

DOI: 10.16285/j.rsm.2016.08.040

考虑张剪破坏的边坡下限原理有限元法

高如超^{1,2}, 李春光¹, 孙 聪¹, 郑 宏¹, 葛修润¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;
2. 中交第二航务工程局的有限公司技术中心, 湖北 武汉 430040)

摘 要: 在工程中发生的很多边坡破坏模式不仅表现为剪切破坏, 还表现为在边坡后缘产生一定深度的张拉破坏。这种既考虑剪切破坏又考虑张拉破坏的屈服准则, 是经典的 Mohr-Coulomb (简称 M-C) 屈服准则难以模拟的。从空间方位离散的角度出发, 对经典的 M-C 屈服面线性化的方式进行改造, 建立了基于方位离散的线性化屈服准则, 同时在屈服准则中考虑了张拉破坏准则, 并引入伪黏聚力, 保证在每一个离散方位平面上既不违背屈服准则, 又不违背张拉破坏准则, 建立了同时考虑张拉及剪切破坏的下限原理有限元法。算例表明了该方法的有效性, 同时也证明了仅考虑剪切破坏时, 会过高地估计边坡的安全系数。

关 键 词: 边坡稳定性分析; 下限有限元法; 方位离散; 张剪破坏

中图分类号: TU 433

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 7598 (2016) 08 - 2426 - 07

Lower bound finite element method for analyzing tenso-shear failure of slopes

GAO Ru-chao^{1,2}, LI Chun-guang¹, SUN Cong¹, ZHENG Hong¹, GE Xiu-run¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China;

2. National Enterprise Technology Center, CCCC Second Harbour Engineering Co., Ltd., Wuhan, Hubei 430040, China)

Abstract: The failure modes of slopes include not only the shear failure but also the tensile failure, especially in the back of frontier of slopes. The traditional yield criterion of Mohr-Coulomb is difficult to deal with the shear failure with the tensile crack modes in the lower bound limit analysis. The paper reformulates the yield criterion of Mohr-Coulomb with respect to the linearized spatial discretization in the lower bound limit analysis based on finite element method. Meanwhile, a pseudo cohesion is introduced to assure that neither the Mohr-Coulomb yield criterion nor the tensional failure criterion is violated, and a lower bound limit finite element method is developed for analyzing the tenso-shear failure of slopes. The numerical examples illustrate the validity of the proposed method, while showing that if only the shear failure is considered, the factor of safety would be overestimated in the slope stability analysis.

Keywords: slope stability analysis; lower bound finite element method; spatial discretization; tenso-shear failure

1 引 言

边坡失稳破坏是岩土工程中常遇到的问题之一, 目前对于边坡的稳定性分析方法主要有极限平衡法、极限分析法、有限元强度折减法、矢量和法等, 然而这几种分析方法都有一定的适用性。在岩土工程中, 常用的屈服准则为 M-C 屈服准则, 该准则对于边坡发生剪切破坏的模拟是适用的, 但很难模拟既发生剪切破坏又发生张拉破坏的情况。Griffiths^[1]和 Duncan^[2]等采用不考虑张拉的 M-C 屈服准则来

分析边坡的稳定性; Dawson^[3]等同样仅考虑剪切采用强度折减法得到边坡的安全系数。实际上, 由于边坡在破坏过程中大多出现张拉裂缝, 对于边坡的破坏准则更为合理的是, 同时考虑张拉与剪切的复合屈服准则。戴自航等^[4-6]将张拉破坏准则引入到强度准则中, 采用有限元强度折减法来分析边坡的稳定性, 结果表明, 若不考虑张拉破坏, 则得到的边坡安全系数会偏高至少 1%。

由于下限原理有限元法具有严谨的力学基础, 且得到的安全系数偏于安全, 更具有实用价值, 因

收稿日期: 2014-10-16

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目 (No. 2011CB013505)。

This work was supported by the National Program on Key Basic Research Project of China (973 Program) (2011CB013505).

