

高周循环荷载作用过程中土体塑性包络的 弹塑性累积模型

贾鹏飞¹, 孔令伟²

(1. 西北大学 地质学系大陆动力学国家重点实验室, 陕西 西安 710069;

2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘要: 目前仍没有一个完整的理论框架既能合理描述土体的循环变形, 又能适合于高周循环计算与预测, 基于 Perzyna 黏塑性本构模型的理论框架, 将一定循环荷载增量内的累积塑性应变增量作为一个封装, 提出一个既反映高周循环荷载的特征, 又可任意选取积分步长的弹塑性累积模型。采用临界状态土力学的观点, 使用累积塑性体应变作为硬化参数并通过幂律的形式来描述塑性应变累积的大小, 在硬化准则的描述上, 引入反映平均应力影响因子来描述安定性应力水平的硬化过程; 另外, 在塑性应变累积方向的描述上, 采用平均应力状态下修正 Cam-clay 模型的流动准则。通过模型预测与循环三轴试验结果对比发现, 模型在模拟低应力水平下的塑性应变累积行为具有足够的精度, 对于高应力水平(尤其当平均应力水平接近或高于临界状态线时)的情况, 模型预测与试验结果有一定差距。

关键词: 土力学; 砂土; 塑性包络; 弹塑性; 累积模型; 高周循环荷载

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2015)12-2542-08

ELASTOPLASTIC ACCUMULATION MODEL FOR PREDICTING SOIL PLASTIC ENVELOPE DUE TO HIGH-CYCLIC LOADING

JIA Pengfei¹, KONG Lingwei²

(1. State Key Laboratory of Continental Dynamics, Department of Geology, Northwest University, Xi'an, Shaanxi 710069, China;

2. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: At present, there is no comprehensive theoretical framework that not only can describe reasonably the behaviour of normal cyclic deformation of soil, but is also suitable for its calculation and prediction at high-cyclic conditions, i.e., at large numbers of load cycles. In this paper, an elastoplastic accumulation model was developed which incorporates the characteristics of high-cyclic loading and allows a free selection of the integration step size. This model adopts the theoretical framework of Perzyna viscoplasticity and uses an accumulated plastic strain increment over a number of load cycles as a response envelope. Based on the general principles of critical state soil mechanics, the accumulated plastic volumetric strain was used as the hardening parameter to describe the size of the plastic strain accumulation using a power law. A factor representing the influence of average stress was introduced to describe the strain hardening process. In addition, the principles of the modified Cam-clay model at

收稿日期: 2014-10-20; **修回日期:** 2015-01-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41372314); 国家自然科学基金青年科学基金项目(41302219)

Fund projects: the National Natural Science Foundation of China(41372314); the National Natural Science Foundation for Young Scientists of China(41302219)

作者简介: 贾鹏飞(1981-), 男, 2012 年于中国科学院武汉岩土力学研究所岩土工程专业获博士学位, 现任讲师, 主要从事岩土体动力学理论及灾害防治方面的教学与研究工作。E-mail: pengfeijia@nwu.edu.cn

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2014.1422

the average stress state were used to describe the direction of the plastic strain accumulation. The developed model was calibrated with data from cyclic triaxial tests. It was found that the model can describe with a sufficient level of accuracy the plastic strain accumulation at low stress levels. However, there were some discrepancies between the model predictions and experimental results at high stress levels, especially when the average stress level was close to or higher than the critical state values.

Key words : soil mechanics ; sand ; plastic envelope ; elastoplastic ; accumulation model ; high-cyclic loading

1 引言

土体在循环荷载上万次以及数百万次的作用下由于循环效应会引起明显的塑性变形累积。如何建立合理的物理模型来计算和预测这种塑性变形累积行为越来越引起人们的兴趣。目前存在的各种模型都会有这样或那样的问题。由传统塑性理论发展而来的界面本构模型^[1]虽然突破了传统弹塑性理论的一些内在限制后而能够描述并预测在循环荷载作用下土体的动力学行为,然而在实际的应用中受制于循环次数的影响^[2-6],对于较低循环次数(例如循环荷载次数 $N < 50$)下土体的动力学行为描述还具有足够的精度,在高循环次数下,一些不可避免的系统误差累积就会变得非常重要,并且导致最终计算结果失真。这主要是由于在数值计算中时间步长太大、应力-应变关系中弹性恢复部分非守恒的计算误差所致^[4]。

