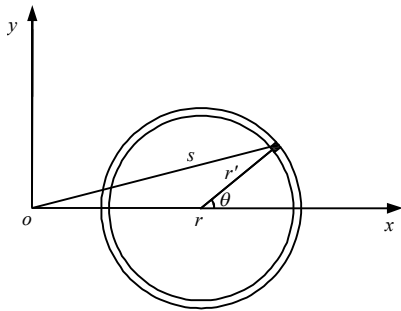


图 8 沉降计算简图

Fig.8 Calculating diagram of subsidence

图中 $(r, 0)$ 点的沉降是由于周围各点应力叠加引起的，图中微元环与该点的距离为 r' ，图中的阴影部分是微元环上的任意一个微元，该微元与原点距离为 s ，由余弦定理可得

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\pi - \theta) = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \theta \tag{25}$$

该微元作用的荷载为

$$dF = pa^3 \frac{(2f^2 - s^2)}{(s^2 + f^2)^{\frac{5}{2}}} dA = pa^3 \frac{(2f^2 - s^2)}{(s^2 + f^2)^{\frac{5}{2}}} r' dr' d\theta \tag{26}$$

该微元荷载引起的沉降为

$$dw = \frac{(1-\nu^2)dF}{\pi Er'} = \frac{(1-\nu^2)pa^3}{\pi E} \frac{(2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr' \cos \theta)}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \theta)^{\frac{5}{2}}} dr' d\theta \tag{27}$$

整个平面内的法向面力引起的地表沉降为

$$w(r) = \frac{(1-\nu^2)pa^3}{\pi E} \cdot \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr' \cos \theta)}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' \tag{28}$$

这样，就得到了弹性半无限空间内部在一定埋深、一定内压作用下的球型空洞引起的弹性地表沉降积分形式的解析解。

3 半无限空间黏弹性沉降模型

对于黏弹性介质在内部力源作用下引起的变形问题，直接通过本构关系和边界条件求解比较复杂。而对于黏弹性体，球应变只与球应力有关，与偏应力无关，且球应变与球应力均不发生黏性变化，即体积变形是弹性的。因此，可以运用对应原理，将体积变形视为弹性，畸变视为 Maxwell 黏弹性，通过解相应的弹性问题间接获得黏弹性解。根据对应原理，线性黏弹性问题的解可在频率域中借助弹性问题的解，然后将结果反变换到时间域^[26]。

3.1 地表沉降的黏弹性解

在恒定荷载条件下，与 Kelvin 模型相比，Maxwell 模型具有瞬时应变，并随着时间增长应变逐渐增大等特点，更能符合盐岩的力学特性。Maxwell 模型是由弹簧和阻尼器串联而成^[27]，如图 9 所示。

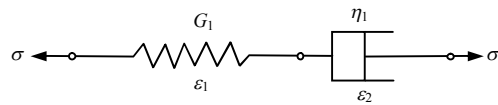


图 9 Maxwell 模型组成图

Fig.9 Constitutional diagram of Maxwell model

设在应力 σ 作用下，弹簧和阻尼器的应变分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ，则总应变为 $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ，Maxwell 模型的应力、应变微分关系式为 $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G_1} + \frac{\sigma}{\eta_1}$ 。其中 η_1 和 G_1 分别为 Maxwell 模型受剪切时阻尼器的黏弹性系数和弹簧的弹性模量。

设材料呈弹性体积变形和 Maxwell 黏弹性畸变，即应力-应变关系的球张量是弹性关系，而偏张量部分为 Maxwell 材料的黏弹性关系^[28]：

$$\left. \begin{aligned} P'_{(s)} &= 1 + \frac{\eta_1}{G_1} s, Q'_{(s)} = \eta_1 s \\ P''_{(s)} &= 1, Q''_{(s)} = 3K \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

式中： K 为体积弹性模量； s 为拉普拉斯变换参量； $P'_{(s)}$ 、 $Q'_{(s)}$ 、 $P''_{(s)}$ 、 $Q''_{(s)}$ 均为材料系数。