第一作者简介: 高如超, 男, 1987 年生, 硕士, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: gaoruchao11@mails.ucas.ac.cn

此，本研究采用该方法对边坡的稳定性进行研究。在 20 世纪 50 年代，Drucker 等^[7]基于极值原理提出了土体极限分析理论，该理论最大的优点是不用考虑土体破坏的本构关系，而直接研究土体的极限状态。Chen^[8]进一步阐明并发展了极限分析理论在土工问题中的应用。然而对于下限问题，静力许可应力场的构造是最困难的，在 1970 年，Lysmer^[9]第一次将数学的线性规划理论引入到下限问题，并将有限元三角形网格剖分理论应用到下限理论，用于分析平面应变问题，用内接正多边形不断地逼近 M-C 屈服面，等效为线性化的屈服准则，解决了应力场的构造问题。澳大利亚学者 Sloan^[10-11]，分别于 1988 年和 1989 年提出了基于屈服准则线性化的上限有限元法和下限有限元法，推动了极限分析理论在工程中的应用。近年来，国内学者，杨洪杰^[12]和黄齐武^[13]以及陈炜^[14]等都对极限分析理论做出了突出贡献，从算法上对极限分析理论进行了深入的研究。李春光等^[15-17]将四边形网格单元引入到下限分析中，并在积分意义上建立平衡方程的弱形式，从而得到线性的平衡方程，比三角形单元更有优势，求解效率大幅提高；并且提出了基于空间离散方位的 M-C 屈服准则线性化方案，该方案比经典的 M-C 内接多边形线性化更有优势，可以方便地考虑各向异性及张拉条件。本研究在相关研究成果的基础上，既考虑剪切破坏条件也考虑张拉条件。

2 下限理论

静力许可应力场是指在求解区域 V 内满足静力平衡方程，并处处不违背屈服条件，以及在应力边界 S_T 上满足应力边界条件的应力场。根据塑性力学极限分析指出，所有静力许可应力场对应的外载荷一定不大于真实的极限载荷，亦即静力许可应力场对应的外载荷从下侧逼近真实的极限载荷，因此，该理论被称之为下限理论。

所以，可以在所有静力许可应力场中寻找最大的极限荷载，该问题为一数学规划问题。可以表达为

$$\begin{aligned} & \max : \eta \\ & \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{在域内} \\ \sigma_{ij} n_j = \eta \bar{T}_i & \text{在边界上} \\ F(\sigma_{ij}) = 0 & \text{在域内} \end{array} \right. \quad (1) \end{aligned}$$

式中： η 为荷载乘子； F_i 为单位体积上的体积力向量； \bar{T}_i 为应力边界上给定的面力； $F(\sigma_{ij})$ 为屈服条件。

3 下限应力场的有限元构造

3.1 四边形单元的平衡方程

本研究借助于有限元网格剖分的思想，采用比三角形单元求解效率更高的双线性四边形单元进行区域离散，并采用单元积分，建立平衡方程的弱形式，从而在单元意义上满足平衡方程。

四边形单元中应力的插值模式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_1^4 N_i \sigma_x^i \\ \sigma_y &= \sum_1^4 N_i \sigma_y^i \\ \tau_{xy} &= \sum_1^4 N_i \tau_{xy}^i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： σ_x^i 、 σ_y^i 、 τ_{xy}^i 为四边形单元每个节点的 3 个应力分量； N_i 为四边形单元的形函数。

平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中： γ 为材料的重度。

将式 (2) 带入到式 (3)，可得

$$[B^e] \{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (4)$$

式中： $[B^e] = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$ ，

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4。$$

为了使得 B 为常矩阵，在单元内对式 (4) 积分得

$$[\bar{B}^e] \{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} [\bar{B}^e] &= \iint [B^e] dA \\ \{b^e\} &= \iint \{b^e\} dA \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

