

DOI: 10.11779/CJGE201710015

基于数值流形法的渗流问题边界处理新方法

李伟^{1, 2}, 郑宏^{1, 2, 3}

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 北京工业大学建筑工程学院, 北京 100124)

摘要: 由于基于单位分解的无网格法, 如无网格伽辽金法等, 所构造的形函数往往不具有 δ 插值属性, 因此难以准确施加本质边界条件和材料边界的连续性条件。而采用传统的罚函数法和拉氏乘子法, 分别有合适罚因子的选取和需满足 inf-sup 条件等问题。所以, 利用“局部解满足了要求, 则由单位分解所构造的整体解会自动满足要求”的单位分解法的求解性质, 通过构造不同类型物理片上的局部解, 提出了改进的基于移动最小二乘插值的数值流形法 (MLS-NMM), 并将其应用于稳定渗流问题的求解中。该方法不仅能直接准确施加本质边界和材料边界条件, 而且能精确地求解奇异角点问题。典型算例的计算结果表明, 我们所建议的方法是可行的、有效的, 可为工程渗流分析提供参考。

关键词: 移动最小二乘插值; 数值流形法; 单位分解法; 非均质; 渗流分析

中图分类号: TV139.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2017)10 - 1867 - 07

作者简介: 李伟(1988 -), 男, 博士研究生, 主要从事计算岩土力学方面的研究。E-mail: liw9012@163.com。

New boundary treatment for seepage flow problem based on numerical manifold method

LI Wei^{1, 2}, ZHENG Hong^{1, 2, 3}

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Since the shape functions derived from the partition of unity-based meshless method, such as the element-free Galerkin method, are free of the Kronecker delta property, there are great troubles in the exact imposition of the essential boundary condition and boundary continuity of materials. Nevertheless, if adopting the penalty method or the Lagrange multiplier method, problems, like the selection of proper penalty factor and the satisfaction of the inf-sup condition, will occur. This study utilizes the property of partition of unity that once the local solutions satisfy some condition, the global solution will automatically satisfy the same condition. By constructing local approximations in physical patches of different types according to the boundary condition, a new moving least square interpolation-based numerical manifold method (MLS-NMM) is developed. Through the solution of some typical seepage flow problems, it is demonstrated that the proposed procedure is capable to deal with the problems of the singular angular point precisely and may provide an alternative solution for the seepage analysis in engineering.

Key words: moving least square interpolation; numerical manifold method; partition of unity; heterogeneity; seepage analysis

0 引言

在岩土工程设计中, 渗流分析往往是必不可少的, 尤其是在土石坝、库岸边坡, 深基坑的设计中。目前常用的渗流分析方法有^[1]: 流体力学法、水力学法、流网法、电比拟试验法、数值分析法。其中, 由于数值分析法计算精度高, 且有快速、方便, 适用于复杂边界和求解大型问题的优势, 近年来得到的迅速发展。

目前常用的渗流分析数值方法有: 有限元法^[2-4], 边界元法^[5-6], 无网格法^[7], 有限体积法^[8]和数值流形法^[9-10]。其中由郑宏等提出的 MLS-NMM^[10]在无压渗流问题的求解中具有特殊的优势。该方法允许节点布置到计算区域外, 非常适用于求解渗流问题, 尤其是

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11172313, 11572009, 51538001);
国家基础研究计划 (“973” 计划) 项目 (2014CB047100)
收稿日期: 2016 - 07 - 26

无压渗流问题。但由于该方法属于单位分解类方法，形函数不像有限元形函数那样具有 δ 插值属性，所以无法准确的施加本质边界和材料边界条件。只能借助罚函数法^[11]和拉氏乘法^[12]等施加边界条件，但罚函数法有选取合适罚因子的困难，拉氏乘法又有难以确保满足 inf-sup 条件的问题，所以急需新的处理方式来解决此问题。

本文利用“只要物理片上的解（局部解）满足了要求，则由单位分解所构造的整体解会自动满足要求”的思想，致力于通过构造不同类型的物理片上的局部解，来准确施加本质和材料边界条件，提出了改进的 MLS-NMM。通过 3 个典型的稳定渗流算例的流网计算，验证了该方法的准确性。

1 改进的 MLS-NMM

1.1 改进的 MLS-NMM 简介

基于移动最小二乘插值的数值流形法 (MLS-NMM) 是采用数值流形法的思想^[10, 13]，利用了移动最小二乘插值的单位分解性质。它使用节点的影响域作为数学片，生成数学覆盖；物理边界切割数学片生成物理片，构成物理覆盖，最终形成两套覆盖系统。所以，它可以像基于有限元覆盖的数值流形法一样，自然地处理连续与非连续问题。尽管该方法使用 MLS 插值作为权函数，会提高计算量，但是它可以减少网格依赖性、提高求解精度且求解问题的适用性更强。