假定腔内面力是突加的，即 $p_{(t)} = pH_{(t)}$ ，其中 $H_{(t)}$ 是单位阶跃函数，那么 $p_{(s)} = p/s$ 。

对应于象空间中的弹性模量和泊松比分别为

$$\left. \begin{aligned} E_{(s)} &= \frac{3Q'_{(s)}Q''_{(s)}}{2P'_{(s)}Q''_{(s)} + P''_{(s)}Q'_{(s)}} \\ v_{(s)} &= \frac{P'_{(s)}Q''_{(s)} - P''_{(s)}Q'_{(s)}}{2P'_{(s)}Q''_{(s)} + P''_{(s)}Q'_{(s)}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

那么

$$\frac{1-v_{(s)}^2}{E_{(s)}} = \frac{3K+2G_1}{(6K+G_1)G_1} + 2\frac{9K^2+3KG_1+G_1^2}{(6K+G_1)^2\eta_1} \frac{1}{s} - \frac{12KG_1}{\eta_1^2} \frac{9K^2+3KG_1+G_1^2}{(6K+G_1)^3} \frac{1}{\left[\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1} + s\right]s} \quad (31)$$

将式 (28) 进行拉普拉斯逆变换得

$$w(r,t) = \frac{pa^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta)}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' \cdot \left(\frac{3K+2G_1}{(6K+G_1)G_1} + \frac{t}{2\eta_1} + \frac{G_1}{4K(6K+G_1)} \left[1 - e^{-\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1}t} \right] \right) \quad (32)$$

式 (32) 为半无限空间内部在一定埋深、一定内压作用下的球型空洞引起的黏弹性地表沉降的积分形式解析解。

3.2 体积收缩的黏弹性解

球型腔体在均布法向面力 P 的作用下产生的径向收缩位移为 $u = \frac{pa}{4\mu}$ ，其中 μ 为 Lamé 常数， a 为球体半径，弹性面力 p 以向内收敛为正方向。则弹性体积收缩量为

$$\Delta V^e = \frac{\pi pa^3}{\mu} \quad (33)$$

采用与求解黏弹性的地表沉降相同的方法，可以得到黏弹性的体积收缩量为

$$\Delta V^e + \Delta V^\eta = \pi pa^3 \left(\frac{2}{G_1} + \frac{2}{\eta_1} t \right) \quad (34)$$

黏弹性的沉降量及体积收缩量中均存在随时间而流动的项，如果由此计算出的数值超过了小变形的范围，则结果与假设条件矛盾而不能应用。因此，在计算时分步迭代计算，保证在小变形范围内。

4 储库地表沉降预测黏弹模型的误差分析及现场验证

4.1 弹性沉降模型与 Mogi 模型的对比分析

该模型中心点的沉降值和 Mogi 模型中心点的沉降值^[3]分别为

$$w_0 = \frac{2(1-\nu^2)pa^3}{Ef^2}, \Delta h = \frac{3(1+\nu)pa^3}{2Ef^2} \quad (35)$$

两者之间的比值为

$$\frac{w_0}{\Delta h} = \frac{4(1-\nu^2)}{3(1+\nu)} \quad (36)$$

当泊松比 $\nu = 0.3$ 时，比值为 0.933。

Mogi 模型与理论值相比，有偏差的原因是：Mogi 模型在计算球型腔体径向收缩位移及地表变形时，为计算简便，采用的是无限域假设，是一个近似解，埋深较小时，会有一定误差；而本文通过构造对称模型获得含球型空洞半无限空间边界位移的解析解。

本模型唯一的简化就是获得式 (24) 时没有考虑另一个空洞的存在，采用的是含单一空洞无限域空间的解，即式 (23)，这里做一个简单的误差分析。

一个球形空洞内的面力引起的另一个球形空洞面力的折减由式 (14) 计算得 $\Delta p = \frac{pa^3}{(2f)^3} = \frac{pa^3}{8f^3}$ ，