经过积分后得到的 $[\bar{B}^e]$ 和 $\{b^e\}$ 为常矩阵和常矢量，便于在程序中实现。

3.2 应力连续性条件

构造的静力许可应力场应在单元之间的公共边上满足应力连续性条件，即保证正应力和剪应力相等，如图 1 所示。

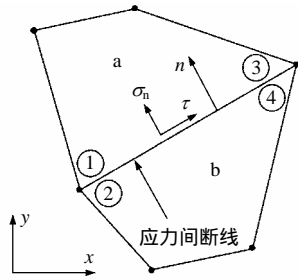


图1 相邻单元应力连续条件
Fig.1 Stress continuous condition between adjacent elements

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n^a &= \sigma_n^b \\ \tau^a &= \tau^b \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中：a、b 分别为相邻的两个单元，参考文献[16]得

$$[A_{eq}^d] \{\sigma^d\} = 0 \quad (8)$$

式中： $[A_{eq}^d] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$ ， n_x 、 n_y 为间断线的外法向向量。

$$\{\sigma^d\} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \tau_{xy}^a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x^b \\ \sigma_y^b \\ \tau_{xy}^b \end{bmatrix} \right\} \quad (9)$$

3.3 应力边界条件

在应力边界处需要满足已知的应力边界条件

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_n \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} \quad (10)$$

3.4 基于离散方位的线性化 M-C 屈服条件

要保证材料不屈服，需要保证在每一个离散方位后都不屈服，同时随着离散边数的增加，结果是不断地逼近真实解的。如图 2 所示，采用拉正压负的规定，以 x 轴为基准，从 0 到 π 分为 n 等份，则第 k 个离散方位与 x 轴的夹角为

$$\alpha_k = k \frac{\pi}{n} \quad (11)$$

离散后得到该方位的外法向向量和切向向量分别为

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

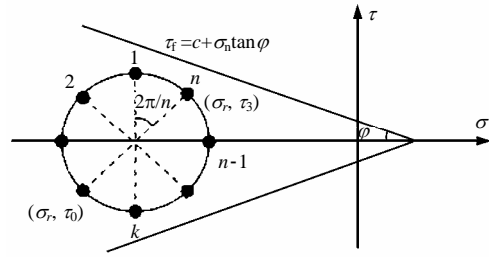


图2 Mohr 圆的空间离散
Fig.2 Spatial discretization of Mohr circle

该离散面上正应力与剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \vec{n}^T \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \\ \tau &= \vec{t}^T \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$ 。

此时，得到离散后 M-C 屈服条件为

$$|\tau| \leq \sigma_n \tan \phi + c \quad (15)$$

式中： c 、 ϕ 分别为黏聚力和摩擦角。并且得到的法向应力和剪应力都为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的线性函数。

在将屈服条件进行线性化时，难以保证每一个离散方位都处于屈服面之内，在局部仍有部分方位于屈服面之外，为了保证下限的性质，参考文献[17]，将黏聚力 c 表述为

$$c' = c \cos \frac{\pi}{n} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tan \phi \left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \quad (16)$$

式中： c' 称为伪黏聚力，带入到式 (15) 中得

$$|\tau| \leq \sigma_n \tan \phi + c' \quad (17)$$

4 张拉条件

在强度条件中考虑张拉破坏时，则应满足

$$\sigma_n \leq [\sigma_t] \quad (18)$$

式中： $[\sigma_t]$ 为许可张拉应力，当 $[\sigma_t]$ 取 0 时，即为无拉应力条件。

若材料为无拉应力时，则离散之后的无拉应力条件表示为

$$\sigma_n \geq 0 \quad (19)$$

5 算例

5.1 算例 1

该算例取自文献[18]，该边坡为一均质边坡，坡度为 45° ，坡高为 20 m，土重度 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ，

黏聚力 $c = 42 \text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\varphi = 17^\circ$ ，底边固定约束，侧面法向约束，边坡的网格划分如图 3 所示。表 1 为不同方法计算的安全系数。

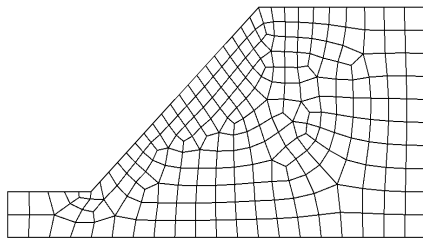


图 3 算例 1 网格划分
Fig.3 Meshing of example 1

表 1 不同方法计算的安全系数结果比较
Table 1 Safety factors of different methods

破坏类型	有限元强度折减法 ^[18]	有限元强度折减法 ^[6]	上限有限元法	本文下限有限元法
M-C 剪切破坏	1.120			0.997
张拉-剪切复合破坏		1.060	1.061	0.978

