

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.04.036

基于加密物理片的数值流形法中局部网格加密

刘治军¹, 郑 宏¹, 董 苇², 葛修润¹, 孙冠华¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 湖北省水利水电科学研究院, 湖北 武汉 430070)

摘 要: 数值流形法的数学网格不需要适应求解域内各种不连续界面和边界, 因此, 总可以用规则的结构化网格建立数学覆盖。但对于大多数问题, 在整个求解域上布置统一密度的网格显得浪费。因此, 需要研究在结构化网格上实施局部加密, 建立了加密物理片的方法用以解决这一问题。具体的实施过程中, 确定了需要加密的区域后, 先在这些区域布置规则的精细网格, 然后找到这些区域中包含的原始网格中的物理片, 用精细网格上建立的插值代替被加密物理片上的局部近似, 从而提高了局部近似的阶次。数值算例结果表明, 该方法收敛性良好。另外, 如果所有物理片上的局部近似都采用 0 阶多项式(常数), 那么将会得到正定的刚度矩阵。

关 键 词: 数值流形法; 加密物理片; 结构化网格; 局部加密

中图分类号: O 242

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017)04-1211-08

Local mesh refinement in numerical manifold method based on refined physical patches

LIU Zhi-jun¹, ZHENG Hong¹, DONG Wei², GE Xiu-run¹, SUN Guan-hua¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Hubei Water Resources Research Institute, Wuhan, Hubei 430070, China)

Abstract: The mathematical mesh of numerical manifold method (NMM) does not have to accommodate to various boundaries of physical domains, and thus the mathematical coverage is always built by the regular structured mesh. However, for most problems, it is wasteful to use the mesh with the uniform density on the the whole physical region. Therefore, it is necessary to study the implementation of the local refinement on structured mesh, and a method of refining physical patches is proposed to solve the problem. For a practical problem, firstly we determine each region in which the mesh needs to be refined, and it is found that the physical patches entirely is contained by the refined mesh. Then, an interpolation on the refined mesh is constructed inside each physical patch, and the original local approximation of the physical patch is replaced by the new interpolation. Thus, the order of the local approximation is improved. Numerical results show the proposed method has good convergence. In addition, for two-dimensional analysis, the stiffness matrix obtained by the proposed method is positive definite if local approximations on all physical patches are constant.

Keywords: numerical manifold method; refined physical patches; structured mesh; local refinement

1 引 言

数值流形法^[1-3] (NMM) 是石根华博士于 1991 年提出的偏微分方程数值解法。无论场变量所处的位置是否存在不连续面, 数值流形法都用完全相同的方法形成场变量的近似。与有限元等方法相比, 在求解材料变形过程中出现渐进不连续面的问题时数值流形法有很大的优势。

用数值流形法求解一个具体问题, 可以通过

两种途径提高精度。第 1 种途径是提高局部近似的光滑度。很多学者研究了高阶多项式作为数值流形法的局部近似时的相关问题, 例如田荣^[4]、蔡永昌^[5-6]、张国新^[7]、邓安福^[8]、郭朝旭^[9]等。高阶多项式代替常数作为局部近似带来高精度的同时也导致了线性相关问题^[10-12]。

提高精度的第 2 个方法是加密网格。绝大多数研究者采用整个求解域上统一密度的网格^[13-15], 但具体的问题中, 要达到等精度的计算结果, 不同区

收稿日期: 2015-06-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 11572009, No. 51538001)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(11572009, 51538001)。

第一作者简介: 刘治军, 男, 1988 年生, 博士, 主要从事计算力学和岩土力学方面的研究工作。E-mail: zhijun06@163.com

域所需的网格密度往往不相同，因此，经济的解决方案是在不同区域布置不同密度的网格。部分研究者利用有限元成熟的前处理^[16]经验，在局部非结构化加密的网格上进行计算^[17-18]。

数值流形法的主要优点之一是可以利用任何覆盖求解域的数学网格，因此，结构化网格是一种合理的选择，这样不仅可以降低网格布置的难度，也易于利用规则的网格得到最高的插值精度。数值流形法结构化网格加密方面的研究非常少，本文之前惟一发表的成果是苏海东和祁勇峰提出的部分重叠覆盖方法^[19]，但这种方法需要根据求解域的形状来布置加密的网格，通用性较差。本文提出通用性良好的加密物理片方法来解决这个问题。

本文中在需要加密的区域中的物理片上布置结构化网格，然后利用每个物理片中的网格建立分片插值，用建立的分片插值作为物理片上的局部近似函数。通过这种方式实现网格加密，并得到比网格未加密时更光滑的位移近似表达式。笔者称这种方法为加密物理片方法。