因为 MLS-NMM 属于单位分解类法，所以它可以根据已知的本质边界条件和材料边界去准确构造与其相关联物理片的局部近似解。通过此种施加边界条件的方式，就可以准确地施加本质边界条件和材料边界条件，称之为改进的 MLS-NMM。此外，还可以根据奇异角点处的解的性质，去构造奇异物理片，解决奇异角点问题。所以，本文的最大创新点是通过构造不同的物理片的局部近似解，去解决本质和材料边界条件难以准确施加的问题和奇异角点问题。下面将详细的介绍不同类型物理片上局部近似解的构造。

1.2 不同类型物理片上解的构造

根据物理片 (physic patch, PP) 中含有的边界类型的不同，将物理片分为六类，来分别定义不同的局部近似函数 u_k^h 。

(1) PP 中不含任何边界，取常数阶进行近似，即取：

$$u_k^h = a_k^1, \tag{1}$$

则记： $\bar{u}_k = 0$ ， $E_k = [1]$ ， $d_k = [a_k^1]^T$ 。

(2) 当 PP 中仅含一条材料边界时，要满足场变量连续，导数不连续的性质，则构造为

$$u_k^h = a_k^1 + a_k^2 \cdot g(x, y) + a_k^3 \cdot \chi_1 \cdot f(x, y) + a_k^4 \cdot \chi_2 \cdot f(x, y) \tag{2}$$

则记： $\bar{u}_k = 0$ ， $E_k = [1 \ g \ \chi_1 f \ \chi_2 f]$ ， $d_k = [a_k^1 \ a_k^2 \ a_k^3 \ a_k^4]^T$ 。式中， $f(x, y)$ 为材料边界所在的方程， $g(x, y)$ 一般为在此物理片中垂直于材料边界且过材料边界中点的方程（为了保持局部近似解的坐标平衡），如图 1 所示。

$$\chi_i(x, y) = \begin{cases} 1 & ((x, y) \in \Omega_i), \ i=1, 2. \\ 0 & ((x, y) \notin \Omega_i) \end{cases}$$

中易知此局部近似函数满足材料边界的属性。

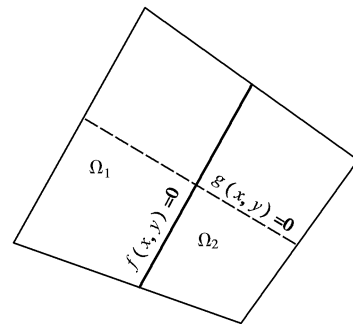


图 1 含一条材料边界的物理片 (粗实线代表材料边界)

Fig. 1 Physical patch with a material boundary (heavy line represents a material boundary)

(3) PP 仅包含一条本质边界时，这时将此已知的本质边界条件直接用于构造此物理片的局部近似解，则为

$$u_k^h = \bar{u} + a_k^1 \cdot \bar{f}(x, y) + a_k^2 \cdot \bar{f}(x, y) \cdot \bar{g}(x, y) \tag{3}$$

则记： $\bar{u}_k = \bar{u}$ ， $E_k = [\bar{f} \ \bar{f}\bar{g}]$ ， $d_k = [a_k^1 \ a_k^2]^T$ 。式中， \bar{u} 为已知的本质边界条件， $\bar{f}(x, y)$ 为本质边界所在的方程， $\bar{g}(x, y)$ 一般为垂直于本质边界且过本质边界中点的方程（也是为了保持局部近似解的坐标平衡），如图 2 所示。式 (3) 可知，此物理片的局部近似能准确反映本质边界条件。

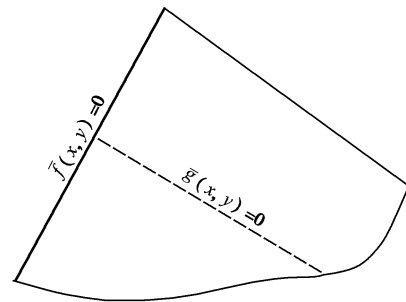


图 2 含一条本质边界的物理片 (粗实线代表本质边界)

Fig. 2 Physical patch with an essential boundary (heavy line represents an essential boundary)