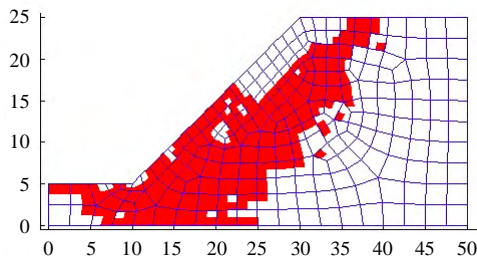


图 4 不考虑张拉的塑性区分布
Fig. 4 Distribution of plastic field without considering tensile failure

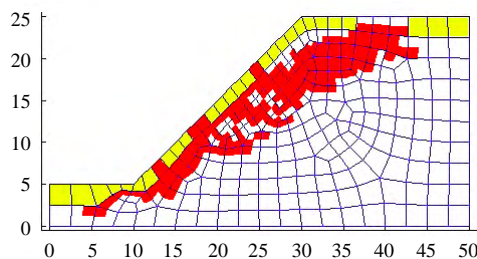


图 5 考虑张拉的塑性区分布 (黄色区域为张拉塑性区)
Fig.5 Distribution of plastic field considering tensile failure(the yellow zone is the tensile plastic field)

从表可以看出，本文采用的下限有限元法得到的安全系数是小于有限元强度折减法得到的安全系数，这也说明了下限解是偏于安全的。同时可以看

出，若考虑张拉-剪切复合破坏，则得到的安全系数为 0.978，是小于不考虑张拉时得到的安全系数 0.997 的，仅考虑剪切破坏时比考虑张拉-剪切复合破坏时偏高 2%。在实际工程分析中，若单纯地仅考虑剪切破坏则会高估了边坡的安全性。

如图 4 所示，不考虑张拉时的塑性区贯通出现在坡顶距离边坡 5.6 m 处，塑性区向坡脚处延伸贯通；在图 5 中可以看出，若是在强度条件中考虑张拉条件，则塑性区出现在距离边坡 4.7 m 处，并向坡脚处延伸贯通。当考虑张拉时，坡顶土体一旦出现张拉现象，则土体达到强度条件，因此，得到的强度折减系数低于仅考虑剪切破坏计算得到的强度折减系数。

5.2 算例 2

该算例取自文献[6]，该边坡为一含有软弱夹层的层状边坡，一级边坡坡高 8 m，坡比 1:1，二级边坡坡高 10 m，坡比为 1:0.75，软弱夹层厚度为 1.5 m，边坡示意图如图 6 所示，各层土工参数如表 2 所示，底边固定约束，侧面法向约束，边坡的网格划分如图 7 所示。

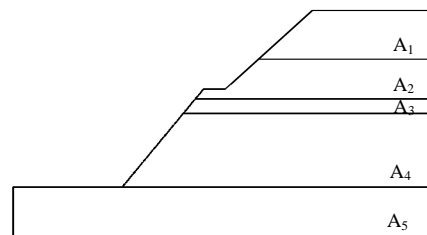


图 6 算例 2 边坡模型示意图
Fig.6 Sketch map of example 2

表 2 算例 2 物理力学参数

Table 2 Physical and mechanical parameters of example 2

土层编号	γ / (kN/m ³)	E / MPa	μ	c / kPa	φ / (°)
A ₁	18.8	12.0	0.30	27.3	13.6
A ₂	19.0	12.0	0.30	22.4	13.6
A ₃	16.5	2.1	0.42	15.6	8.7
A ₄	19.0	12.0	0.30	23.9	23.2
A ₅	19.0	15.0	0.28	34.4	29.8