2 用加密物理片方法加密局部网格

最早的数值流形法文献中，构成数学网格的每一个局部区域被称为数学覆盖，而这些区域被物理网格切割后形成的更小区域(位于求解域中的部分)被称为物理覆盖。但在拓扑学中，如果一系列集合 $B_i (i=1,2,...)$ 的并集能够包含集合 A ，那么称 $B_i (i=1,2,...)$ 的并集为 A 的覆盖。因此，为了与拓扑学中的概念一致，本文中称构成数学网格的每一个局部区域(原来被称为“数学覆盖”)为数学片，数学片被各种物理边界切割后形成的区域(原来被称为“物理覆盖”)为物理片，数学片的并集为数学覆盖，而物理片的并集为物理覆盖。

建立了物理片的概念之后，下面详细叙述加密物理片方法的原理。

2.1 常规物理片的加密

拉格朗日形式的数值流形法插值中，位移的近似表达式为

$$u^h(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^p w_j(\mathbf{r}) u_j^h(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (1)$$

式中： \mathbf{r} 表示插值点的坐标， $w_j(\mathbf{r})$ 为权函数。

从式(1)可以看出，任意一点位移的近似是包含该点的所有物理片上的局部近似函数加权求和得到的。对于二阶的连续介质问题，每个物理片上的任何连续函数都可以作为该物理片上的局部近似。

图 1 中画了数值流形法的局部四边形网格，

$ABCD$ 是一个流形元，它被 4 个物理片 P_A 、 P_B 、 P_C 和 P_D 包含，图 1 中分别画出了这 4 个物理片和流形单元 $ABCD$ 在它们中的位置。 $ABCD$ 中任意一点的位移近似由 P_A 、 P_B 、 P_C 和 P_D 上的局部近似用权函数加权求和得到，0 阶数值流形法中， P_A 、 P_B 、 P_C 和 P_D 上的局部近似函数都是常数。

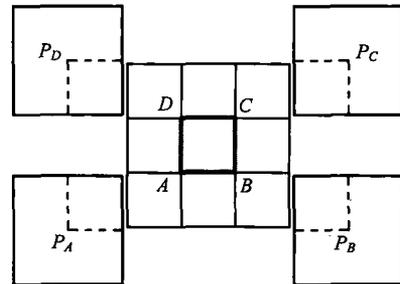


图 1 四边形流形元 $ABCD$ 和包含它的 4 个物理片
Fig.1 Rectangular manifold element $ABCD$ and its four physical patches

现取出一个物理片 P_C 单独分析，在 P_C 中布置结构化网格作为覆盖它的数学网格，如图 2 所示。然后用 P_C 中各种不连续面切割网格中的数学片，形成物理片，再由物理片形成流形元。然后，可以像常规数值流形法中那样，利用 P_C 中的网格建立其上的插值，并将得到的插值整体用作 P_C 上的局部近似函数表达为

$$u_C^h(\mathbf{r}) = \sum_{j'=1}^{p'} w_{j'}(\mathbf{r}) u_{j'}^h(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in P_C \quad (2)$$

式中：当在 P_C 中布置了网格后， $u_{j'}^h(\mathbf{r})$ 是新网格中的物理片 $P_{j'}$ 上的局部近似函数。这里加上标'表示： $P_{j'}$ 为 P_C 中布置的局部网格中的物理片，区别于原始网格中的物理片。 $w_{j'}(\mathbf{r})$ 为 $P_{j'}$ 上的权函数； p' 为 P_C 中布置的局部网格中的物理片数目。

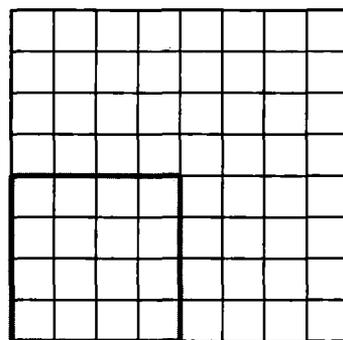


图 2 物理片 P_C 的加密
Fig.2 Refinement of physical patch P_C

在物理片 P_C 上划分网格，并将在 P_C 内部的网格上得到分片插值作为 P_C 上的局部近似函数，如

式 (2)。如果 P_C 内部没有不连续面，那么公式右端将是连续的、分片光滑的。由于式 (2) 中的 $w_j(\mathbf{r})$ 一般采用多项式，因此，式 (2) 得到的物理片 P_C 上新的近似函数阶次比原来 P_C 未加密时其上的局部近似阶次高，加密之后将会提高解的精度。