A. Suiker 等^[7-8]对铁路轨道路基在高周循环荷载作用下沉降预测及评价的研究中提出了颗粒土长期循环行为的压密模型。该模型与经典的 Perzyna 黏塑性本构模型^[9-10]类似,采用一个过应力函数来描述在循环荷载作用过程中的最大塑性变形的包络响应,采用较大的积分步长来计算相对较大循环荷载增量下的塑性应变累积,适合描述高周循环荷载作用过程中的长期累积行为。事实上,该观念已经在金属的疲劳分析和建模中得到了应用^[11]。但是,该模型存在的问题在于,采用剪切硬化和体积硬化双硬化模式来分别描述由于摩擦滑动和体积压缩引起的土体循环塑性变形行为,双硬化函数的表达式由试验拟合得到,没有明确的物理意义,难以准确确定。并且该模型虽然给出了剪胀性表达式,但是在实际的计算中并未考虑。张宏博^[12]在考虑砂土等细颗粒材料复杂的应力-剪胀性特征及应变硬化规律的基础上,对 Suiker 循环压密模型进行了改造,将其应用于砂土等细颗粒材料在长期循环荷载作用下的累积变形计算。

近年来, Ruhr-Bochum 大学的研究者们通过大

量的试验研究提出 Bochum 试验累积模型^[4, 13]。与 Suiker 循环压密模型不同的是,该模型采用张量的形式,并且考虑各种影响因素对塑性应变累积的影响,改善了早期各种经验模型过于简单化、未能有效模拟复杂循环荷载作用下的动力学行为的缺点。该模型采用显式的计算格式,能够有效地模拟高周循环荷载作用过程中的长期累积行为。另一个重要的不同在于累积塑性变形的非零特征,不会碰到累积塑性变形的安定性问题,塑性变形会持续累积直到达到最小孔隙率。不足的地方在于,该模型需要大量的参数,这些参数需要通过大量的室内试验来标定^[13]。另外,还有一个不足之处在于,该模型必须结合滞洞模型来更新应变幅值的大小,很难在现有的有限元框架下独立使用,致使其应用受到限制^[14]。

总之,目前还没有一个完整的理论框架既能合理描述土体的循环变形特征,又能适用于高周循环荷载作用下的塑性应变累积行为的计算和预测。本文在 Suiker 循环压密模型和 Bochum 试验累积模型的基础上,提出更加合理的弹塑性累积模型来描述土体在高周循环荷载作用过程中的塑性应变累积行为。通过计算每一次循环荷载作用下的塑性变形增量的方法来计算塑性应变累积行为的模型并不可取,因为正如前面分析的那样,这种方法在数值计算中时间步长太大,由于不可避免的系统误差累积会导致计算结果失真。本模型借鉴 Suiker 循环压密模型的优点,采用一个过应力函数的形式来描述循环荷载作用下塑性应变增量的变化规律,不同的是,本模型采用临界状态土力学的观点,使用塑性体应变作为硬化参数来描述塑性应变累积的大小;借鉴 Bochum 试验累积模型中对塑性应变累积方向方面的研究成果,采用平均应力状态下修正 Cam-Clay 模型^[15]的流动准则来描述循环荷载作用下塑性应变累积的方向。

2 模型的提出

按照连续介质力学的观点,应力和应变均采用张量的标记和约定,不同的是,对于土体材料来说,

一般假设压应力和压应变为正值，拉应力和拉应变为负值。土体中的有效 Cauchy 应力张量和相应的应变张量分别记为 σ'_{ij} 和 ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)。为了方便起见，土力学中也经常使用球应力不变量(有效静水压力或平均应力) p' 和球应变不变量 ϵ_p ，以及偏应力不变量 q 和偏应变不变量 ϵ_q 。其定义分别为

$$p' = \sigma'_{ii} / 3 \tag{1}$$

$$\epsilon_p = \epsilon_{ii} \tag{2}$$

$$q = \sqrt{3s_{ij}s_{ji} / 2} \tag{3}$$

$$\epsilon_q = \sqrt{2e_{ij}e_{ji} / 3} \tag{4}$$

式中： s_{ij} ， e_{ij} 分别为偏应力张量和偏应变张量，分别定义为

$$s_{ij} = \sigma'_{ij} - p'\delta_{ij} \tag{5}$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_p\delta_{ij} \tag{6}$$