那么球形空洞内的实际面力为

$$p^* = p - \frac{pa^3}{(2f)^3} = p \left(1 - \frac{a^3}{8f^3} \right) \quad (37)$$

该值与半径和埋深的比值有关。当 $a \ll f$ 时，该因素可忽略。

4.2 弹性沉降模型与数值模拟结果对比分析

本节采用数值模拟的方法对储库区的地表沉降进行对比分析。建模阶段利用大型有限元分析软件 ANSYS，模拟实际的腔体并划分单元网格。随后将建立的有限元模型导入 FLAC^{3D} 中，根据实际工况进行模拟计算。三维空间模型图（从对称面剖开）如图 10 所示。在模拟计算过程中，采用的是 FLAC^{3D} 弹性本构模型。设定球腔半径 $a=50$ m，埋深 $f=1000$ m，弹性模量为 $E=5$ GPa，泊松比为 $\nu=0.3$ 。在模型运营过程中，球内收缩面力始终为 $p=10$ MPa。半无限空间采用长宽均为 6000 m，深为 2000 m 的长方体来代替，上表面（即地表面）为自由面，其余 5 个面均限制其法向位移。通过软件计算，得到地表的竖向位移云图如图 11 所示。

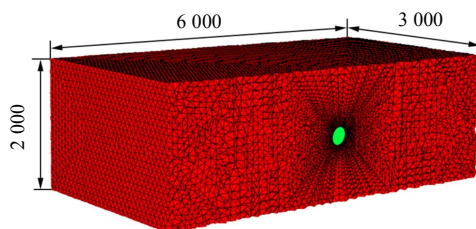


图 10 三维空间模型图（从对称面剖开）(单位: m)
Fig.10 3D model (sectioned from the plane of symmetry) (unit: m)

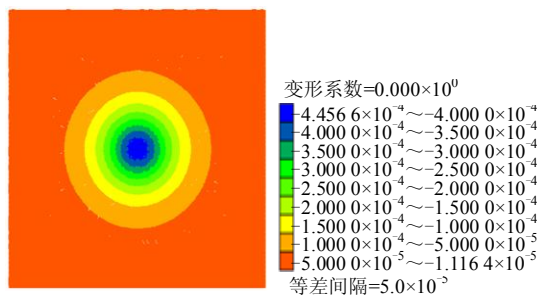


图 11 地表沉降等值线图
Fig.11 Isocline nephogram of surface subsidence

采用数值模拟和理论计算两种方法得到的中心点的沉降曲线如图 12 所示。从图中可以看出，数值模拟沉降曲线与理论计算曲线发展基本一致，两者差值并不大，地表中心点沉降差值约为 0.03 mm，相对偏差约为 6.7%。

两种计算方法得到的地表沉降值存在偏差，数值模拟值偏小。由于数值模拟的模型并不是半无限体，而是有人工法向固定边界（底面和 4 个侧面）的长方体，这些人工位移制约了上表面的下沉，使得其与理论值存在偏差。这就在一定程度上验证了本文理论模型的准确性。

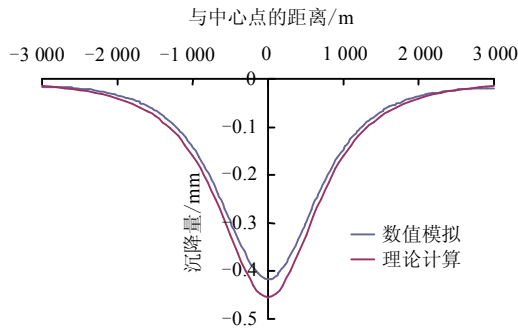


图 12 地表沉降对比曲线图
Fig.12 Comparison of surface subsidence by numerical simulation and by theoretical calculation

