

DOI : 10.16285/j.rsm.2016.01.030

基于自适应松弛 Picard 法的高效 非饱和渗流有限元分析

李文涛, 马田田, 韦昌富

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 有效地模拟非饱和渗流过程对土质边坡稳定性分析、土石坝渗流、污染物迁移等众多领域有着重要的意义。描述非饱和渗流的 Richards 方程是具有强烈非线性的偏微分方程, 通常需要采用有限元等数值方法并结合有效的迭代方法进行求解。Picard 迭代法是实用的非线性计算方法, 在非饱和渗流领域应用广泛, 但经常会出现收敛震荡、速度缓慢和精度降低的问题。为提高计算性能, 结合有限元法提出了一种高效的自适应松弛 Picard 法。通过模拟一维和二维渗流算例, 并与传统方法的结果进行对比, 对算法和程序的准确性、高效性和鲁棒性进行了验证。测试结果表明, 该方法可以在保证计算精度的同时有效地减少数值震荡, 提高收敛速度。研究成果对非饱和渗流有限元程序的开发和应用有一定的参考价值。

关 键 词: 非饱和渗流; 有限元; Picard 法; 自适应松弛; 非线性

中图分类号: TV 139.16

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 7598 (2016)01 - 0256 - 07

An efficient finite element procedure for unsaturated flow based on adaptive relaxed Picard method

LI Wen-tao, MA Tian-tian, WEI Chang-fu

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: Effectively simulating unsaturated flow is of great significance in many areas such as the soil slope stability analysis, seepage of earth-rockfill dam, contaminant transport. Due to the strongly nonlinear characteristics of Richards equation for the unsaturated flow, numerical solution schemes such as the finite element method with an efficient iterative algorithm usually have to be employed. Picard method as a practical nonlinear iterative method is widely applied to the unsaturated flow field; but usually suffers from convergence oscillation, slow convergence rate and inaccurate solution. In order to improve the computing performance, an efficient finite element procedure based on the adaptive relaxed Picard method is developed. Through the simulations of 1D and 2D unsaturated seepage problems, accuracy, efficiency and robustness of the proposed procedure are validated by comparing with the traditional methods. It is shown that the adaptive relaxed Picard method can effectively reduce the convergence oscillation and significantly improve the convergence rate with the accuracy guaranteed. The proposed procedure provides a helpful reference for the program development and application to unsaturated flow.

Keywords: unsaturated flow; finite element method; Picard method; adaptive relaxation; nonlinearity

1 引 言

许多岩土工程问题涉及到非饱和渗流过程, 如降雨入渗或地下水变化时土质边坡与堤坝的稳定性评价, 垃圾填埋场内部污染物质的运移模拟, 冻土中相变发生时的渗流过程分析, 高放核废料的地质

深埋处理等。因此, 有效地模拟和分析非饱和渗流过程有着重要的实际意义, 它一直是岩土工程、水利工程、环境工程中的一项热门研究课题。

Richards 方程是非饱和渗流理论的基本方程, 通常需要采用有限元等数值方法并结合有效的迭代方法进行求解。由于持水特征曲线和渗透率函数的

收稿日期: 2014-05-20

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 51239010, No. 11302243)

This research was supported by the National Natural Science Foundation of China (51239010, 11302243).

第一作者简介: 李文涛, 男, 1989 年生, 博士研究生, 主要从事多场耦合有限元模拟方面的研究工作。E-mail: lwt@whrsm.ac.cn

通讯作者: 韦昌富, 男, 1966 年生, 研究员, 博导, 主要从事多孔介质理论及其工程应用研究。E-mail: cfwei@whrsm.ac.cn

强烈非线性特征，计算中经常出现迭代不收敛、计算误差大等问题。为了提高数值计算的效率和精度，国内外学者已经进行了许多有意义的工作。吴梦喜等^[1]和周桂云^[2]提出了饱和度对孔隙水压力偏导数的修正公式，以消除弥散现象，提高收敛速度。Pan 等^[3]提出采用变量变换算法，将非饱和渗流控制方程中的基本变量变换为其他变量，以降低方程的非线性程度，从而提高非线性迭代的收敛速度和计算精度。Williams 等^[4]对已有的变量变换算法进行了总结，并采用了一种新形式，取得了良好的计算效果。Tan^[5]、Phoon^[6]和陈曦^[7]等认为，震荡现象是由于渗透系数相对于渗流量的计算不协调造成的，采用前一时间步的结果和当前时间步内不同迭代步的结果构造欠松弛法，对迭代过程中的渗透系数进行修正，结果表明，不同的欠松弛法对求解精度和计算效率具有显著的影响。吴梦喜^[8]采用针对时间域离散的积分方法以及集中质量矩阵技术来改善 Richards 方程有限元求解的性能。Miller 等^[9]将误差控制的自适应策略同时应用于 Richards 方程的空间离散和时间差分，提出了空间和时间自适应求解方案。