式中： δ_{ij} 为 Kronecker 符号， $i = j$ 时， $\delta_{ij} = 1$ ； $i \neq j$ 时， $\delta_{ij} = 0$ 。

2.1 应变分解

首先假设应变为小应变，在高周循环荷载作用过程中，塑性应变会不断累积，总的应变 ϵ_{ij} 可分解为一个可恢复的弹性应变 ϵ_{ij}^e 和一个不可恢复的累积塑性应变 ϵ_{ij}^{acc} (上标“acc”表示在循环荷载作用过程中塑性应变累积行为)，即

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{acc} \tag{7}$$

按照塑性流动理论的观点，应力和应变之间的演化规律通常用率形式来表示，此时式(7)可表示为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^{acc} \tag{8}$$

式(8)中率的形式不是对实际 Newton 时间的偏导数，而是把循环荷载作用过程看作为一个“连续”的过程，也就是说，假设循环荷载次数 N 为一个“连续”的变量，此处的“率”是对循环荷载次数的导数，即式(8)为如下形式：

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dN} = \frac{d\epsilon_{ij}^e}{dN} + \frac{d\epsilon_{ij}^{acc}}{dN} \tag{9}$$

2.2 弹性应变

假设材料的弹性行为是各向同性的，对于循环增量 dN ，弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 之间满足如下 Hooke 定律：

$$\frac{d\epsilon_{ij}^e}{dN} = \frac{1}{K} \frac{dp'}{dN} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \frac{ds_{ij}}{dN} \tag{10}$$

式中： K 为体积模量， G 为剪切模量。材料的刚度随着有效静水压力的增加而增加^[16]，为了能够反映这一特征，采取一个压力依赖的关系式来表示：

$$K = K_{ref} \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^{1-n} \tag{11}$$

式中： K_{ref} 为参考体积模量， p_{ref} 为参考静水压力， n 为模型参数。

式(10)表明材料的弹性应变是各向同性和时间独立的(此处是相对循环荷载次数来说的)，并且式(10)中弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 的第一项和第二项分别描述了弹性体应变增量 $d\epsilon_p^e$ 与弹性偏应变增量 $d\epsilon_q^e$ 和相应的应力不变量之间的关系：

$$d\epsilon_p^e = \frac{dp'}{K} \tag{12}$$

$$d\epsilon_q^e = \frac{dq}{3G} \tag{13}$$

式(10)~(13)似乎已经能够相对简洁地描述土体的弹性行为。从亚弹性理论的观点看，材料的密度能量函数可以只通过一个完全的静水压力加载路径来得到，而对于一个非比例加载路径，材料弹性响应可能会产生不完全恢复的情况^[17]。不管怎样，对于循环加载的应力路径，可以近似看作是比例加载的情况，非比例加载情况相对来说可能不是描述土体在循环荷载作用过程中弹性行为描述的重点^[16]。

2.3 累积塑性应变

首先，假设土体在高周循环荷载作用过程中的塑性应变累积过程是一个由累积塑性体应变控制的硬化过程。通过一个由循环荷载幅值控制的过应力函数来确定塑性应变的累积规律，采用 Perzyna 黏塑性本构模型的流动准则：

$$\frac{d\epsilon_{ij}^{acc}}{dN} = \langle \phi(f) \rangle m_{ij} \tag{14}$$

式中： $\phi(f)$ 为过应力函数，通过屈服函数 f 来确定； m_{ij} 为循环荷载作用过程中塑性应变累积的方向，通过塑性势函数 g 来确定； $\langle \phi(f) \rangle$ 为 Macauley 函数，其定义如下：

$$\langle \phi(f) \rangle = \begin{cases} \phi(f) & (f > 0) \\ 0 & (f \leq 0) \end{cases} \tag{15}$$