(4) 当 PP 包含两条本质边界时 (有角点问题)，现将局部近似函数取为

$$u_k^h = \bar{u} + a_k^1 \cdot \bar{f}_1(x, y) \cdot \bar{f}_2(x, y) \tag{4}$$

则记: $\bar{u}_k = \frac{\bar{f}_2 \bar{u}_1 + \bar{f}_1 \bar{u}_2}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}$, $E_k = [\bar{f}_1 \bar{f}_2]$, $d_k = [a_k^1]^T$ 。式

中, $\bar{u} = \frac{\bar{f}_2 \bar{u}_1 + \bar{f}_1 \bar{u}_2}{\bar{f}_1 + \bar{f}_2}$, \bar{u}_1 和 \bar{u}_2 对应两条已知的本质边

界条件, $\bar{f}_1(x, y)$ 和 $\bar{f}_2(x, y)$ 为两条本质边界所在的方程, 如图 3 所示。式 (4) 可知, 此物理片的局部近似也能准确反映本质边界条件。

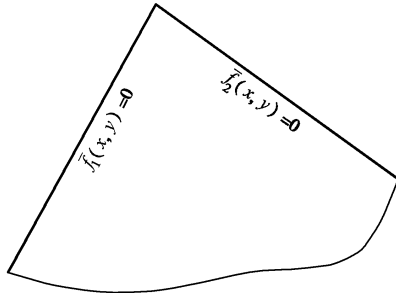


图 3 含两条本质边界的物理片 (粗实线代表本质边界)

Fig. 3 Physical patch with two essential boundaries (heavy lines represent essential boundaries)

(5) PP 含有一条材料边界和一条本质边界, 取 $u_k^h = \bar{u} + a_k^1 \cdot \bar{f}(x, y) + a_k^2 \cdot \chi_1 \cdot \bar{f}(x, y) \cdot f(x, y) + a_k^3 \cdot \chi_2 \cdot \bar{f}(x, y) \cdot f(x, y)$ 。

则记: $\bar{u}_k = \bar{u}$, $E_k = [\bar{f} \quad \chi_1 \bar{f} \quad \chi_2 \bar{f}]$, $d_k = [a_k^1 \quad a_k^2 \quad a_k^3]^T$ 。式中, \bar{u} , χ_i , $\bar{f}(x, y)$, $f(x, y)$ 同式 (2) 和 (3) 的含义相同, 如图 4 所示。式 (5) 能准确反映出材料边界和本质边界的性质。

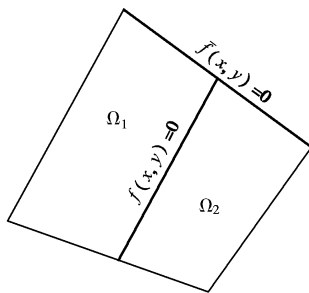


图 4 含一条本质边界和一条材料边界的物理片

Fig. 4 Physical patch with an essential boundary and a material boundary

(6) PP 含一条本质边界和一条自然边界, 在准确满足本质边界条件的基础上, 利用文献[14]角点问题渐进解, 构造局部近似函数为

$$u_k^h = \bar{u} + a_k^1 r^{\lambda_1} (\cos \lambda_1 \theta + (-1)^c \sin \lambda_1 \theta) + a_k^2 r^{\lambda_2} (\cos \lambda_2 \theta - (-1)^c \sin \lambda_2 \theta), \quad (6)$$

则记: $\bar{u}_k = \bar{u}$, $E_k = \begin{bmatrix} r^{\lambda_1} (\cos \lambda_1 \theta + (-1)^c \sin \lambda_1 \theta) \\ r^{\lambda_2} (\cos \lambda_2 \theta - (-1)^c \sin \lambda_2 \theta) \end{bmatrix}^T$,

$d_k = [a_k^1 \quad a_k^2]^T$ 。式中, $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\alpha}$, $n=1, 2$,

$c = \begin{cases} 0 & (\Gamma_{ob} \text{ 为本质边界条件}) \\ 1 & (\Gamma_{oa} \text{ 为本质边界条件}) \end{cases}$, $r, \theta, \alpha, \Gamma_{oa}, \Gamma_{ob}$

如图 5 所示。

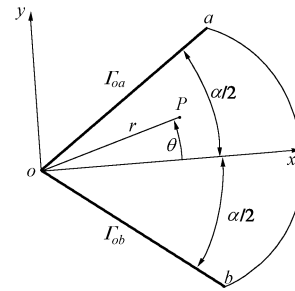


图 5 含两条边界的物理片 (不含材料边界)