上述提到的方程参数修正法、变量变换技术、时域积分方案以及空间和时间自适应策略的性能都在很大程度上依赖于非线性迭代算法，这使得迭代算法的研究尤为重要。Picard 法是非饱和渗流领域应用十分广泛的算法，但收敛性经常难以得到保证，而引入松弛过程则是其显著提高收敛速度的有效途径^[10-11]。为了进一步提高计算效率和精度，本文结合有限元法提出了一种高效的自适应松弛 Picard 法，并开发了相应的计算程序 PorousH。通过模拟一维和二维非饱和渗流算例，并与传统方法的结果进行对比，对算法和程序的准确性、高效性和鲁棒性进行了验证。研究成果对非饱和渗流有限元程序的开发和应用有一定的参考价值。

2 Richards 方程及其有限元计算格式

以孔隙水压力水头 h 作为基本变量， $h = p / \gamma_w$ ， p 为孔隙水压力， γ_w 为水的重度。描述非饱和渗流问题的 Richards 方程可由下式表示：

$$n \frac{\partial S_r}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla^T [k_s k_r \nabla (h + z)] = 0 \quad (1)$$

式中： n 为多孔介质的孔隙率； S_r 为饱和度； t 为时间； k_s 为饱和渗透系数； k_r 为相对渗透系数；梯度算子 $\nabla = \{\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z\}^T$ ； z 为竖直方向的坐标，代表重力作用下的位置水头， $\nabla z = \{0, 0, 1\}^T$ 。孔隙水压力和相对渗透系数是饱和度的函数，它们

之间的关系通常需要根据试验数据进行拟合，目前已有多种通用模型可以描述，如广泛使用的 van Genuchten 模型^[12]、Brooks-Corey 模型^[13]等。

设多孔介质的空间体积为 Ω ，边界为 Γ ， \mathbf{n} 为多孔介质表面的单位法向量。在初始时刻，压力水头为 h_0 (in Ω)。在边界 Γ_h 上压力水头为定值 \bar{h} ，在边界 Γ_q 上流量为定值 \bar{q} ，则边界条件可表示如下。

(1) 强制边界条件

$$h = \bar{h} \quad (\text{on } \Gamma_h) \quad (2)$$

(2) 自然边界条件

$$q = -k_s k_r (\nabla h + \nabla z) \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_q) \quad (3)$$

取孔隙水压力水头的形函数为 N_h ，在空间域采用 Galerkin 法^[14]对式 (1) 进行离散化，并引入相应的边界条件 (2) (3)，可得空间半离散化的有限元方程组：

$$C \dot{X} + KX = F \quad (4)$$

式中： X 为基本变量 h 的节点变换向量，且 C 、 K 、 F 计算公式如下：

$$C = \int_{\Omega} N_h^T \left(n \frac{\partial S_r}{\partial h} \right) N_h d\Omega \quad (5)$$

$$K = \int_{\Omega} (\nabla N_h)^T k_s k_r (\nabla N_h) d\Omega \quad (6)$$

$$F = - \int_{\Omega} (\nabla N_h)^T k_s k_r (\nabla z) d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_h^T \bar{q} d\Gamma \quad (7)$$

采用差分法对时间域进行离散化，令

$$\dot{X} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t}, \quad X = \theta X_{i+1} + (1 - \theta) X_i \quad (8)$$

可得有限元迭代格式如下：

$$(C + \theta \cdot \Delta t K) X_{i+1} = [C - (1 - \theta) \cdot \Delta t K] X_i + \Delta t F_{i+\theta} \quad (9)$$