当在 P_C 上布置如图 2 所示的网格后，图 1 中的网格变成如图 3 中新的网格。把式 (2) 代入式 (1)，可得到原始网格中的流形元 $ABCD$ 中任意一点的位移近似函数。如图 3 所示，对于 $ABCD$ 中一点 r 来说，其位移近似由 7 个节点对应的自由度决定：如图 1 所示的原始网格中节点 A 、 B 、 D 对应的物理片 P_A 、 P_B 和 P_D 包含流形元 $ABCD$ ，因此， A 、 B 、 D 点参与 r 的位移插值；节点 C 对应的物理片 P_C 被加密，加密后， P_C 上的局部近似在点 r 的值由 E 、 F 、 G 和 H 4 个点插值得到，因此，点 r 的位移近似公式与 E 、 F 、 G 和 H 相关。综合起来，点 r 的位移近似由 A 、 B 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 这 7 个点决定。

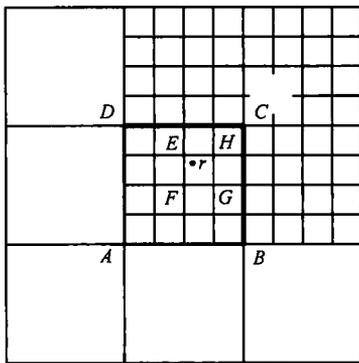


图 3 物理片被加密后 $ABCD$ 周围的网格
Fig.3 Meshes around $ABCD$ after refinement of P_C

2.2 奇异物理片的加密

图 4 中左边的物理片 P_M 中包含一个裂纹尖端，其中斜线表示裂纹。在求解断裂力学问题时，这样的物理片被设置成奇异物理片^[13, 20-21]。当需要对 P_M 加密时，先将 P_M 当作常规物理片，布置网格形成其上的物理片，然后将 P_M 上的新网格中裂纹尖端附近的节点（图 4 右边用小正方形标记）对应的物理片设置成奇异物理片，来反映裂纹尖端的奇异性。

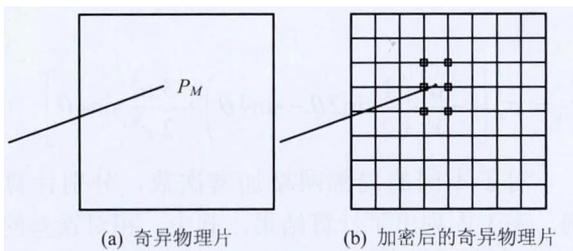


图 4 奇异物理片的加密
Fig.4 Refinement of a singular physical patch

2.3 具体问题中的加密

第 2.1 和 2.2 节中介绍了对于单个物理片的加密。在求解具体问题时，先确定需要加密的区域，然后将这些区域的网格加密到所需的密度，最后找到该区域中包含的原始网格中的物理片，这些物理片就是被加密的物理片，在形成位移的总体近似时将这些物理片上的局部近似用加密后网格上的分片插值代替。

例如图 5(a)显示了对于某个问题所布置的原始网格，假定其中有两个区域的网格需要加密，图中用粗线标出。左侧粗线圈出的区域需要的网格尺寸约为原始网格尺寸的 1/2，而右侧粗线标出的区域需要的网格尺寸为原始网格尺寸的 1/4，将网格加密到需要的密度，如图 5(b)所示，并找到加密区域中包含的原始网格中的物理片，这些物理片就是被加密的物理片，它们对应的插值节点在图 5(b)中用实心圆点标记。

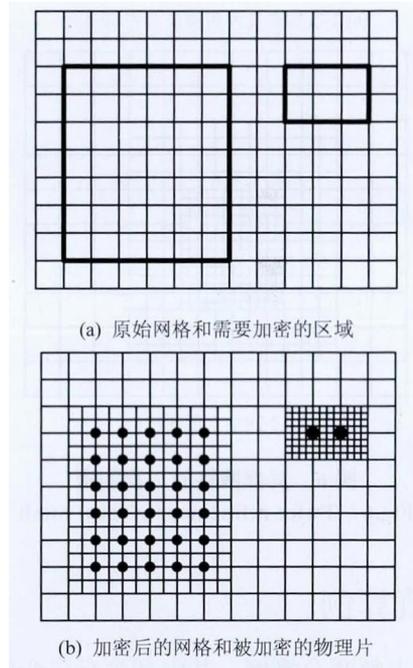


图 5 两个独立区域的加密
Fig.5 Independent refinement of two regions

如果局部区域奇异性非常强，需要的网格密度非常大，一次加密难以使网格密度达到要求，可能需要多次加密，重复上面一次加密的步骤，对于被加密的物理片继续加密，就可以实现多次加密。具体问题中，仍然是先确定需要加密的区域，再加密网格，最后确定加密区域中包含的低一级的网格中的物理片，用新网格上建立的分片光滑的插值代替原来的局部近似函数。如此反复，可以实现多次加密。

图 6 显示了多次加密的过程。图 6(a)中每上面一层网格是对下面一层网格中局部区域的加密，每一次加密都将网格尺寸减半，下面两层网格中被加密的物理片对应的节点用实心圆点标记。最下面的网格经过上面两层加密后变成如图 6(b)所示的网格。