Perzyna 黏塑性本构模型在过去几十年里得到了广泛的研究并成功应用在黏性土的蠕变分析中^[18-20]。

A. Suiker^[7]对其进行简单的修正并用于颗粒土在长期循环荷载作用过程中的塑性应变累积分析中。

通过对砂土进行排水循环三轴试验发现，在循环荷载作用过程中，塑性应变累积的方向主要由平均应力率 $\eta'^{av} = q^{av} / p'^{av}$ (其中， q^{av} 为平均偏应力， p'^{av} 为平均静水压力)来控制，平均静水压力 p'^{av} ，应变循环圈(大小、形状、极化)、孔隙率、循环荷

载频率、静载预压以及颗粒级配曲线对其都不会产生太大的影响，随着循环荷载作用次数的增加，塑性应变累积的方向只是发生轻微的变化^[21-23]。T. Wichtmann 等^[23]指出，在高周循环荷载作用过程中，塑性应变累积的方向可以用修正 Cam-clay 模型的流动准则很好描述，如图 1^[23]所示。图 1 中， $p'^{av} = 200 \text{ kPa}$ ， $q^{ampl}/p'^{av} = 0.3$ ， q^{ampl} 为偏应力幅值， D 为增量形式的塑形应变累积方向表达，其计算式为

$$D = \frac{\dot{\epsilon}_p^{acc}}{\dot{\epsilon}_q^{acc}} \quad (16)$$

式中： $\dot{\epsilon}_p^{acc}$ 为塑性体应变累积率， $\dot{\epsilon}_q^{acc}$ 为塑形偏应变累积率。修正 Cam-Clay 模型流动准则计算式为

$$D = \frac{M_c^2 - (\eta'^{av})^2}{2\eta'^{av}} \quad (17)$$

式中： M_c 为受压时临界状态应力率， $M_c = 1.25$ 。本文模型充分考虑当前应力水平(平均应力水平 σ_{ij}^{av} 和动应力水平 σ_{ij}^{ampl})下土体的塑性应变累积行为，通过动应力水平确定塑性应变累积的大小，塑性应变累积的方向由平均应力水平来确定。

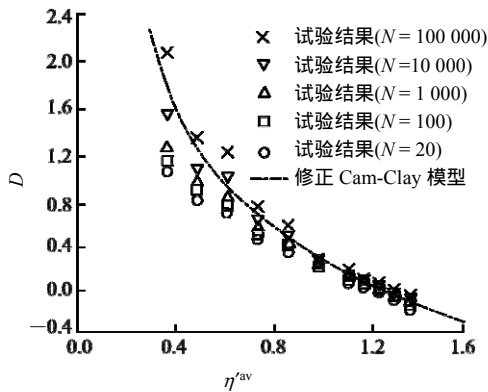


图 1 应变累积方向的试验结果与修正 Cam-Clay 模型的流动准则比较^[23]

Fig.1 Comparison between experimental results and flow rule of modified Cam-Clay(MCC) model at the direction of strain accumulation^[23]

(1) 屈服函数的选择

本文在屈服函数的选取上采用椭圆屈服函数，在高周循环荷载作用过程中此屈服函数由循环荷载的幅值来控制，并且硬化参数为与塑性体应变累积有关的安定性应力水平 p^{sh} ，屈服函数为

$$f = p^{ampl} + \left(\frac{q^{ampl}}{M}\right)^2 \frac{1}{p^{ampl}} - p^{sh}(\epsilon_p^{acc}) \quad (18)$$

式中： p^{ampl} 为静水压力幅值， $p^{sh}(\epsilon_p^{acc})$ 为与塑性体应变累积 ϵ_p^{acc} 相关的安定性应力水平， M 为临界状态应力率。

(2) 体积硬化规律

在高周循环荷载作用过程中，正如式(18)表示的那样，硬化参数为与塑性体应变累积相关的安定性应力水平 $p^{sh}(\epsilon_p^{acc})$ ，为了反映平均偏应力水平 η^{av} 对硬化过程的影响，本文在修正 Cam-Clay 模型硬化准则的基础上提出以体积硬化规律来反映高周循环荷载作用过程中的安定性应力水平的变化：

$$d\epsilon_p^{acc} = \left(1 - \frac{\eta'^{av}}{M}\right) \frac{dp^{sh}}{p^{sh}} \quad (19)$$