4.3 黏弹性沉降模型理论解与监测数据的对比分析

4.3.1 工程背景

本文以某盐穴储气库的 3 口井的地表沉降问题为例进行具体计算。根据力学试验^[1]，该地区盐岩的基本力学参数见表 1。3 口井的基本参数见表 2，声纳测井表明，这 3 口井均为近似球型腔体，根据其体积获得腔体等效半径，也列于表 2 中；1 号和 2 号井已于 2005 年改造为储气库，气体平均运行压力约为 11 MPa，利用声纳测腔仪测得从 2005 年至 2013 年间腔体体积收缩率分别为 1.49% 和 1.64%^[29]；3 号井为卤水井，井内卤水压力为 18 MPa^[30]。利用式

(28) 及 1 号和 2 号井的体积收缩率反演得到该区的黏弹性系数为 $\eta_1 = 1.7 \times 10^{17} \text{ pa} \cdot \text{s}$

表 1 盐岩力学参数

弹性模量/GPa	泊松比	体积弹性模量/GPa
18.0	0.3	15.0

表 2 3 口井的基本参数

井号	埋深 /m	腔体容积 /m ³	腔体等效半径 /m	腔体收缩面力 /MPa
1	993	104 923	29.3	12
2	998	128 413	31.3	12
3	960	77 710	26.5	5

注：腔体收缩面力 p 是腔体中心所受的地应力与腔体内压力的差值。腔体周围及以上土层受到地层压力的历史已久，在此认为各地层沉降已完成，地表沉降是由腔体收缩面力 p 引起的。

4.3.2 地表沉降曲线

为简化计算，假设该区域只存在 1 口井，以 1 号井为例，将上述数据带入式 (32) 中，可得到 1 号井中心点地表沉降 w 随时间 t 的关系曲线，如图 13 所示。从图中看出，地表沉降是一个长期的过程，在前 800 a 内沉降速度比较快，大约完成总沉降的 80%；800 a 后，沉降较为缓慢；在 1 300 a 时，沉降基本完成，约为 18 mm。

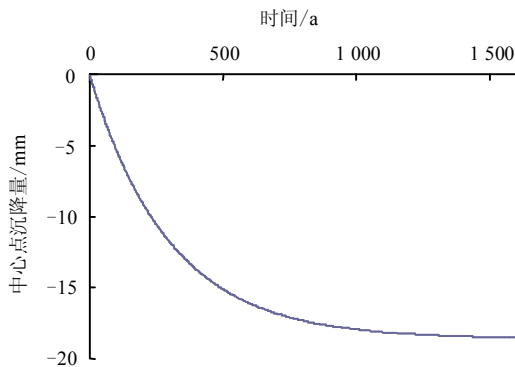


图 13 中心点沉降量随时间的关系曲线
Fig.13 Relation curve of subsidence in the center over time

4.3.3 理论解与监测数据的对比

中国科学院武汉岩土力学研究所连续 6 年对该区 3 口井及其周边区域进行地表沉降监测^[31]，其结果如图 14 所示。该井区附近的测点共 6 个，测点沉降的监测数据见表 3。

该监测区域整体表现为下沉，个别测点出现异常隆起与监测时间尚短有关，也与附近区域钻井采盐或道路修筑等工程活动有关。井口区的平均沉降

值为 1.25 mm, 通过公式 (32) 计算得到井口区的平均沉降值为 1.13 mm, 两者在一个数量级上, 但仍存在误差为 0.12 mm, 还需要进一步验证该黏弹性沉降模型。

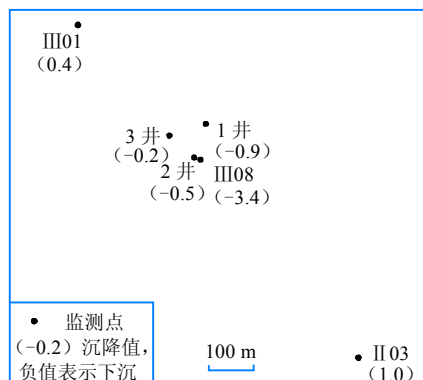


图 14 监测点布置示意图

Fig.14 Arrangement diagram of monitoring points

表 3 测点沉降的监测数据 (单位: mm)