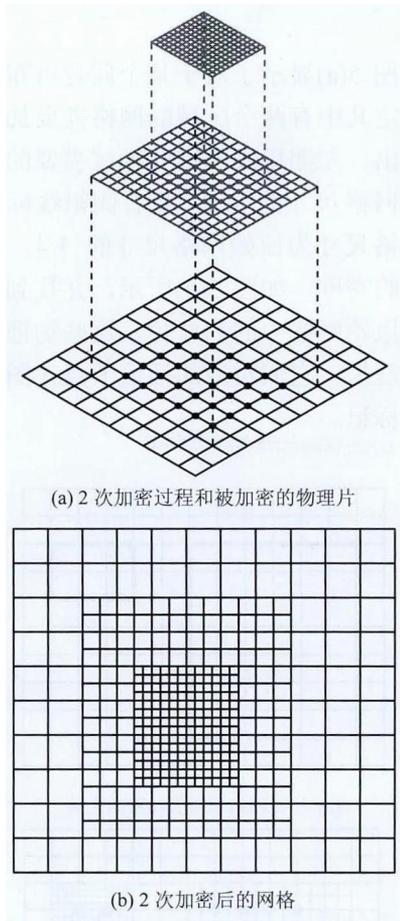


图 6 局部网格的 2 次加密
Fig.6 Twice refinement of local mesh

3 数值算例

下面求解两个算例，其中都含有应变梯度比较大的区域，这些区域的网格用上面所述的方法加密。由于本文的重点是说明加密物理片方法的有效性，因此，下面两个算例中是根据经验确定需要加密的区域，后续的研究中将根据自适应的策略确定需要加密的区域。

3.1 含圆孔无限大板

图 7(a)所示是一个含有圆孔并受单轴拉力的无限大板，圆孔的半径 $a = 1$ m，单轴拉力大小 $\sigma_\infty = 1$ MPa，作用在与 x 轴平行的方向。考虑到对称性，取有限部分的 1/4 作为计算区域，如图 7(b)所示。由于对称性，限制左边和下边的法向位移为 0，右

边和上边施加解析应力约束，解析应力在式 (3) ~ (5) 中，计算中所用的参数为弹性模量 $E=1$ MPa，泊松比 $\mu=0.2$ 。计算中本质边界条件使用罚函数法施加，罚因子为 10^5 ，刚度矩阵计算时使用 Gauss-Legendre 积分。计算中假定模型处于平面应力状态。

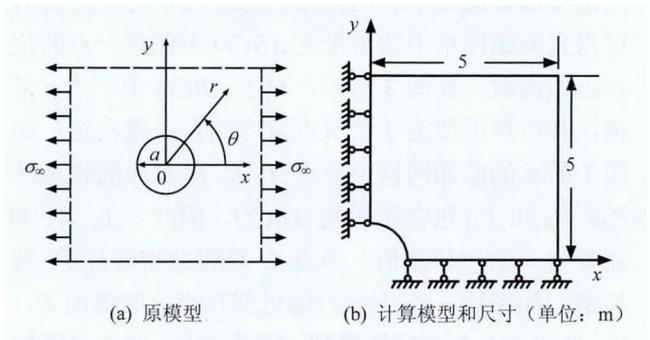


图 7 带圆孔无限大板
Fig.7 Infinite plate with a circular hole

用尺寸为 1 的正方形网格离散图 7(b)所示的模型，对圆孔周围的网格进行加密，加密区域如图 8 所示，每次加密都将网格尺寸减小 1/2。图 8 中显示的是加密 3 次后的网格。

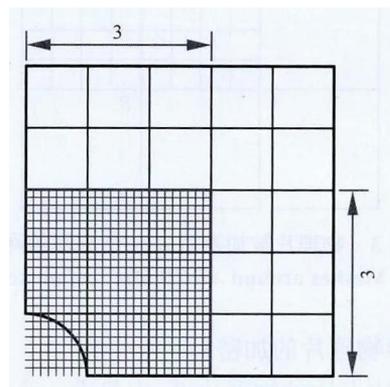


图 8 加密后网格 (单位: m)
Fig.8 Refined meshes (unit: m)

$$\sigma_x = \sigma_\infty \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right] \quad (3)$$

$$\sigma_y = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right] \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta \right] \quad (5)$$

对于不同的局部网格加密次数，分别计算本例，表 1 中列出了计算结果，其中，相对误差的计算公式为

$$RE = \frac{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^N - \boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^N - \boldsymbol{\varepsilon}^A) d\Omega}{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^A)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^A) d\Omega} \quad (6)$$

式中： $\boldsymbol{\varepsilon}^N$ 为计算得到的数值应变向量； $\boldsymbol{\varepsilon}^A$ 为解析应变向量； \mathbf{D} 为弹性矩阵。