Fig. 5 Physical patch with two boundaries and no material boundary

(7) PP 含两条自然边界, 也利用文献[14]角点问题渐进解, 构造局部近似函数为

$$u_k^h = a_k^1 + a_k^2 r^{\lambda_1} \cos \lambda_1 \theta + a_k^3 r^{\lambda_2} \sin \lambda_2 \theta \quad (7)$$

记: $\bar{u}_k = 0$, $E_k = [r^{\lambda_1} \cos \lambda_1 \theta \quad r^{\lambda_2} \sin \lambda_2 \theta]$, $d_k = [a_k^1 \quad a_k^2 \quad a_k^3]^T$ 。式中, $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\alpha}$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{\alpha}$ 。 r, θ, α 如图 5 所示。

注意: 式 (6) 和式 (7) 在两边界夹角为凹角时尤其有用, 它们能更好地反映此物理片的奇异性。此外将本质边界条件和材料边界条件作为已知条件直接用于构造物理片的局部近似解, 不仅能准确地施加本质和材料边界条件, 还能使用严格的伽辽金变分原理, 不用像罚函数法和拉氏乘子法那样使用约束变分原理施加边界条件。

根据式 (1) ~ (7) 的格式表达, 可将不同物理片的局部近似函数统一为 (8) 式为

$$u_k^h = \bar{u}_k + E_k d_k \quad (8)$$

1.3 全局近似函数

当所有的物理片上局部近似函数定义之后 (统一格式见式 (8)), 通过单位分解函数 $\{\varphi_k\}$ 作为权函数, 将局部近似函数合并到一起, 就得到一个全局近似函数, 如下:

$$u^h = \sum_{k=1}^n \varphi_k u_k^h = \sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{u}_k + ND \quad (9)$$

式中, n 为物理片的个数, $N = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n]$,

$D = [d_1^T \quad d_2^T \quad \dots \quad d_n^T]^T$, $N_k = \varphi_k E_k$ 。

本文中权函数 $\{\varphi_k\}$ 取在矩形影响域下的移动最小二乘 (MLS) 插值形函数 (采用三次样条权函数构造 MLS 插值形函数), 具体过程参见[15]。

2 渗流控制方程及离散

本文将使用改进的 MLS-NMM 求解二维稳定渗流的流网问题, 假定材料是各向同性的。

2.1 基本控制方程

渗流区域内 Ω ，总水头 ϕ 满足连续性方程为

$$-\nabla \cdot (k\nabla\phi) = b; \tag{10a}$$

水头边界（本质边界）条件 Γ_ϕ 为

$$\phi = \bar{\phi}; \tag{10b}$$

流量边界（自然边界）条件 Γ_q 为

$$k \frac{\partial\phi}{\partial n} = \bar{q}; \tag{10c}$$

自由面边界 Γ_f 为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= y, \\ k \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{10d}$$

出渗面边界条件 Γ_s 为

$$\phi = y; \tag{10e}$$

材料边界条件 Γ_m 为

$$\left. \begin{aligned} \phi^+ &= \phi^-, \\ k^+ \frac{\partial\phi^+}{\partial n} &= k^- \frac{\partial\phi^-}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \tag{10f}$$

式中， ∇ 为梯度算子， ϕ 为计算区域内任一点的总水头， k 为渗透系数， b 为内源（是已知的）， $\bar{\phi}$ 为已知水头边界值， \bar{q} 为已知流量边界值， y 表示计算点的垂直坐标分量， n 为边界外法线分量，上标“+”和“-”分别代表该量属于 Γ_m 附近的两侧， $\Gamma_\phi \cup \Gamma_q \cup \Gamma_f \cup \Gamma_s = \partial\Omega$ ， $\partial\Omega$ 为渗流区域 Ω 的边界。

根据式（10a）和边界条件（10b）~（10f）得到泛函为

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \nabla\phi \cdot \nabla\phi d\Omega - \int_{\Omega} b\phi d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}\phi d\Gamma, \tag{11}$$

由 $\delta\pi(\phi) = 0$ ，得

$$\int_{\Omega} k \nabla(\delta\phi) \cdot \nabla\phi d\Omega = \int_{\Omega} (\delta\phi)^T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} (\delta\phi)^T \bar{q} d\Gamma. \tag{12}$$

值得注意的是，因本文的方法是利用 MLS-NMM 的权函数具有单位分解的性质，让相关联的物理片上局部近似函数满足材料边界和本质边界条件，则整体解会自动满足该类边界条件的方式施加本质边界和材料边界条件，所以无需像用约束变分原理那样施加本质边界和材料边界。