式(19)中， $(1 - \eta'^{av} / M)$ 这一项表示当前的平均偏应力水平对体应变累积安定性的影响。在低的平均偏应力水平下， $\eta'^{av} < M$ 时， $dp^{sh} > 0$ 导致体积压缩密实；当 $\eta'^{av} > M$ 时， $dp^{sh} > 0$ 导致体积膨胀。

确定了屈服函数和硬化规律后，选择幂函数规律的形式来描述过应力函数：

$$\phi(f) = \alpha \left[p^{ampl} + \left(\frac{q^{ampl}}{M}\right)^2 \frac{1}{p^{ampl}} - p^{sh}(\epsilon_p^{acc}) \right]^\beta \quad (20)$$

式中： α, β 为过应力函数参数，均为正值。将式(20)代入式(14)得到由过应力函数表示的总的塑性应变累积率：

$$\frac{d\epsilon_{ij}^{acc}}{dN} = \alpha \left\langle p^{ampl} + \left(\frac{q^{ampl}}{M}\right)^2 \frac{1}{p^{ampl}} - p^{sh}(\epsilon_p^{acc}) \right\rangle^\beta m_{ij} \quad (21)$$

(3) 塑性势函数的确定

本文使用平均应力状态下修正 Cam-Clay 模型的流动准则来描述高周循环荷载作用过程中塑性应变累积的方向，此时塑性势函数为

$$g = (p'^{av})^2 - p'^{av} p_0^{av} + \frac{(q^{av})^2}{M^2} = 0 \quad (22)$$

如果已知 $p'-q$ 平面上的一个平均应力状态，从式(22)可以得到初始平均静水压力 p_0^{av} ：

$$p_0^{av} = p'^{av} + \frac{(q^{av})^2}{p'^{av} M^2} \quad (23)$$

根据塑性势函数式(22)可以得到：

$$m_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}^{av}} = \frac{\partial g}{\partial p'^{av}} \frac{\partial p'^{av}}{\partial \sigma_{ij}^{av}} + \frac{\partial g}{\partial q^{av}} \frac{\partial q^{av}}{\partial \sigma_{ij}^{av}} \quad (24)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p'^{av}}{\partial \sigma_{ij}^{av}} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \frac{\partial q^{av}}{\partial \sigma_{ij}^{av}} &= \frac{3}{2q^{av}} s_{ij}^{av} = \frac{3}{2q^{av}} (\sigma_{ij}^{av} - p'^{av} \delta_{ij}) \\ \frac{\partial g}{\partial p'^{av}} &= 2p'^{av} - p_0^{av} = p'^{av} - \frac{(q^{av})^2}{p'^{av} M^2} \\ \frac{\partial g}{\partial q^{av}} &= \frac{2q^{av}}{M^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

将式(25)代入式(24)可得

$$m_{ij} = \frac{1}{3} \left[p'_{av} - \frac{(q^{av})^2}{p'_{av} M^2} \right] \delta_{ij} + \frac{3}{M^2} s_{ij}^{av} \quad (26)$$

将式(26)代入式(21)可得高周循环荷载作用过程中塑性应变累积总表达式：

$$\frac{d\epsilon_{ij}^{acc}}{dN} = \alpha \left\langle p'^{ampl} + \left(\frac{q^{ampl}}{M} \right)^2 \frac{1}{p'^{ampl}} - p^{sh} \epsilon_p^{acc} \right\rangle^\beta \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left[p'_{av} - \frac{(q^{av})^2}{p'_{av} M^2} \right] \delta_{ij} + \frac{3}{M^2} s_{ij}^{av} \right\} \quad (27)$$

2.4 模型的数值积分格式

(1) 弹性行为的积分格式

为了得到统一的弹性行为的数值积分格式，需要对有效静水压力 p' 进行精确的求解。对式(12)在循环增量 $[N, N+\Delta N]$ 上进行积分：

$$\int_N^{N+\Delta N} \frac{1}{K} \frac{dp'}{dN} dN = \int_N^{N+\Delta N} \frac{d\epsilon_p^e}{dN} dN \quad (28)$$

改变式(28)的积分变量及积分边界条件，得

$$\int_{p'_N}^{p'_{N+\Delta N}} \frac{1}{K} dp' = \int_{\epsilon_{p,N}^e}^{\epsilon_{p,N+\Delta N}^e} d\epsilon_p^e \quad (29)$$