表 1 含圆孔无限大板计算结果

Table 1 Numerical results of infinite plate with a circular hole

加密次数	数值应变能	相对误差/%	R_{ank}	自由度数
0	12.809 4	1.214	69	72
1	12.910 5	0.434	147	150
2	12.946 5	0.156	373	376
3	12.958 5	0.064	1 219	1 222

注： R_{ank} 为本质边界条件施加之前刚度矩阵的秩。

从表 1 看出，施加本质边界条件之前，刚度矩阵亏秩数始终为 3，因此，正确施加本质边界条件之后可以得到满秩的刚度矩阵；随着圆孔附近的网格密度增加，数值应变能逐渐增大，逐步趋近用解析解得到的应变能 12.966；用能量范数表示的相对误差逐渐减小，当网格加密 3 次时，已经非常接近 0。 y 轴上主应力 σ_x 和 x 轴上主应力 σ_y 的变化情况见图 9。从图 9 可以看出， y 轴上主应力 σ_x 和 x 轴上主应力 σ_y 也逐渐趋近于解析解，收敛性良好。

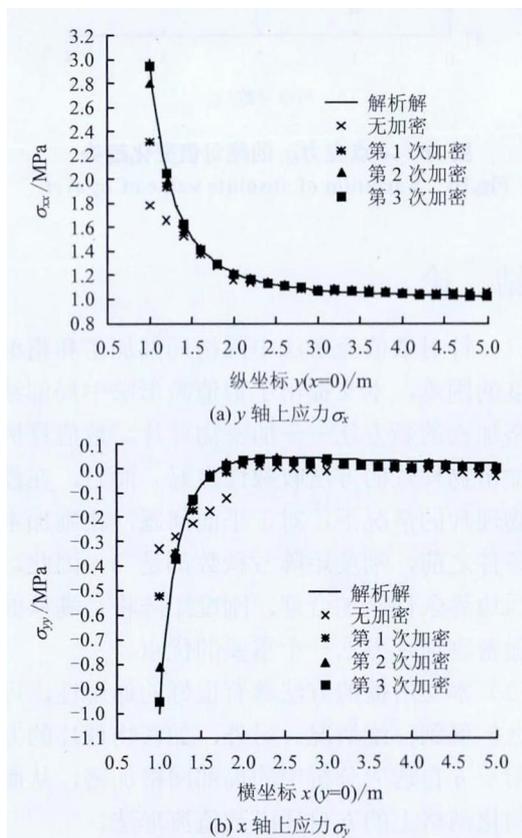


图 9 坐标轴上应力随网格加密次数的变化
Fig.9 Variations of stresses on axes against refinement times of mesh

3.2 马蹄形隧道

现用本文的方法分析图 10 所示的马蹄形隧道的模型。模型的尺寸已标注在图 10 中。弹性模量 $E=1$ MPa，泊松比 $\mu=0.2$ 。左右边界上的水平力为 $\sigma_H=20$ MPa，上边界上的竖向力为 $\sigma_V=10$ MPa。假定模型处于平面应变状态。

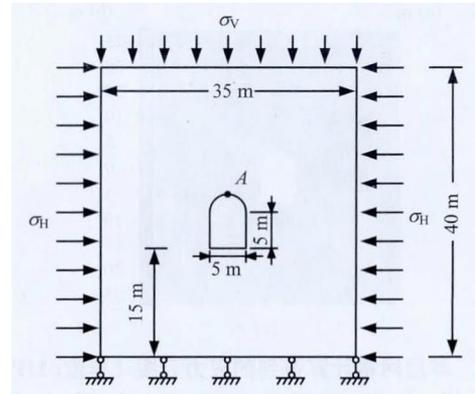


图 10 马蹄形隧道模型
Fig.10 Horseshoe-shaped tunnel

布置如图 11 所示的均匀的正方形数学网格覆盖模型，其中网格中正方形尺寸为 2。计算得到的应力云图如图 12 所示。然后对于隧道附近的区域进行两次加密，加密两次后的网格如图 13 所示。加密后的网格上计算得到的应力云图如图 14 所示。从图 12、14 的对比可以看出，随着隧道附近局部区域的网格密度增大，计算得到的应力精度逐步提高，云图的光滑性增强。为了比较，在 Abaqus 中计算了本例，Abaqus 中的网格密度与图 13 接近，应力云图如图 15 所示。可以看出，图 14、15 中显示的结果非常接近，说明我们的计算结果是合理的。此外，图 16 给出了隧道拱顶（图 10 中 A 点）水平方向主应力 σ_x 的绝对值随着网格加密的变化趋势。可以看出，随着网格密度增加，A 点 σ_x 的绝对值逐渐增大，但增加的速度逐渐放缓，收敛性良好。