2.2 离散控制方程

将式（9）代入式（12），得

$$\int_{\Omega} k(LN)^T \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n L(\phi_k \bar{u}_k)}_A + \underbrace{(LN)D}_B \right) d\Omega = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} N^T \bar{q} d\Gamma, \tag{13}$$

式中， $L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T$ 。式（13）可进一步化简为

$$KD = Q, \tag{14}$$

式中： $K = \int_{\Omega} k B^T B d\Omega$ ， $Q = -\int_{\Omega} k B^T A d\Omega + \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma_q} N^T \bar{q} d\Gamma$ ， $A = \sum_{k=1}^n L(\phi_k \bar{u}_k)$ ， $B = LN$ ， ϕ_k ， \bar{u}_k 和 N 的表达式和含义详见 1.3 节。

通过求解式（14）即可求得总水头场变量（即势函数 $\phi(x,y)$ ），要想求得渗流区域的流网，还需计算相应的流函数 $\psi(x,y)$ 。本文采用文献[2]的方法求解流函数，此方法无需施加流场边界，只需进行域内积分，实施简单方便。

3 积分方案

改进的 MLS-NMM 要采用背景网格进行数值积分。本文将采用刘丰等^[16]提出的修改的 Delaunay 三角网格作为背景网格。值得注意的是本文的方法，材料边界不切割数学片生成物理片，但需将通过材料边界的背景积分网格细分，以解决不同材料区域的积分问题。

本文所有算例的积分方案是：在材料边界附近（积分网格与材料边界相交）的背景积分网格采用 13 个高斯点的 Hammer 积分，其它背景积分网格采用 6 个高斯点的 Hammer 积分。

4 算例

为验证改进的 MLS-NMM 法对稳定渗流流网分析的正确性，将做以下算例。下面所有的算例将采用均匀布置数学节点（用于生成相应数学片的节点），且构造节点影响域的半径为 $1.5h$ （本文采用正方形影响域，即正方形的半边长为 $1.5h$ ）， h 为数学节点间距。

算例的计算流程详述如下：

- （1）算例几何参数及物理参数的输入。
- （2）根据求解域布置数学节点，生成由数学片组成的数学覆盖。
- （3）根据求解域的物理边界（本文不含材料边界）切割数学片，生成物理片，组成物理覆盖。
- （4）查找并记录每个物理片所包含边界条件的类型和数量。
- （5）根据 1.2 节内容判断物理片的类型并记录；（此步用来识别不同类型物理片的局部近似函数。值得注意的是，本文是让含边界条件的物理片的局部近似函数满足边界条件来施加边界条件的，这是本文方法与其它方法施加边界条件的不同之处）。
- （6）确定背景积分网格，确定每个积分网格的高斯积分点及其权系数。
- （7）计算式（14）的 K 和 Q 。

a) 对所有的高斯积分点进行循环

- ①确定所有能影响该积分点的物理片和数学片;
- ②计算这些物理片在积分点处的 N 及其导数的值和 A 的值;
- ③将式 (14) 中被积函数在积分点处的值, 乘以相应的积分权系数后分别组装到 K 和 Q 中。

b) 结束积分点循环

- (8) 求解式 (14), 即得势函数 (总水头场变量)。
- (9) 采用文献[2]的方法求解流函数。
- (10) 根据 (8)、(9) 的计算结果, 绘制流网。

4.1 多层材料介质问题

本算例最早由 Tracy 等^[3]设计提出, 用来验证数值方法求解多层材料介质流网的准确性。计算模型的尺寸如图 6 所示, 3 层材料的渗透系数大小如图 6 所示 (单位为 cm/s), 在图 6 中的左边、底边和右上边黑实线所表示的边界为不透水边界, 其它外边界为常水头边界, 虚线表示材料边界。取数学节点间距为 $h=1\text{ m}$, 布置图如图 7 所示。