Table 3 Monitoring data of landmark (unit: mm)

1 井	2 井	3 井	III08	III01	III03
-0.9	-0.5	-0.2	-3.4	0.4	1.0

理论值与监测值相比值有偏差, 原因有二: 一是在理论计算过程中未考虑 3 口井之间的相互作用, 导致理论值偏小; 声纳测腔表明, 腔体并不是标准球形, 本模型还不能考虑腔体实际形态进行修正, 这也是下一步研究需要考虑的问题; 另一个原因是该监测区域周边有工程活动, 使得监测数据有偏差。

5 结 论

(1) 本文从弹性无限域球对称问题入手, 运用叠加原理及对称性, 推导出弹性半无限空间内部在一定埋深、一定内压作用下球形空洞收缩引起的弹性地表沉降积分形式解析解。

(2) 以已推导的弹性地表沉降积分形式解析解为基础, 运用对应原理, 将体积变形视为弹性, 畸变视为 Maxwell 黏弹性, 对其进行拉普拉斯变换, 得到时空域上的黏弹性地表沉降积分形式解析解, 从而为储库地表沉降预测提供了一套新的基于力学理论的方法。

(3) 弹性沉降模型与数值模拟结果较为接近, 最大误差约为 6.7%, 当储库埋深较大时, 误差明显减小。在整个沉降范围内, 弹性沉降模型与数值模拟结果拟合较好。

(4) 根据黏弹性沉降模型计算出某盐矿区平均

地表沉降的为 1.13 mm, 由现场观测数据得出的平均地表沉降的为 1.25 mm, 误差为 0.12 mm。由此说明, 黏弹性沉降模型在盐岩储库地表沉降预测中具有一定的可行性及准确性。

弹性及黏弹性沉降模型仍具有一定的局限性, 如无法计算地表的切向变形以及无法对实际腔体形状进行精确修正等, 这需要对模型继续进行优化, 以得到尽可能贴近实际的模型。

参 考 文 献

- [1] 杨春和, 李银平, 陈锋. 层状盐岩力学理论与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
YANG Chun-he, LI Yin-ping, CHEN Feng. Theory and engineering of layered salt rock[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [2] 孔君凤. 盐岩储气库地表沉降预测研究及其工程应用[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2012.
KONG Jun-feng. Study on subsidence above salt cavern underground gas storage and related engineering application[D]. Wuhan: Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Science, 2012.
- [3] 李银平, 孔君凤, 徐玉龙, 等. 利用 Mogi 模型预测盐岩储气库地表沉降[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(9): 1737-1745.
LI Yin-ping, KONG Jun-feng, XU Yu-long, et al. Prediction of surface subsidence above salt rock gas storage using Mogi model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(9): 1737-1745.
- [4] 陈结, 刘剑文, 姜德义, 等. 围压作用下盐岩应变与损伤恢复试验研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 106-112.
CHEN Jie, LIU Jian-wen, JIANG De-yi, et al. An experiential study of strain and damage recovery of salt rock under confining pressures[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(1): 106-112.
- [5] MENZEL W, SCHREINER W. Results of rock mechanical investigations for establishing storage caverns in salt formations[C]//Proc. 6th Symp on Salt. Alexandria: The Salt Institute, 1985.
- [6] NGUYEN M D, BRAHAM S, DURUP J G. Modelling subsidence of the Tersanne underground gas storage field[C]//The 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt. Clausthal-Zellerfed: TTP Trans Tech Publication, 1996.
- [7] BAUER S J. Analysis of subsidence data for the West Hackberry Site, Louisiana (SAND97-2036)[R].

- Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1997.
- [8] BAUER S J. Analysis of subsidence data for the Big Hill Site, Texas (SAND99-1478)[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1999.
- [9] BAUER S J. Analysis of subsidence data for the Bryan Mound Site, Texas (SAND99-1739)[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1999.
- [10] EHGARTNER B. Effects of cavern spacing and pressure on subsidence and storage losses for the US strategic petroleum reserve[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1992.
- [11] HOFFMAN E L. Effects of cavern depth on surface subsidence and storage loss of oil-filled caverns[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1992.
- [12] NEAL J T. Prediction of subsidence resulting from creep closure of solution-mined caverns in salt domes[R]. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 1990.
- [13] 李二兵, 方秦, 谭跃虎, 等. 层状盐岩中天然气地下储库地表沉降分析[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2011, 12(6): 629-634.
- LI Er-bing, FANG Qin, TAN Yue-hu, et al. Surface subsidence of natural gas underground storage cavern in bedded salt[J]. **Journal of PLA University of Science and Technology (Natural Science Edition)**, 2011, 12(6): 629-634.
- [14] 任松, 姜德义, 杨春和, 等. 岩盐水溶开采沉降新概率积分三维预测模型研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 133-138.
- REN Song, JIANG De-yi, YANG Chun-he, et al. Study on a new probability integral 3D model for forecasting solution mining subsidence of rock salt[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 12(6): 629-634.
- [15] 陈剑文, 杨春和. 基于细观变形理论的盐岩塑性本构模型研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(1): 118-130.
- CHEN Jian-wen, YANG Chun-he. Mesoscopic deformation based plastic constitutive model of salt rock[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(1): 118-130.
- [16] MOGI K. Relations between the eruptions of various volcanoes and the deformations of the ground surfaces around them[J]. **Bulletin of the Earthquake Research Institute**, 1958, 36: 99-134.
- [17] YAMAKAWA N. On the strain produced in a semi-infinite elastic solid by an interior source of stress[J]. **Journal of the Seismological Society of Japan**, 1955, 8: 84-98.
- [18] 麻凤海, 范学理. 水平煤层开采地表沉陷空间问题的理论研究[J]. 中国矿业, 1994, 3(6): 44-49.
- MA Feng-hai, FAN Xue-li. Theoretical study of the space problem of the surface subsidence for horizontal mining[J]. **China Mining Magazine**, 1994, 3(6): 44-49.
- [19] 麻凤海, 范学理. 连续介质流变理论及其在岩层下沉动态过程中的应用[J]. 中国有色金属学报, 1996, 6(4): 7-12.
- MA Feng-hai, FAN Xue-li. Continuum rheological theory and its application in the dynamic process of strata subsidence[J]. **The Chinese Journal of Nonferrous Metals**, 1996, 6(4): 7-12.
- [20] FIALKO Y, KHAZAN Y, SIMONS M. Deformation due to a pressurized horizontal circular crack in an elastic half-space, with applications to volcano geodesy[J]. **Geophysical Journal International**. 2001, 146(1): 181-190.
- [21] EICKEMEIER R. A new model to predict subsidence above brine fields[C]//Proceedings of Solution Mining Research Institute, Fall 2005 Technical Meeting. Nancy, France: [s. n.], October 2-5.
- [22] 陈雨, 李晓, 侯正猛, 等. 不同腔形下盐岩储库区地表最大变形预计新方法[J]. 岩土工程学报, 2012, (5): 826-833.
- CHEN Yu, LI Xiao, HOU Zheng-meng, et al. New prediction method for maximum surface deformation in salt rock storage field considering different cavity geometries[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2012, (5): 826-833.
- [23] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956.
- QIAN Wei-chang, YE Kai-yuan. Elastic mechanics[M]. Beijing: Science Press, 1956.
- [24] 易辉跃, 唐斌, 晏才宏, 等. 两种正交曲线坐标系单位矢量间的一般表达式[J]. 微波学报, 2001, 17(3): 62-68.
- YI Hui-yue, TANG Bin, YAN Cai-hong, et al. General expressions between unit vectors of two curvilinear orthogonal coordinate systems[J]. **Journal of Microwaves**, 2001, 17(3): 62-68.
- [25] 徐芝纶. 弹性力学(上, 下)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- XU Zhi-lun. Elastic mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1990.
- [26] 王勇. 黏弹性半空间内膨胀引起的地表垂直位移和重