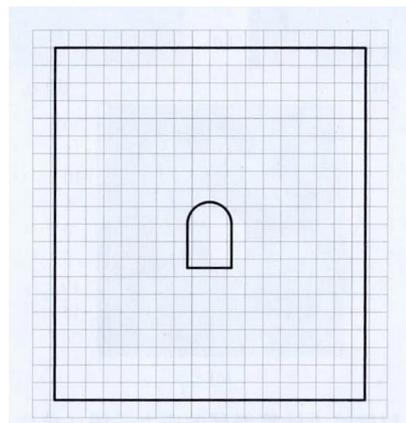


图 11 单层网格
Fig.11 Single mesh layer

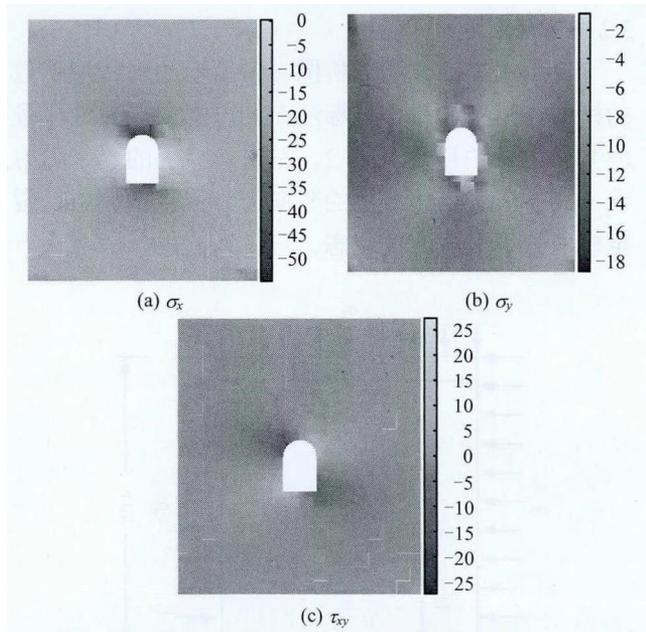


图 12 单层网格计算得到的应力云图 (单位: MPa)
Fig.12 Contours of stress computed with single mesh layer (unit: MPa)

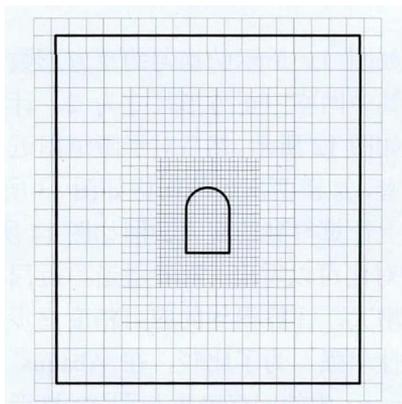


图 13 局部加密 2 次后的网格
Fig.13 Meshes with twice local refinement

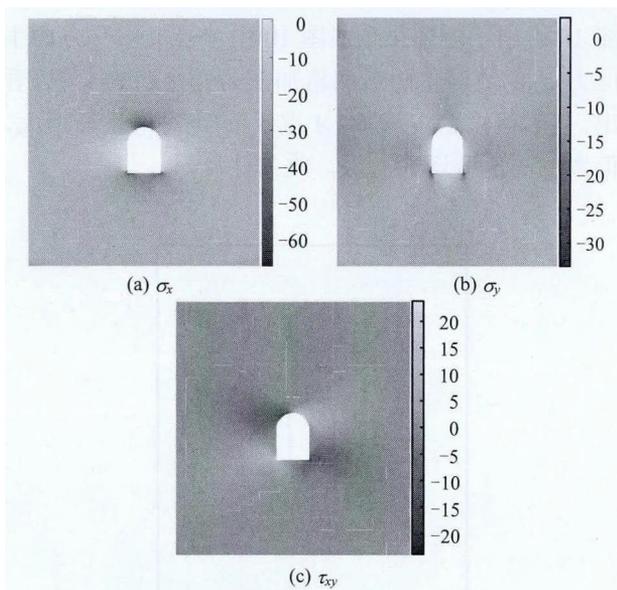


图 14 3层网格上计算得到的应力云图 (单位: MPa)
Fig.14 Contours of stress computed with three mesh layers (unit: MPa)