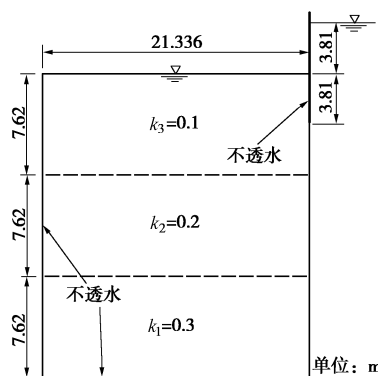


图 6 多层材料介质尺寸图

Fig. 6 Sizes of multilayer material medium

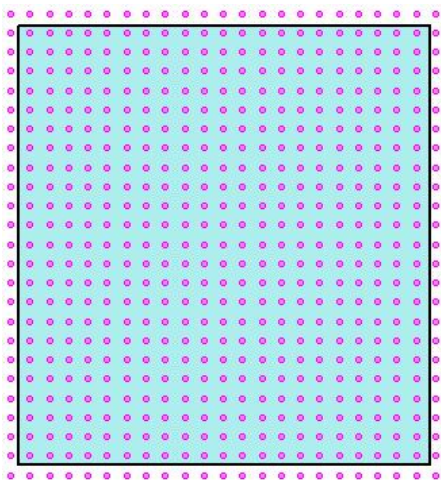


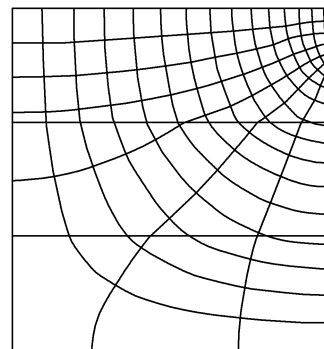
图 7 $h=1\text{ m}$ 数学节点布置图

Fig. 7 Layout of math nodes when $h=1\text{ m}$

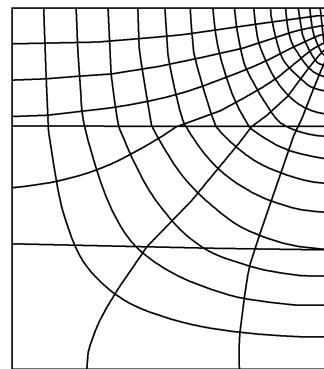
本例所涉及的边界有常水头边界、不透水边界和

材料边界, 即对应于 1.2 节中的本质边界、自然边界和材料边界。则会产生 5 种具有不同局部近似函数的物理片, 这些物理片的局部近似函数分别对应于 1.2 节的式 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)。因材料边界可以位于物理片内, 所以无需再切割物理片, 减少了工作量。

本文方法计算的流网图如图 8 (a) 所示。根据理论分析, 流网在材料边界处, 势线和流线都会发生转折。此外, 因在每层介质中都假定是各向同性的, 所以流线和势线必垂直, 同时流线必垂直于等水头边界, 势线必垂直于不透水边界。图 8 (a) 的计算结果同文献[3]中的结果 (如图 8 (b)) 基本一致, 且能很好的反映出了流网的特征, 证实了本文方法求解该问题的准确性。



(a) 本文计算结果



(b) 引自文献[3]

图 8 多层材料介质流网图

Fig. 8 Flow net of multilayer material medium

4.2 堰下有压渗流问题

继续采用文献[3]中的算例, 来验证本文方法处理复杂边界问题的能力。堰下有压渗流计算模型尺寸和渗透系数, 如图 9 所示。堰下有两个板桩 (简化计算认为其厚度为 0, 即 D 和 F 的坐标相同, G 和 I 的坐标相同), DE 和 EF 为右侧板桩的两侧, GH 和 HI 为左侧板桩的两侧。取数学节点间距为 $h=0.5\text{ m}$, 布置图如图 10 所示。

在计算中, AB, DE, EF, FG, GH 和 HI 为不透水边界, BC, CD, IJ, JA 为常水头边界。本例所涉

及的边界有常水头边界、不透水边界，即对应于 1.2 节中的本质边界、自然边界。则会产生五种具有不同局部近似函数的物理片，这些物理片的局部近似函数分别对应于 1.2 节的式 (1)、(3)、(4)、(6)、(7)。注意的是：像裂纹尖端存在于物理片中，通过使用 Williams 级数构造物理片上局部近似函数来满足 $1/\sqrt{r}$ 奇异性的处理一样^[13]，本文利用文献[14]中拉普拉斯方程的角点问题渐进解，构造了如式 (7) 所示的物理片上的局部近似解，则板桩的 E, H 点就可以存在于同一物理片中。这样处理能很好的反映 E, F 点处的解的奇异性，不用在 E, F 点进行局部加密处理，就可获得较高精度。