式中： i 为时间步数； Δt 为时间步长； θ 为积分常数，它的取值直接影响到解的精度和稳定性。 θ 分别为 0、1/2、2/3 和 1 时，分别指经典的向前差分、中心差分、Galerkin 差分 and 向后差分公式。为保证计算过程的稳定性，通常选取 $\theta = 1/2$ 。一般来说，中心差分法较向后差分法得到的结果精确，但向后差分在减小解的振荡方面较好^[14]。本文采用向后差分法。

3 非线性迭代方法

非饱和多孔介质的渗透系数和持水特征曲线具有强烈的非线性特征，对控制方程进行空间离散

和时间差分后,需要采用非线性迭代方法来求解每一时间步所对应的方程。常用的方法有Picard迭代法(也称为直接迭代法)和Newton迭代法。

Newton法在理论上具有二阶收敛的性质,但需要求解雅克比矩阵或其近似形式,对称性差,导致每个迭代步计算耗时较长。对于非饱和渗流这种强烈的非线性问题,标准的Newton法通常难以实现,只能采用修正的形式^[15]。此外,Newton法对迭代初始值较为敏感,如果偏差较大,极有可能出现不收敛的情况。

Picard法可以视为一种简化的Newton法,在理论上是线性收敛的,所以迭代次数较多。但它直接采用现有的系数矩阵,可以较好地保持对称性,在计算非饱和渗流问题时,通常每一迭代步的耗时仅为Newton法的一半^[11]。同时,Picard法还可以通过引入松弛过程有效地提高收敛速度^[10,16]。因此,在非饱和渗流领域Picard法得到了广泛的应用。

为了降低Picard法的迭代收敛过程中的震荡行为,提高计算性能,笔者提出一种高效的自适应迭代松弛方法。对于每一个时间步, C 、 K 、 F 均是 X 的非线性函数,引入Picard迭代,则有

$$A(X_{k,i+1})X_{k+1,i+1} = B(X_{k,i+1})X_i + \Delta t F_{k,i+\theta} \quad (10)$$

式中:下标 k 表示 $i+1$ 时间步下的迭代步数, $A(X_{k,i+1}) = C(X_{k,i+1}) + \theta \Delta t K(X_{k,i+1})$, $B(X_{k,i+1}) = C(X_{k,i+1}) - (1-\theta)\Delta t K(X_{k,i+1})$ 。

当相对误差 δ 达到容差 ε 时,迭代终止,即

$$\delta = \frac{\|X_{k+1,i+1} - X_{k,i+1}\|}{\|X_{k+1,i+1}\|} \varepsilon \quad (11)$$

式中: $\|\cdot\|$ 为2-范数。此时,令 $X_{i+1} = X_{k+1,i+1}$,准备下一时间步的计算。

当迭代初始值与真值偏差较大时,在迭代过程中Picard法会出现剧烈的数值震荡。为减少震荡,加快收敛速度,从每一时间步下的第2次迭代开始采用如下自适应松弛方法:

$$X_{k+1} \leftarrow X_k + \lambda_k (X_{k+1} - X_k); \lambda_k \in (0,1] \quad (12)$$

式中: λ 为松弛因子,其大小依据当前迭代步增量 ΔX 与上一迭代步增量 ΔY 之间的广义夹角 α 来调整:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\Delta X \cdot \Delta Y}{\|\Delta X\| \|\Delta Y\|}\right) \quad (13)$$

夹角 α 的大小反映了收敛的趋势,锐角时说明收敛情况较好,钝角时则预示着震荡的发生。因此,当夹角 α 为锐角时,可适当放大 λ ;为钝角时,则

应适当缩小 λ 。类似的思路曾用于求解非线性的冰盖演化方程^[17],但未对算法的计算性能进行深入的测试。经过大量前期试算,选用以下比较简单的形式就可以取得良好的计算效果:

$$\lambda_k = \begin{cases} \sqrt{2}\lambda_{k-1}, & \alpha < \pi/4 \\ \lambda_{k-1}, & \pi/4 < \alpha < \pi/2 \\ \lambda_{k-1}/\sqrt{2}, & \alpha > \pi/2 \end{cases} \quad (14)$$

由此容易看出,当 $\lambda \equiv 1$ 时,式(12)就完全退化为标准的Picard迭代法。

在每一个时间步中,自适应松弛算法的具体步骤总结如下:

(1) 计算初始化,令 $X_{0,i+1} = X_i$, $k=0$,并设定迭代终止阈值,即容差 ε 。

(2) 读取上一迭代步的结果 $X_{k,i+1}$,更新材料性质(饱和度 S_r 、相对渗透率 k_r),组装矩阵 C 、 K 、 F 。

(3) 求解线性化后的代数方程组,得到预测值 $X_{k+1,i+1}$ 和当前增量 $\Delta X = X_{k+1,i+1} - X_{k,i+1}$ 。

(4) 计算松弛因子 λ_k :如果 $k=0$,则 $\lambda_k=1$;如果 $k>0$,则读取上一迭代步增量 ΔY 和松弛因子 λ_{k-1} ,由式(13)、(14)求得 λ_k 。

(5) 修正当前迭代步的计算结果:令 $\Delta X = \lambda_k \cdot \Delta X$, $X_{k+1,i+1} = X_{k,i+1} + \Delta X$,并存储本迭代步增量 ΔX 和松弛因子 λ_k 。

(6) 计算误差 δ ,如果满足式(11),迭代终止,令 $X_{i+1} = X_{k+1,i+1}$,进入下一时间步的计算;否则,令 $k=k+1$,返回步骤(2),继续进行下一个迭代步。

4 数值评价

基于前述Richards方程的有限元格式和自适应松弛算法,采用Fortran语言自主研发了非饱和渗流程序PorousH。同时,它还包含与专业的前后处理软件GiD^[18]的通用接口,大大提高了前后处理的效率。经过大量测试,该程序可以有效地模拟多孔介质中二维和三维非饱和渗流问题。

4.1 一维均质土的非饱和渗流

Srivastava等^[19]给出了一维瞬态非饱和渗流问题的解析解。对于无限长的均质土层,设其厚度为 L ,底部对应地下水水位($h=0$),顶部为入渗边界,以入渗流量为 q_A 的稳定状态为初始状态,时间 $t>0$ 时入渗流量变为 q_B 。将持水特征曲线和渗透系数函数假设为压力水头 h 的自然指数形式:

$$S_r = S_r^{irr} + (1 - S_r^{irr})e^{Bh} \quad (15)$$

$$k_r = e^{\beta h} \quad (16)$$

式中： S_r^{irr} 为残余饱和度； β 为与土性相关的模型参数。模拟过程中的具体参数取值如表 1 所示。

表 1 一维入渗模型的参数
Table 1 Model parameters for 1D infiltration

L/m	n	$k_s/(m/h)$	β/m	S_r^{irr}	$q_A/(m/h)$	$q_B/(m/h)$
1.00	0.40	3.60×10^{-3}	10.00	0.15	0.00	3.60×10^{-3}

网格剖分采用 4 节点等参单元。为了保证计算精度的同时尽量减少网格数量，从下到上按 1.1:1 的比例进行网格局部加密，共使用了 40 个单元、80 个节点。通过改变时间步长，变化范围从 2 s 到 64 min，总共使用了 178 个时间步，得到的数值模拟结果如图 1、2 所示，可以看到与解析解符合得很好，而且无论在时间和空间域内，模拟结果都没有震荡现象发生，充分证明了算法和程序的有效性。

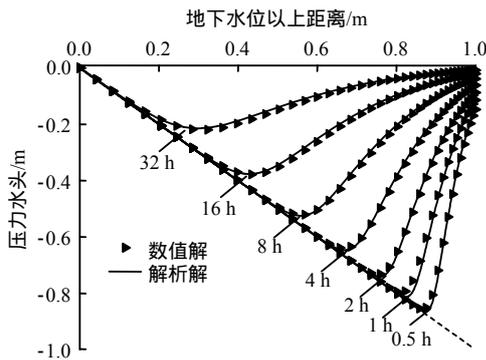


图 1 不同时刻孔隙水压力水头在竖直方向上的分布
Fig.1 Distributions of pressure head in the vertical direction at different moments

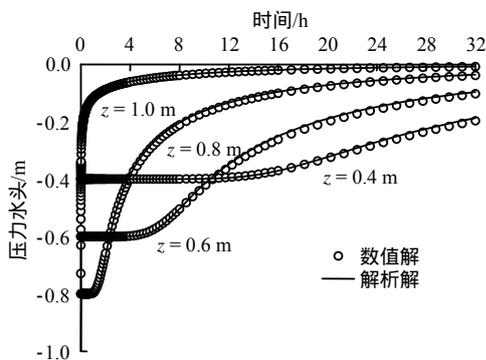


图 2 不同高度处孔隙水压力水头随时间的变化
Fig.2 Variation of pressure head with time at different heights