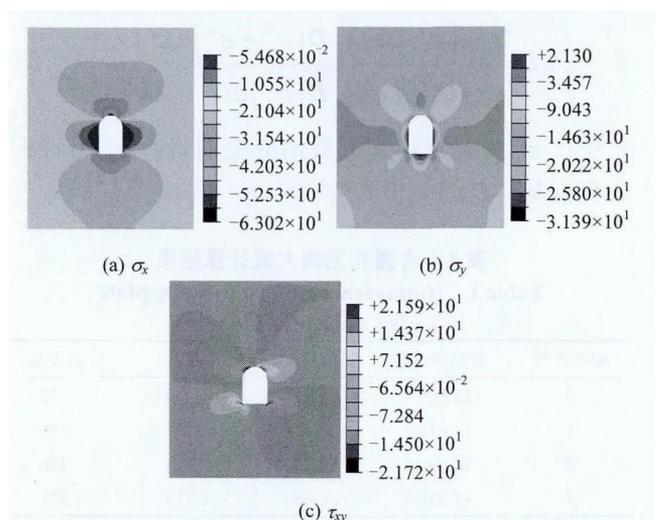


图 15 Abaqus 得到的应力云图 (单位: MPa)
Fig.15 Contours of stress computed with Abaqus (unit: MPa)

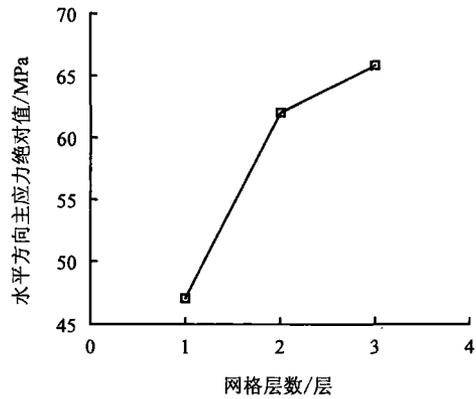


图 16 A 点应力 σ_x 的绝对值变化趋势
Fig.16 Variation of absolute value of σ_x at A

4 结 论

(1) 针对数值流形法中网格局部加密和粗细网格过度的困难, 本文提出了数值流形法中局部结构化网格加密的新方法——加密物理片。数值算例表明, 加密物理片的方法收敛性良好。而且, 在没有奇异物理片的情况下, 对于平面问题, 在施加本质边界条件之前, 刚度矩阵亏秩数都是 3。因此, 只要本质边界条件施加合理, 刚度矩阵将是满秩的。这是加密物理片方法一个重要的优点。

(2) 本文所提的方法具有很好的通用性, 可以方便地扩展到三维情况。另外, 加密物理片的方法可以用于 h 自适应分析中的局部网格加密, 从而实现结构化网格上的 h 自适应数值流形法。

参 考 文 献

[1] SHI G. Manifold method of material analysis[C]//

- Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing. Minneapolis: U.S. Army Research Office, 1991. 57-76.
- [2] MA G W, AN X M, HE L. The numerical manifold method: A review[J]. **International Journal of Computational Methods**, 2010, 7(1): 1-32.
- [3] 张湘伟, 章争荣, 吕文阁, 等. 数值流形方法研究及应用进展[J]. 力学进展, 2010, 40(1): 1-12.
ZHANG Xiang-wei, ZHANG Zheng-rong, LU Wen-ge, et al. Advances and perspectives in numerical manifold method and applications[J]. **Advances in Mechanics**, 2010, 7(1): 1-32.
- [4] 田荣, 栾茂田, 杨庆, 等. 高阶流形方法及其应用[J]. 工程力学, 2001, 18(2): 21-26.
TIAN Rong, LUAN Mao-tian, YANG Qing, et al. Fundamentals and applications of high-order manifold method[J]. **Engineering Mechanics**, 2001, 18(2): 21-26.
- [5] 蔡永昌, 廖林灿, 张湘伟. 高精度四节点四边形流形单元[J]. 应用力学学报, 2001, 18(2): 75-80.
CAI Yong-chang, LIAO Lin-can, ZHANG Xiang-wei. A high-order precision quadrilateral manifold method[J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2001, 18(2): 75-80.
- [6] 蔡永昌, 张湘伟. 使用高阶覆盖位移函数的数值流形方法及其应力精度的改善[J]. 机械工程学报, 2000, 36(9): 20-25.
CAI Yong-chang, ZHANG Xiang-wei. Expansion to high-order cover function and improvement of the stress accuracy in numerical manifold method [J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2000, 36(9): 20-25.
- [7] 张国新, 彭静. 二阶流形元法与结构变形分析[J]. 力学学报, 2002, 34(2): 261-269.
ZHANG Guo-xin, PENG Jing. Second-order manifold method in structure failure analysis[J]. **Acta Mechanica Sinica**, 2002, 34(2): 261-269.
- [8] 邓安福, 朱爱军, 曾祥勇. 高低阶覆盖函数混合的数值流形方法[J]. 土木工程学报, 2006, 39(1): 75-78.
DENG An-fu, ZHU Ai-jun, ZENG Xiang-yong. The numerical manifold method using low-order and high-order cover functions[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2006, 39(1): 75-78.
- [9] 郭朝旭, 郑宏. 高阶数值流形方法中的线性相关问题研究[J]. 工程力学, 2012, 29(12): 228-232.
GUO Chao-xu, ZHENG Hong. Study on linear dependence problem in high-order numerical manifold method[J]. **Engineering Mechanics**, 2012, 29(12): 228-232.
- [10] TIAN R, YAGAWA G, TERASAKA H. Linear dependence problems of partition of unity-based generalized FEMs[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2006, 195(37): 4768-4782.
- [11] AN X M, LI L X, MA G W, et al. Prediction of rank deficiency in partition of unity-based methods with plane triangular or quadrilateral meshes[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2011, 200(5-8): 665-674.
- [12] AN X, ZHAO Z, ZHANG H, et al. Investigation of linear dependence problem of three-dimensional partition of unity-based finite element methods[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2012, (233-236): 137-151.
- [13] MA G W, AN X M, ZHANG H H, et al. Modeling complex crack problems using the numerical manifold method[J]. **International Journal of Fracture**, 2009, 156(1): 21-35.
- [14] WU Z, WONG L N Y. Frictional crack initiation and propagation analysis using the numerical manifold method[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 39(1): 38-53.
- [15] TERADA K, ASAL M, YAMAGISHI M. Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2003, 58(9): 1321-1346.
- [16] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1987, 24(2): 337-357.