将式(11)代入式(29)得

$$\int_{p'_N}^{p'_{N+\Delta N}} \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^n dp' = \int_{\epsilon_{p,N}^e}^{\epsilon_{p,N+\Delta N}^e} K_{ref} d\epsilon_p^e \quad (30)$$

对式(30)进行积分得

$$\frac{p_{ref}}{n+1} \left[\left(\frac{p'_{N+\Delta N}}{p_{ref}} \right)^{n+1} - \left(\frac{p'_N}{p_{ref}} \right)^{n+1} \right] = K_{ref} \Delta \epsilon_p^e \quad (31)$$

其中，

$$\Delta \epsilon_p^e = \epsilon_{p,N+\Delta N}^e - \epsilon_{p,N}^e \quad (32)$$

对式(31)重新改写如下：

$$p'_{N+\Delta N} = [(p'_N)^{n+1} + (n+1)K_{ref}(p_{ref})^n \Delta \epsilon_p^e]^{\frac{1}{n+1}} \quad (33)$$

这样，通过式(33)就可以计算体积模量 $K_{N+\Delta N}$ 为

$$K_{N+\Delta N} = \frac{p'_{N+\Delta N} - p'_N}{\Delta \epsilon_p^e} \quad (34)$$

假设在循环荷载作用过程中土体的 Poisson 比 ν 为一个常数，这样可得剪切模量 $G_{N+\Delta N}$ 为

$$G_{N+\Delta N} = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} K_{N+\Delta N} \quad (35)$$

根据式(13)可得

$$q_{N+\Delta N} = q_N + 3G_{N+\Delta N} \Delta \epsilon_q^e \quad (36)$$

对于土体弹性行为的数值积分无需进行迭代，

可以直接积分求解。

(2) 塑性应变累积行为的积分格式

与弹性行为类似，塑性应变累积行为的应力增量部分由应变增量控制，总的应变增量可以分解为弹性的应变增量和累积塑性应变增量：

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^{acc} \quad (37)$$

通过球应变不变量和偏应变不变量可以表示为

$$\Delta \epsilon_p = \Delta \epsilon_p^e + \Delta \epsilon_p^{acc} \quad (38)$$

$$\Delta \epsilon_q = \Delta \epsilon_q^e + \Delta \epsilon_q^{acc} \quad (39)$$

由塑性应变增量表达式(27)可得

$$\Delta \epsilon_p^{acc} = \alpha \left\langle p'_{N+\Delta N} + \left(\frac{q_{N+\Delta N}}{M} \right)^2 \frac{1}{p'_{N+\Delta N}} - p^{sh}_{N+\Delta N} \right\rangle^\beta \cdot \left(p'_{N+\Delta N} - \frac{(q_{N+\Delta N})^2}{p'_{N+\Delta N} M} \right) \Delta N \quad (40)$$

$$\Delta \epsilon_q^{acc} = \alpha \left\langle p'_{N+\Delta N} + \left(\frac{q_{N+\Delta N}}{M} \right)^2 \frac{1}{p'_{N+\Delta N}} - p^{sh}_{N+\Delta N} \right\rangle^\beta \cdot \left(\frac{2q_{N+\Delta N}}{M^2} \right) \Delta N \quad (41)$$

其中，

$$p^{sh}_{N+\Delta N} = p^{sh}_N + \Delta p^{sh} = p^{sh}_N + \frac{M}{M - \eta'_N} p^{sh}_N \Delta \epsilon_p^{acc} \quad (42)$$

将式(38)和(39)分别代入式(33)和(36)得

$$p'_{N+\Delta N} = [(p'_N)^{n+1} + (n+1)K_{ref}(p_{ref})^n (\Delta \epsilon_p - \Delta \epsilon_p^{acc})]^{1/n+1} \quad (43)$$

$$q_{N+\Delta N} = q_N + 3G_{N+\Delta N} (\Delta \epsilon_q - \Delta \epsilon_q^{acc}) \quad (44)$$

式(28) ~ (44)就是在计算由循环荷载作用引起的动应力水平、弹性应变以及累积塑性应变的数值积分格式，其中各变量为隐式相关的，需要进行迭代求解，本文采用 Newton-Raphson 迭代方法求解。