4.2 二维砂槽的非饱和渗流

Vauclin 等^[20]进行的二维室内渗流试验也是检验算法的典型试验。砂土的流动区域为 $6.00 \text{ m} \times$

2.00 m ，厚度为 0.05 m 的砂土，底部为不透水边界，两侧为自由排水边界。土体为颗粒分布很规则的河砂。初始水位为 0.65 m ，试验开始后在土槽顶部中间 1.00 m 的范围均匀施加 0.148 m/h 的降雨强度，共 8 h 。试验中对流动域内自由水面位置的变化等数据进行了测量。根据文献^[21]，该类砂土的孔隙水压力水头、相对渗透系数与饱和度之间的关系可以分别由 van Genuchten^[12]和 Mualem^[22]模型来描述：

$$S_r = S_r^{irr} + (1 - S_r^{irr})[1 + (-\alpha_v h)^{n_v}]^{-m_v} \quad (17)$$

$$k_r = \sqrt{S_e} [1 - (1 - S_e^{1/m_v})^{m_v}]^2 \quad (18)$$

式中：有效饱和度 $S_e = (1 - S_r) / (S_r - S_r^{irr})$ ； α_v 、 n_v 和 m_v 均为与土性相关的模型参数，通常可以取 $m_v = 1 - 1/n_v$ 。模拟过程中的具体参数取值见表 2。

表 2 二维入渗模型的参数
Table 2 Model parameters for 2D infiltration

n	$k_s/(m/h)$	α_v/m	n_v	m_v	S_r^{irr}
0.30	0.35	3.30	4.10	0.756	0.033

根据对称性从中线截取区域的右半部分进行计算，剖分为 755 个双线性四边形等参单元，共 806 个节点。计算过程中采用变化的时间步长，范围为 $10 \sim 360 \text{ s}$ 。收敛阈值取 10^{-8} ，每个时间步的收敛迭代次数均为 $2 \sim 10$ 次。

图 3 给出了不同时刻地下水位位置 ($h = 0$ 处) 模拟与试验结果的对比，两者吻合较好。选取入渗前沿的点 A (0, 2.0)、B(0, 1.6)、C(0, 1.2)、D(0.5, 1.6)、E(0.5, 1.2)和 F(1.0, 1.2)作为观察点，压力水头随时间变化的情况如图 4 所示。可以看到，随着入渗的进行，孔隙水压力逐渐上升，向正孔压发展，且整个变化过程是平滑和稳定的，进一步证明了算法和程序的有效性。

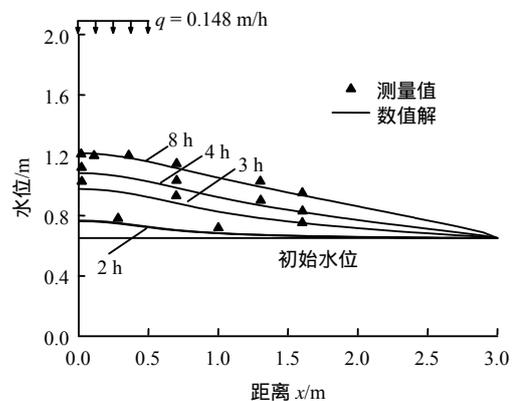


图 3 不同时刻地下水位位置模拟与试验结果对比
Fig.3 Comparisons between the calculated and experimental results at different time and positions of underwater level

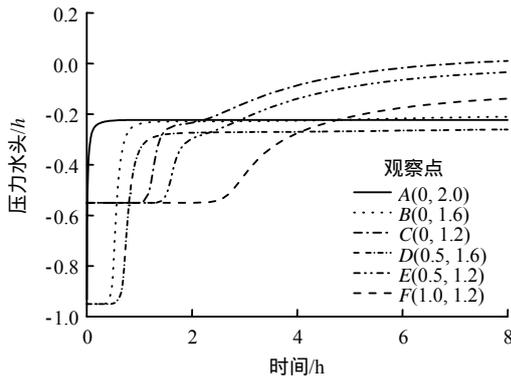


图4 6个典型观察点的压力水头随时间的变化
Fig.4 Variation of pressure head with time at six typical points