- ZHU Liang-feng, LI Ming-jiang, SUN Jian-zhong. Multifield coupled modeling techniques in engineering geological space[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(8): 2500—2506.
- [7] WATSON CARL, RICHARDSON JENNIFER, WOOD BEN, et al. Improving geological and process model integration through TIN to 3D grid conversion[J]. *Computers & Geosciences*, 2015, 82: 45—54.
- [8] DELAUNAY B. Surla sphere vide bulletin of the academy of science of the USSR[J]. *Classe des Sciences Mathematiques et Naturelles*, 1934, (8): 793—800.
- [9] 熊祖强, 贺怀建, 夏艳华. 基于 TIN 的三维地层建模及可视化技术研究[J]. *岩土力学*, 2007, 29(9): 1954—1958.
- XIONG Zu-qiang, HE Huai-jian, XIA Yan-hua. Study of technology of 3D stratum modeling and visualization based on TIN[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 29(9): 1954—1958.
- [10] 韩峻, 施法中, 吴胜和, 等. 基于格架模型的角点网格生成算法[J]. *计算机工程*, 2008, 34(4): 90—92, 95.
- HAN Jun, SHI Fa-zhong, WU Sheng-he, et al. Generation algorithm of corner-point grids based on skeleton model[J]. *Computer Engineering*, 2008, 34(4): 90—92, 95.
- [11] 张志庭. 盆地断块构造三维建模与过程可视化技术研究[D]. 武汉: 中国地质大学(武汉), 2010.
- ZHANG Zhi-ting. Research on 3D geological modeling and three-dimensional process visualization technology of basin fault block structure[D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2010.
- [12] 吴冲龙, 毛小平, 田宜平, 等. 三维数字盆地构造-地层格架模拟技术[J]. *地质科技情报*, 2006, 25(4): 1—8.
- WU Chong-long, MAO Xiao-ping, TIAN Yi-ping, et al. Digital basins and their 3D visualization modeling[J]. *Geological Science and Technology Information*, 2006, 25(4): 1—8.
- [13] 唐丙寅, 吴冲龙, 李新川, 等. 一种基于钻孔地质数据的快速递进三维地质建模方法[J]. *岩土力学*, 2015, 36(12): 3633—3638.
- TANG Bing-yin, WU Chong-long, LI Xin-chuan, et al. A fast progressive 3D geological modeling method based on borehole data[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(12): 3633—3638.

上接第 1217 页

- [17] 王书法, 朱维申, 李术才, 等. 岩体弹塑性分析的数值流形方法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2002, 21(6): 900—904.
- WANG Shu-fa, ZHU Wei-shen, LI Shu-cai, et al. Numerical manifold method of elastoplastic analysis for rockmass [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2002, 21(6): 900—904.
- [18] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 1997, 16(5): 7—12.
- WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Applications of manifold method in simulating crack propagation [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1997, 16(5): 7—12.
- [19] 苏海东, 祁勇峰. 部分重叠覆盖流形法的覆盖加密方法[J]. *长江科学院院报*, 2013, 30(7): 95—100.
- SU Hai-dong, QI Yong-feng. Cover refinement for numerical manifold method with partially overlapping covers [J]. *Journal of Yangtze River Scientific Research Institute*, 2013, 30(7): 95—100.
- [20] ZHENG H, XU D D. New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014, 97(13): 986—1010.
- [21] ZHENG H, LIU Z. Numerical manifold method with multilayer covers[J]. *Science China Technological Sciences*, 2015, 58(1): 1—16.