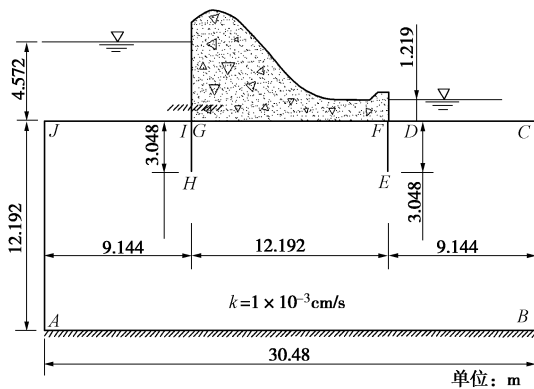


图 9 堰下有压渗流模型尺寸图

Fig. 9 Sizes of confined flow under weir

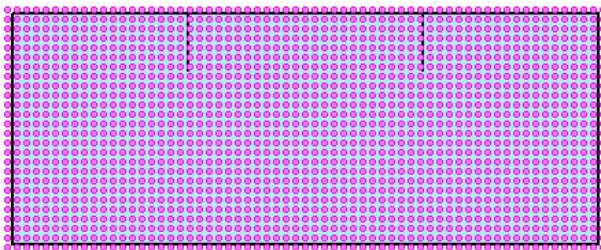
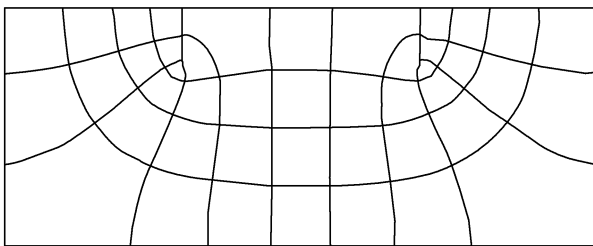


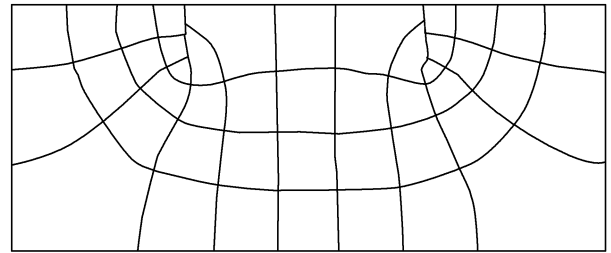
图 10 h=0.5 m 数学节点布置图

Fig. 10 Layout of math nodes when h=0.5 m

流网的计算结果如图 11 (a) 所示，同文献[3]中的结果 (如图 11 (b)) 基本一致，且在边界处的计算结果要好于文献[3]，能很好地反映流网的特性。



(a) 本文计算结果



(b) 引自文献[3]

图 11 堰下有压渗流流网图

Fig. 11 Flow net of confined flow under weir

4.3 分区梯形坝无压渗流问题

采用文献[4]的算例，来验证本文方法求解复杂无压渗流问题的正确性。

此分区梯形坝无压渗流计算模型尺寸和材料分区如图 12 所示。将渗透系数分为两种情形进行分析，情形一： $k_1=k_2=1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ ；情形二： $k_1=1 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$ ， $k_2=1 \times 10^{-4} \text{ cm/s}$ 。上游面为常水头边界，底边为不透水边界，排水区为出渗边界，如式 (10e)，还有自由面边界。即分别对应于 1.2 节中的本质边界、自然边界、本质边界和自然边界。则会产生 5 种具有不同局部近似函数的物理片，这些物理片的局部近似函数分别对应于 1.2 节的式 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)。

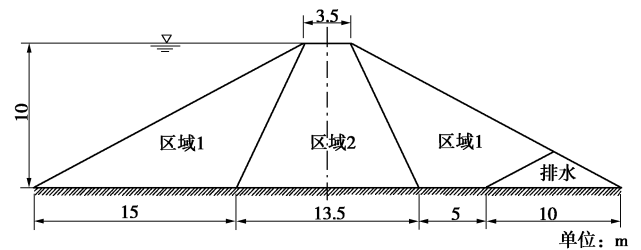


图 12 分区梯形坝无压渗流模型尺寸图

Fig. 12 Sizes of unconfined seepage model for zoned trapezoidal dam

本文的自由面调整策略，采用文献[10]的方法，这样能确保自由面调整时，自由面上的点不会出现在域外，利于编程实现。在逸出段，假定溢出点与邻近的自由面上两点共线，从而可求出溢出点的位置。本例中，当自由面上点的水头与坐标的差小于给定容差时认为收敛，即 $\max|\phi - y| \leq \epsilon$ ，取 $\epsilon = 0.0001$ 。采用 $h=0.5 \text{ m}$ 间距布置数学节点。