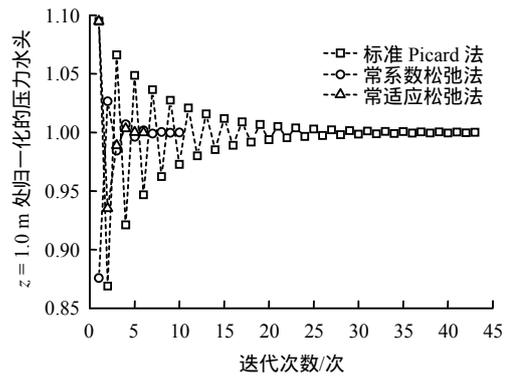


图5 标准 Picard 法、常系数松弛法和自适应松弛法的迭代收敛行为

Fig.5 Convergence behaviors of traditional, relaxed and adaptive relaxed Picard iteration

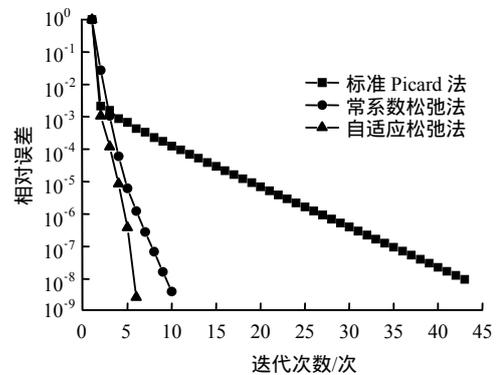
5 计算精度、效率和鲁棒性

对于瞬态问题，在给定边界条件下，第 1 个时间步偏离最终的稳定状态最大，迭代步数也相应最多，同时时间步长的选择也会显著影响迭代次数，时间步长越大，迭代次数越多。这里分别选取不同的时间步长，以 10^{-8} 为迭代终止阈值，对标准 Picard 法、常系数松弛法 ($\lambda = 0.8$) 和本文提出的自适应松弛法的收敛性进行对比分析。

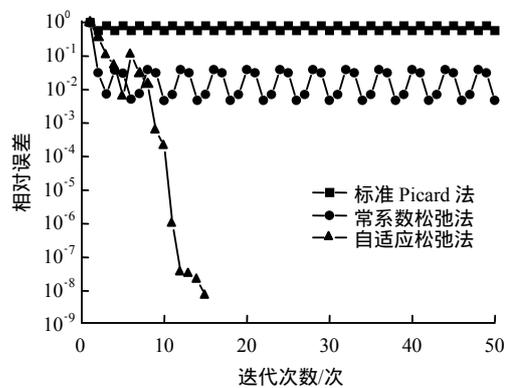
对于一维入渗模拟，取 1 m 高的位置为特征点，对第 1 个时间步迭代过程中压力水头的变化进行观察。当时间步长为 0.1 s 时，发现 3 种方法的收敛值相差小于 10^{-4} ，这表明自适应松弛法与其他两种方法在精度上是一致的。而在迭代次数方面，自适应松弛法迭代 6 次即可收敛，相对于标准 Picard 法的 43 次和常系数松弛法 11 次，效率分别提高了将近 6 倍和 1 倍。

图 5 给出了 3 种方法特征点处压力水头的收敛行为。为便于对比，对图中数据进行了归一化处理。观察发现，标准 Picard 法的结果围绕收敛值发生了明显的震荡，且迭代前期振幅较大；而松弛方法有效地抑制了震荡，使迭代值迅速逼近真值，大大加快了收敛速度。同时可以看出，自适应松弛法较常系数松弛法降低震荡的效果更为显著。

以步长为 0.1 s 和 2.0 s 时第 1 个时间步的收敛情况为代表，图 6 对比了 3 种方法的全局相对误差随迭代次数的变化情况。当时间步长为 0.1 s 时，标准 Picard 法表现出线性收敛的性质，这与理论预测是一致的，而两种松弛方法则大大加快了误差的衰减速度，收敛速度明显提高。当时间步长为 2.0 s 时，标准 Picard 法、常系数松弛法均出现了循环震荡，无法进一步收敛，而自适应松弛法仅用了 15 个迭代步就达到了收敛阈值，充分表明了该方法是鲁棒和高效的。