进行迭代的时候首先进行弹性试测，也就是假设应变增量全是弹性应变增量，此时试探变量可以表达为

$$\mathbf{a}_{trial} = \{a_{trial}^1, a_{trial}^2, a_{trial}^3, a_{trial}^4\}^T \quad (45)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} a_{trial}^1 &= p_{trial} = [(p'_N)^{n+1} + (n+1)K_{ref}(p_{ref})^n \Delta \epsilon_p]^{1/n+1} \\ a_{trial}^2 &= q_{trial} = 3G_{trial} \Delta \epsilon_q \\ a_{trial}^3 &= \Delta \epsilon_{p, trial}^{acc} = 0 \\ a_{trial}^4 &= \Delta \epsilon_{q, trial}^{acc} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

设定试探值后，根据屈服函数判断塑性变形产生的条件，根据式(18)，判别条件为

$$f_{\text{trial}} = p_{\text{trial}} + \left(\frac{q_{\text{trial}}}{M} \right)^2 \frac{1}{p_{\text{trial}}} - p^{\text{sh}}(\epsilon_{p, N}^{\text{acc}}) \quad (47)$$

当 $f_{\text{trial}} > 0$ 时，表明土体处于屈服状态，根据迭代函数求解；当 $f_{\text{trial}} = 0$ 时，表明土体处于弹性变形状态，无需进行迭代，直接求应力增量。

3 模型验证

3.1 循环三轴试验

为了验证所提模型的适用性，本文对不同平均静水压力 p^{av} 和平均应力率 η^{av} 下的排水循环三轴试验结果进行验证。首先对土样进行各向等压固结，固结围压为 σ_c ，固结完成后在轴向施加偏压到 σ_a ，此时平均静水压力为 $p^{\text{av}} = \sigma_c + \sigma_a / 3$ ，平均偏应力为 $q^{\text{av}} = \sigma_a$ ，并记录试样在平均应力状态下的变形，大约经过 1 h 的平均应力固结后在轴向施加循环荷载，循环幅值为 σ_1^{ampl} ，此时循环静水压力为 $p^{\text{ampl}} = \sigma_1^{\text{ampl}} / 3$ ，循环偏应力为 $q^{\text{ampl}} = \sigma_1^{\text{ampl}}$ ，在 p - q 平面上的循环应力路径的斜率为常数， $q^{\text{ampl}} / p^{\text{ampl}} = 3$ ，循环三轴试验中的应力状态如图 2 所示，定义循环应力比 ζ^{ampl} 为

$$\zeta^{\text{ampl}} = \frac{q^{\text{ampl}}}{p^{\text{av}}} = \frac{\sigma_1^{\text{ampl}}}{p^{\text{av}}} \quad (48)$$

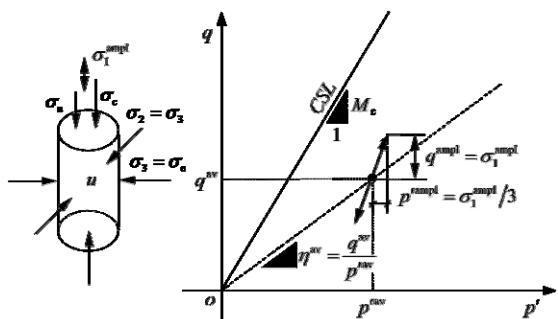


图 2 循环三轴试验中的应力状态
Fig.2 Stress state in a cyclic triaxial test

循环三轴试验记录试样在不同应力状态下的轴向应变 ϵ_1 和环向应变 ϵ_3 。此时，体应变和偏应变分别为

$$\epsilon_p = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \quad (49)$$

$$\epsilon_q = \frac{2}{3} |\epsilon_1 - \epsilon_3| \quad (50)$$

循环三轴试验所用材料为均匀的中粗砂，其中，平均粒径 $d_{50} = 0.55 \text{ mm}$ ，最大孔隙比 $e_{\text{max}} = 0.874$ ，最小孔隙比 $e_{\text{min}} = 0.577$ ，内摩擦角 $\phi_c = 31.2$ ，所有的试样的相对密度大约是 60%。试验所用循环应力率 $\zeta = q^{\text{ampl}} / p^{\text{av}} = \sigma_1^{\text{ampl}} / p^{\text{av}} = 0.3$ ，加荷频率 $f = 1 \text{ Hz}$ ，最大循环荷载次数 $N_{\text{max}} = 100\ 000$ 。