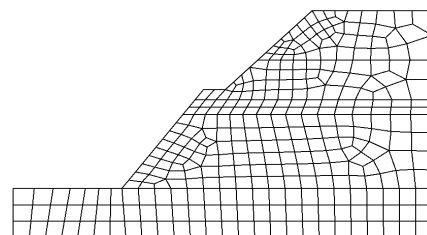


图 7 算例 2 边坡网格划分
Fig.7 Meshing of example 2

表 3 不同方法安全系数计算结果比较
Table 3 Safety factors of different methods

破坏类型	有限差分法 FLAC ^[6]	有限元强度折减法 ^[6]	上限有限元法	本文下限有限元法
M-C 剪切破坏			1.067	0.955
张拉-剪切复合破坏	1.010	1.050	1.036	0.931

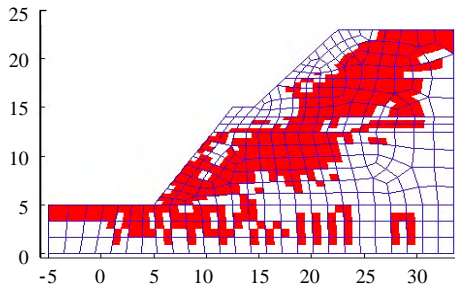


图 8 不考虑张拉的塑性区分布

Fig.8 Distribution of plastic field without considering tensile failure

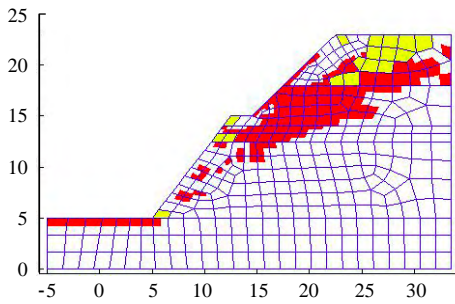


图 9 考虑张拉的塑性区分布 (黄色区域为张拉塑性区)

Fig.9 Distribution of plastic field considering tensile failure (the yellow zone is the tensile plastic field)

该边坡为软弱夹层 A₃ 的层状边坡,得到的解如表 3 所示,可以看出,本文的下限有限元法得到的安全系数是小于有限元强度折减法、有限差分法以及上限有限元得到的安全系数,再次说明了该方法是偏于安全的,而且考虑张拉-剪切复合破坏时得到的解为 0.931,比仅考虑剪切破坏时的解 0.955 结果低 2.5%。边坡的破坏模式不是单一的剪切破坏,而是受到张拉与剪切的共同作用的张拉-剪切复合破坏模式。

如图 8 和图 9 所示,仅考虑剪切时塑性区出现在坡顶距边坡 3.9 m 处,并延伸贯通,若考虑张拉条件时,坡顶的塑性区出现在距离边坡 3.2 m 处,由于存在软弱夹层 A₃,使得塑性区不会贯通至坡脚,而是贯通软弱夹层,在软弱夹层中出现破坏。

5.3 算例 3

该算例取自文献[19],为日本著名边坡稳定分析考题,模型尺寸见图 10,计算区域由倾斜分布的

3 层土构成,中间层为强度较弱的厚层软土,各层土的物理力学参数见表 4。而且很多学者也对其进行过研究^[20]。底边固定约束,侧面法向约束,网格划分如图 11 所示。

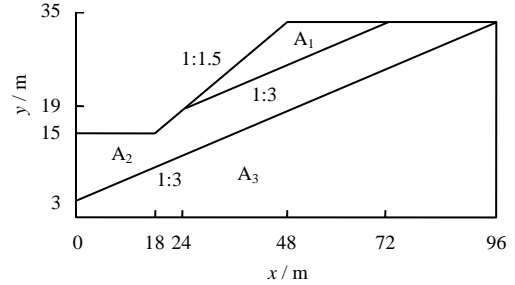


图 10 算例 3 模型尺寸

Fig.10 Calculation model of slope 3

表 4 算例 3 物理力学参数

Table 4 Physical and mechanical parameters of example 3

土层编号	γ /(kN/m ³)	E /MPa	μ	c /kPa	ϕ /(°)
A ₁	18.82	10.0	0.35	29.4	12
A ₂	18.82	10.0	0.35	9.8	5
A ₃	18.82	10.0	0.35	294.0	40