(a) $\Delta t = 0.1$ s



(b) $\Delta t = 2.0$ s

图6 标准 Picard 法、常系数松弛法和自适应松弛法的相对误差随迭代次数的变化

Fig.6 Relative error of traditional, relaxed and adaptive relaxed Picard iteration with number of iterations

采用不同的时间步长重新对砂槽渗流试验进行模拟。表 3 给出了不同时间步长情况下 3 种方法运算效率的对比情况。

当采用较小的时间步长 (2 s) 时，自适应松弛法和常系数松弛法单个时间步的最大迭代次数相差不大，在 8 次左右，仅仅约为标准 Picard 法的一半。在总迭代次数方面，与标准 Picard 法相比，自适应松弛法也有明显的减少，而常系数松弛方法却略有

增加。原因在于当迭代初始值十分接近于收敛值时，尤其在模拟后期，2~3 次标准 Picard 迭代即可达到收敛阈值（如图 7 所示），这时常系数松弛法反而会起到过度松弛的反作用，而自适应松弛法通过自动调整松弛系数，较好地克服了这一缺点。

表 3 不同时间步长情况下自适应松弛法、常系数松弛法和标准 Picard 法计算效率的对比

Table 3 Comparison of the efficiency between traditional, relaxed and adaptive relaxed Picard iteration for different time steps

方法	模拟时间 /s	Δt /s	时间步数	最大迭代次数/次	总迭代次数	运算时间 /s
标准 Picard	100	2	50	19	153	15.24
		4		不收敛		
常系数松弛	100	2	50	8	158	16.40
		4	25	18	111	11.03
		8		不收敛		
自适应松弛	100	2	50	7	136	14.68
		4	25	7	87	9.12
		10	60	10	49	4.98
		600	20	30	9	133

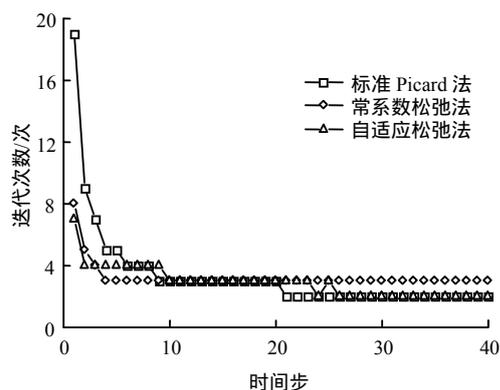


图 7 $\Delta t = 2.0$ s 时不同方法迭代次数随时间步的变化
Fig.7 Iterations of different methods with number of time steps at $\Delta t = 2.0$ s

随着时间步长的增大，标准 Picard 和常系数松弛法的最大迭代次数迅速增加，分别在步长为 4 s 和 8 s 时求解失败（单个时间步迭代超过 200 次，程序自动终止）。相反，自适应松弛法表现出了很好的鲁棒性，即使时间步长达到 30 s，最大迭代次数也只有 9 次，仍然能够保证迅速收敛。