从最终的流网，如图 13 (a) 和图 13 (b) 所示，可以看出等势线与流线之间的垂直情况较好。



(a) 情形一

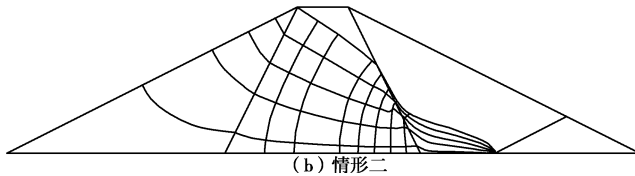


图 13 分区梯形坝流网图

Fig. 13 Flow net of zoned trapezoidal dam

5 结 论

改进的 MLS-NMM 法利用单位分解的性质,通过构造物理片上局部解,不仅能直接准确地施加本质边界和材料边界条件,还能精确地求解奇异角点问题。该方法解决了原 MLS-NMM (或单位分解类方法)采用罚函数法,有罚因子的选取问题,和拉氏乘法,需满足 inf-sup 条件的问题。通过 3 个算例的计算结果表明,改进的 MLS-NMM 求解稳定渗流问题是可行的、有效的,可为工程渗流流网分析,提供参考。

参考文献:

- [1] 张楚汉. 水工建筑学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.(ZHANG Chu-han. Hydraulic structures[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011. (in Chinese))
- [2] AALTO J. Finite element seepage flow nets[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1984, **8**(3): 297 - 303.
- [3] TRACY F T, RADHAKRISHNAN N. Automatic generation of seepage flow nets by finite element method[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 1989, **3**(3): 268 - 284.
- [4] KAZEMZADEH PARSİ M J, DANESHMAND F. Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, **36**(6): 780 - 797.
- [5] 张有天, 张武功. 半无限域渗流问题的边界元方法[J]. 水利学报, 1981(4): 8 - 17. (ZHANG You-tian, ZHANG Wu-Gong. The boundary element method for seepage flow in semi-finite region[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1981(4): 8 - 17. (in Chinese))
- [6] 李新强, 陈祖煜. 三维裂隙网络渗流计算的边界元法及程序[J]. 中国水利水电科学研究院学报, 2006(2): 81 - 87. (LI Xin-qiang, CHEN Zu-yu. Boundary element method for 3-D fracture network seepage flow and its programing[J]. Journal of China Institute of Water Resources and Hydropower Research, 2006(2): 81 - 87. (in Chinese))
- [7] 周晓杰, 介玉新, 李广信. 基于渗流和管流耦合的管涌数值模拟[J]. 岩土力学, 2009, **10**: 3154 - 3158. (ZHOU Xiao-jie, JIE Yu-xin, LI Guang-xin. Numerical simulation of piping based on coupling seepage and pipe flow[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **10**: 3154 - 3158. (in Chinese))
- [8] 杨海英, 陈 刚, 柴军瑞, 等. 金沙峡电站闸坝区渗流场有限体积法数值模拟[J]. 岩土力学, 2005(3): 461 - 464. (YANG Hai-ying, CHEN Gang, CHAI Jun-rui, et al. Numerical simulation of sluice seepage field of Jinshaxia Hydropower Station by finite volume method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005(3): 461 - 464. (in Chinese))
- [9] 王均星, 吴雅峰, 白呈富. 有自由面渗流分析的流形单元法[J]. 水电能源科学, 2003(4): 23 - 25. (WANG Jun-xing, WU Ya-feng, BAI Cheng-fu. Numerical manifold element method for seepage with free surface problem[J]. Water Resources and Power, 2003(4): 23 - 25. (in Chinese))
- [10] ZHENG H, LIU F, LI C. Primal mixed solution to unconfined seepage flow in porous media with numerical manifold method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, **39**(2): 794 - 808.
- [11] ZHU T, ATLURI S N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method[J]. Computational Mechanics, 1998, **21**(3): 211 - 222.
- [12] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, **37**(2): 229 - 256.
- [13] ZHENG H, LIU F, LI C. The MLS-based numerical manifold method with applications to crack analysis[J]. International Journal of Fracture, 2014, **190**(1/2): 147 - 166.
- [14] SZABO B, BABUSKA I. Introduction to finite element analysis: formulation, verification and validation[M]. New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [15] 刘 丰. 非有限覆盖的数值流形法及其应用[D]. 武汉: 中国科学院大学(武汉岩土力学研究所), 2015. (LIU Feng. Numerical manifold method based on non-finite element cover and its applications[D]. Wuhan: University of Chinese Academy of Sciences(Institute of Rock and Soil Mechanics), 2015. (in Chinese))
- [16] 刘 丰, 郑 宏, 李春光. 基于 NMM 的 EFG 方法及其裂纹扩展模拟[J]. 力学学报, 2014(4): 582 - 590. (LIU Feng, ZHENG Hong, LI Chun-guang. The NMM-based EFG method and simulation of crack propagation[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014(4): 582 - 590. (in Chinese))