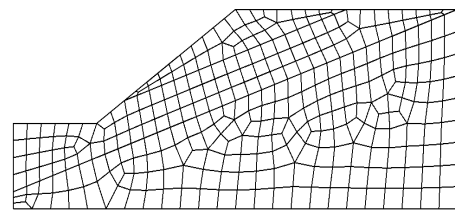


图 11 算例 3 边坡网格划分

Fig.11 Meshing of example 3

表 5 不同方法安全系数计算结果比较

Table 5 Safety factors of different methods

破坏类型	Conjugate Gradient 法 ^[19]	RST-2 法 ^[19]	有限元法 ^[6]	有限差分法 ^[6]	上限有限元法	本文下限有限元法
M-C 剪切破坏	0.405	0.401	0.417		0.441	0.401
张拉-剪切复合破坏				0.390	0.400	0.386

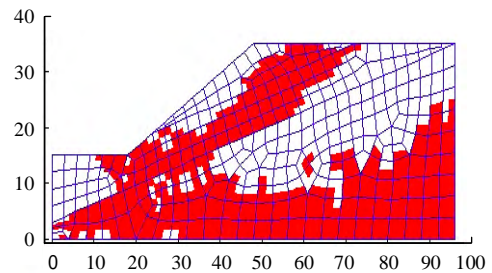


图 12 不考虑张拉的塑性区分布

Fig.12 Distribution of plastic field without considering tensile failure

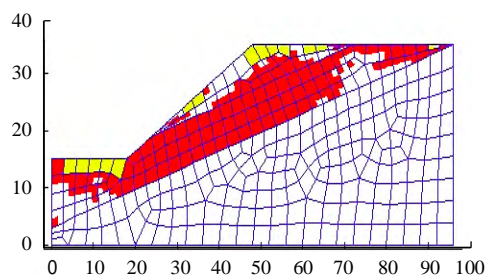


图 13 考虑张拉的塑性区分布 (黄色区域为张拉塑性区)
Fig. 13 Distribution of plastic field considering tensile failure (the yellow zone is the tensile plastic field)

表 5 给出了各种分析方法得到的安全系数，可以看出，本文法得到的安全系数小于其他的方法，说明下限法是收敛于真值解的，但不会超过真解。同时可以得到，本文的下限有限元法考虑张拉-剪切复合破坏时得到的安全系数为 0.386，仅考虑剪切破坏时得到的安全系数为 0.401，两者相差 3.7%。在边坡的稳定性分析中，不仅要考虑材料剪切强度的控制，也要考虑材料张拉强度的控制，尤其是岩土体材料，往往抗拉能力比较低，在实际分析中，要侧重对张拉能力的研究。

从图 12、13 中可以看出，仅考虑剪切时，塑性区出现在距离边坡 7.5 m 处，并延伸至坡脚发生剪切破坏，当考虑张拉时，塑性区沿着中间强度较弱的土层贯通，并向坡脚延伸发生破坏，从图中可以得到，仅考虑剪切和同时考虑张拉与剪切时的破坏模式是不同的，并且考虑张拉时得到的强度折减系数低于仅考虑剪切时得到的强度折减系数。

6 结 论

(1) 首先本文提出的下限原理有限元法的 M-C 屈服条件是采用基于离散方位的线性化形式，是不同于经典的内接多边形或外接多边形来逼近 Mohr 圆的形式，有几个方面的优势：一是离散后平面上的正应力为单元节点应力变量的线性形式，不仅方便地进行线性化，还可以很方便地考虑材料的张拉强度，而经典的离散化方法是很难通过线性化实现的；二是离散后平面上剪应力也是关于单元节点应力变量的线性形式，可以容易地考虑材料各向异性的特性。

(2) 对于边坡的稳定性分析，不仅要考虑边坡发生剪切破坏，也要考虑边坡发生张拉破坏。实际工程中，边坡发生滑动破坏时，在滑坡床是发生剪切破坏，而在滑坡体的上缘往往是受到张拉作用的，因此，在分析中，要侧重对张拉的研究，尤其是岩