- 力变化[J]. 地壳形变与地震, 1996, 16(2): 8—11.
- WANG Yong. Vertical subsidence displacement and gravity changes due to the dilatation in a viscoelastic half space[J]. **Crustal Deformation and Earthquake**, 1996, 16(2): 8—11.
- [27] 申鸿恩. 黏弹性理论应用一例[J]. 力学与实践, 1984, 6(5): 18—21.
- XIAO Hong-en. An applied example of viscoelastic theory[J]. **Mechanics and Practice**, 1984, 6(5): 18—21.
- [28] 杨挺青. 黏弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- YANG Ting-qing. Viscoelastic mechanics[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1990.
- [29] YANG C, WANG T, LI Y, et al. Feasibility analysis of using abandoned salt caverns for large-scale underground energy storage in China[J]. **Applied Energy**, 2015, 137: 467—481.
- [30] 赵克烈, 杨海军, 陈锋, 等. 深部储气库群盐层蠕变参数优化研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 2): 3550—3555.
- ZHAO Ke-lie, YANG Hai-jun, CHEN Feng, et al. Research on creep parameters optimization of salt bed in deep gas storage group[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(Supp. 2): 3550—3555.
- [31] 李郎平, 兰恒星, 李晓, 等. 金坛盐穴天然气储库区地表变形 PSI 监测[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(9): 1821—1829.
- LI Lang-ping, LAN Heng-xing, LI Xiao, et al. Monitoring of ground deformation in Jintan salt cavern gas storage area using permanent scatterer interferometry(PSI)[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2012, 31(9): 1821—1829.

上接第 2048 页

- [7] 刘祖典, 党发宁. 强度指标对滑坡稳定性的影响[J]. 岩土工程技术, 2002, (3): 140—143.
- LIU Zu-dian, DANG Fa-ning. The effect of soil shearing strength index on slope stability[J]. **Geotechnical Engineering Technique**, 2002, (3): 140—143.
- [8] 郭玉文, 加藤诚, 宋菲, 等. 黄土高原黄土团粒组成及其与碳酸钙关系的研究[J]. 土壤学报, 2004, 41(3): 362—368.
- GUO Yu-wen, KATO Makoto, SONG Fei, et al. Composition of loess aggregate and its relationship with CaCO₃ on the loess plateau[J]. **Acta Pedologica Sinica**, 2004, 41(3): 362—368.
- [9] 郭玉文, 张玉龙, 党秀丽, 等. 由灌溉引起的黄土湿陷过程中碳酸钙行为研究[J]. 土壤学报, 2008, 45(6): 1034—1039.
- GUO Yu-wen, ZHANG Yu-long, DANG Xiu-li, et al. Behaviors of CaCO₃ in loess collapse caused by irrigation[J]. **Acta Pedologica Sinica**, 2008, 45(6): 1034—1039.
- [10] 高国瑞. 兰州黄土显微结构和湿陷机理的探讨[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1979, (2): 123—134.
- GAO Guo-rui. Study of the microstructure and the collapse mechanism in loess soil from Lanzhou[J]. **Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)**, 1979, (2): 123—134.
- [11] 张永双, 曲永新. 陕北晋西砂黄土的胶结物与胶结作用研究[J]. 工程地质学报, 2005, 13(1): 18—28.
- ZHANG Yong-shuang, QU Yong-xin. Cements of sand loess and their cementation in north Shaanxi and west Shaanxi[J]. **Journal of Engineering Geology**, 2005, 13(1): 18—28.
- [12] 颜亚盟, 张仂. 硫酸钙在盐水中的溶解度及溶度积实验研究[J]. 盐业与化工, 2014, 43(11): 27—30.
- YAN Ya-meng, ZHANG Le. Study on the solubility and solubility product of calcium sulfate in brine[J]. **Journal of Salt and Chemical Industry**, 2014, 43(11): 27—30.