通过以上对比不难看出，自适应松弛法无论在计算效率还是鲁棒性方面都比标准 Picard 法和常系数松弛法具有明显的优势。

值得注意的是，作为非线性迭代算法，自适应松弛 Picard 法可以与已有的针对 Richards 方程求解的方程参数修正法、变量变换技术、时域积分方案

以及空间和时间自适应策略等相结合，有望进一步提高现有算法和程序的求解性能，具有良好的应用前景。

6 结 论

本文结合有限元法提出了一种高效的自适应松弛 Picard 法，并通过一维和二维瞬态非饱和渗流算例进行了验证，结果表明：

(1) 标准 Picard 法对时间步长十分敏感，而常系数松弛法则略有改善，它们在迭代过程中都有可能出现循环震荡问题，无法达到收敛阈值，造成求解失败。

(2) 对于较大的时间步长，自适应松弛 Picard 法可以在保证计算精度的同时有效地减少数值震荡，明显提高收敛速度，是鲁棒和实用的。

(3) 当迭代初始值较为接近于收敛值时，常系数松弛法可能会起到过度松弛的反作用，而自适应松弛法通过自动调整松弛系数，较好地克服了这一缺点。

参 考 文 献

- [1] 吴梦喜, 高莲士. 饱和-非饱和土体非稳定渗流数值分析[J]. 水利学报, 1999, 30(12): 38 - 42.
WU Meng-xi, GAO Lian-shi. Saturated-unsaturated unsteady seepage numerical analysis[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1999, 30(12): 38 - 42.
- [2] 周桂云. 饱和-非饱和非稳定渗流有限元分析方法的改进[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(1): 5 - 11.
ZHOU Gui-yun. Improvement of finite element analysis of unstable saturated-unsaturated seepage[J]. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 2009, 29(1): 5 - 11.
- [3] PAN L, WIERENGA P J. A transformed pressure head-based approach to solve Richards' equation for variably saturated soils[J]. *Water Resources Research*, 1995, 31(4): 925 - 931.
- [4] WILLIAMS G A, MILLER C T, KELLEY C. Transformation approaches for simulating flow in variably saturated porous media[J]. *Water Resources Research*, 2000, 36(4): 923 - 934.
- [5] TAN T S, PHOON K K, CHONG P C. Numerical study of finite element method based solutions for propagation of wetting fronts in unsaturated soil[J]. *Journal of*

- Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2004, 130(3): 254 - 263.
- [6] PHOON K K, TAN T S, CHONG P C. Numerical simulation of Richards equation in partially saturated porous media: Under-relaxation and mass balance[J]. **Geotechnical and Geological Engineering**, 2007, 25(5): 525 - 541.
- [7] 陈曦, 于玉贞, 程勇刚. 非饱和渗流 Richards 方程数值求解的欠松弛方法[J]. **岩土力学**, 2012, 33(1): 238 - 243.
CHEN Xi, YU Yu-zhen, CHENG Yong-gang. Under-relaxation methods for numerical solution of Richards' equation of variably saturated flow[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(1): 238 - 243.
- [8] 吴梦喜. 饱和-非饱和土中渗流 Richards 方程有限元算法[J]. **水利学报**, 2009, 40(10): 1274 - 1279.
WU Meng-xi. Finite element algorithm for Richards' equation for saturated-unsaturated seepage flow[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2009, 40(10): 1274 - 1279.
- [9] MILLER C T, ABHISHEK C, FARTHING M W. A spatially and temporally adaptive solution of Richards' equation[J]. **Advances in Water Resources**, 2006, 29(4): 525 - 545.
- [10] DURBIN T, DELEMOS D. Adaptive under-relaxation of Picard iterations in ground water models[J]. **Ground Water**, 2007, 45(5): 648 - 651.
- [11] PANICONI C, PUTTI M. A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical solution of multidimensional variably saturated flow problems[J]. **Water Resources Research**, 1994, 30(12): 3357 - 3374.
- [12] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1980, 44(5): 892 - 898.
- [13] BROOKS R H, COREY A T. Properties of porous media affecting fluid flow[J]. **Journal of the Irrigation and Drainage Division**, 1966, 92(2): 61 - 90.
- [14] ZIENKIEWICZ O, TAYLOR R. The finite element method, volume 1: The basis[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [15] LI C. A simplified Newton iteration method with linear finite elements for transient unsaturated flow[J]. **Water Resources Research**, 1993, 29(4): 965 - 971.
- [16] HUYAKORN P S, SPRINGER E P, GUVANASEN V, et al. A three-dimensional finite-element model for simulating water flow in variably saturated porous media[J]. **Water Resources Research**, 1986, 22(13): 1790 - 1808.
- [17] DE SMEDT B, PATTYN F, DE GROEN P. Using the unstable manifold correction in a Picard iteration to solve the velocity field in higher-order ice-flow models[J]. **Journal of Glaciology**, 2010, 56(196): 257 - 261.
- [18] RIB R, DE RIERA PASENAU M, ESCOLANO E. Gid reference manual, pre and post processing system for FEM calculations[M]. Barcelona: International Center For Numerical Methods in Engineering(CIMNE), 2011.
- [19] SRIVASTAVA R, YEH T C J. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils[J]. **Water Resources Research**, 1991, 27(5): 753 - 762.
- [20] VAUCLIN M, KHANJI D, VACHAUD G. Experimental and numerical study of a transient, two-dimensional unsaturated-saturated water table recharge problem[J]. **Water Resources Research**, 1979, 15(5): 1089 - 1101.
- [21] CLEMENT T, WISE W R, MOLZ F J. A physically based, two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow[J]. **Journal of Hydrology**, 1994, 161(1): 71 - 90.
- [22] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. **Water Resources Research**, 1976, 12(3): 513 - 522.