土类材料抗拉性能往往较低。

(3) 从上面的几个算例中可以看出，若不考虑张拉破坏，则得到的结果是偏高至少 2%，从而高估了边坡的安全稳定性；考虑张拉的塑性区的分布和仅考虑剪切时塑性区的分布是有差异的，有不同的破坏模式。

参 考 文 献

- [1] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [2] DUNCAN J M. State of the art: Limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, 1996, 122(7): 577 - 595.
- [3] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. *Geotechnique* 1999, (6): 835 - 840.
- [4] 戴自航, 卢才金. 边坡失稳机制的力学解释[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(10): 1191 - 1197.
DAI Zi-hang, LU Cai-jin. Mechanical explanations on mechanism of slope stability[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(10): 1191 - 1197.
- [5] 戴自航, 周瑞忠, 卢才金. 土体材料屈服准则及试验和数值分析应力路径探讨[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(7): 968 - 976.
DAI Zi-hang, ZHOU Rui-zhong, LU Cai-jin. Discussions on yield criterions and stress paths of soils in tests and numerical analyses[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(7): 968 - 976.
- [6] 戴自航, 刘志伟, 刘成禹, 等. 考虑张拉与剪切破坏的土坡稳定数值分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2008, 27(2): 375 - 382.
DAI Zi-hang, LIU Zhi-wei, LIU Cheng-yu, et al. Numerical analysis of soil slope stability considering tension and shear failures[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(2): 375 - 382.
- [7] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1952, 10(2): 157 - 165.
- [8] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975: 543 - 605.
- [9] LYSMER J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics[J]. *Journal of Soil Mechanics &*

- Foundations Division**, 1970, 96(4): 1311 - 1334.
- [10] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1988, 12(1): 61 - 67.
- [11] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1989, 13(3): 263 - 282.
- [12] 杨洪杰, 葛修润, 王建华, 等. 序列二次规划(SQP)算法在三维下限分析中的应用[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 992 - 995.
YANG Hong-jie, GE Xiu-run, WANG Jian-hua, et al. Application of SQP algorithm in 3D lower sequential quadratic programming limit analysis[J]. **Journal of Shanghai Jiaotong University**, 2004, 38(6): 992 - 995.
- [13] 黄齐武, 黄茂松, 王贵和. 基于下限有限元法的条形浅基础极限承载力分析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(4): 572 - 579.
HUANG Qi-wu, HUANG Mao-song, WANG Gui-he. Calculation of bearing capacity of strip footings using lower bound limit method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(4): 572 - 579.
- [14] 陈炜, 王均星. 节理岩质边坡的块体元塑性极限分析下限法[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(2): 272 - 277.
CHEN Wei, WANG Jun-xing. Plastic lower bound limit analysis using block element method for jointed rock slope[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2008, 30(2): 272 - 277.
- [15] 李春光, 朱宇飞, 刘丰, 等. 基于四边形网格的下限原理有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(3): 461 - 468.
LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, et al. Lower bound limit analysis using finite element method of quadrilateral meshes[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2012, 31(3): 461 - 468.
- [16] 李春光, 朱宇飞, 刘丰, 等. 下限问题中基于四边形单元平衡方程的边界积分法[J]. 工程力学, 2013, 30(8): 127 - 132.
LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, et al. Boundary integral method for equilibrium equations of lower bound problems based on quadrilateral elements[J]. **Engineering Mechanics**, 2013, 30(8): 127 - 132.
- [17] 李春光, 朱宇飞, 刘丰, 等. 下限问题中新的摩尔-库仑屈服面线性化方法[J]. 力学学报, 2013, 45(2): 245 - 250.
LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, et al. A new linearization method of mohr-coulomb yield surface for lower bound problems[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2013, 45(2): 245 - 250.
- [18] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343 - 346.
ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis of factor of safety of slope by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(3): 343 - 346.
- [19] GRECO V R. Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(7): 517 - 525.
- [20] ARAI K, TAGYO K. Determination of noncircular slip surface giving the minimum factor of safety in slope stability analysis[J]. **Soils and Foundations**, 1985, 25(1): 43 - 51.