3.2 参数确定及模型预测

(1) 弹性模型参数的确定

土体在循环荷载作用下的应力-应变关系具有滞洄性，每一次循环加载卸载后应力-应变形成滞洄圈，这主要是由于土颗粒之间的阻尼效应使得循环加载卸载的应力和应变之间不能同步变化而形成的。应力-应变曲线的滞洄现象在某种意义上反映了土体在循环荷载作用下应力-应变关系的非线性特征。本文采用割线体积模量 K_s 和割线剪切模量 G_s 来确定模型中的弹性参数，定义割线模量为每次加载和卸载末端的最大值和最小值连线的斜率。式(11)可以表示为

$$K_s = K_{\text{ref}} \left(\frac{p'}{p_{\text{ref}}} \right)^{1-n} \quad (51)$$

参考静水压力 p_{ref} 通常取为标准大气压 p_a ，即 $p_{\text{ref}} = p_a = 100 \text{ kPa}$ 。当 $K_{\text{ref}} = 148 \text{ MPa}$ ， $n = 0.55$ 时，割线体积模量与平均静水压力的试验数据和拟合曲线如图 3 所示，通过对循环三轴试验进行拟合发现，试验数据和拟合曲线之间具有很好的一致性。

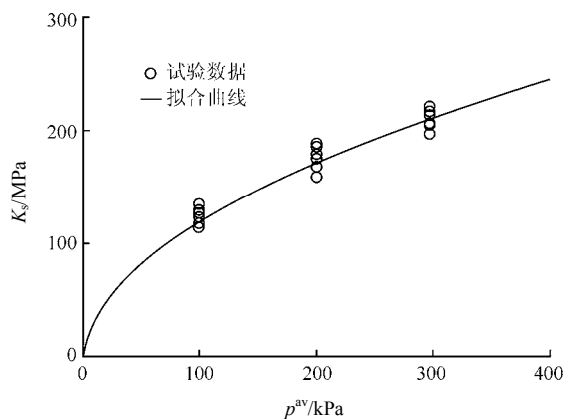


图 3 割线体积模量与平均静水压力的试验数据和拟合曲线
Fig.3 Experimental results and the fitted curve showing the relationship between secant bulk modulus and average hydrostatic pressure

忽略循环荷载对 Poisson 比的影响，假设为常数，Poisson 比的取值根据循环三轴试验第 50 次循环加卸载的弹性体应变和偏应变来确定，即

$$\frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{\epsilon_q^e, N=50}{\epsilon_p^e, N=50} \quad (52)$$

对于中粗砂来说，通过循环三轴试验可知， $\nu = 0.3$ 比较合理。割线剪切模量可以通过体积模量和 Poisson 比表示：

$$G_s = \frac{3(1-2\nu)K_s}{2(1+\nu)} \quad (53)$$

(2) 累积模型参数的确定

临界状态应力率 M 通过常规三轴试验来确定，对于循环三轴试验所用的中粗砂，压缩时 $M = M_c = 1.23$ 。过应力函数参数 α 和 β 通过非线性最小二乘法对循环三轴试验的累积塑性体应变 ε_p^{acc} 试验结果用式(40)进行曲线拟合得到。为了减少由于积分步长 ΔN 不同引起的计算不准确性，本文积分程序采用变积分步长，对于 10^5 次的循环荷载作用，本文计算前 10^4 次循环采用积分步长为 20 次循环，此后采取 50 次循环为一个积分步长，这样 10^5 次的循环荷载作用也就进行 2 300 次计算。通过对循环三轴试验结果用式(40)进行最小二乘法拟合可得参数 α 和 β 的取值如表 1 所示。从表 1 可以看出， α 和 β 的取值基本与平均应力水平无关，对拟合参数取平均值分别作为参数 α 和 β 的值，此时， $\alpha = 0.0023$ ， $\beta = 3.54$ 。

表 1 过应力函数参数取值

Table 1 Values of overstress function parameters

p^{av}/kPa	η^{av}	ζ^{ampl}	α	β
100	0.500	0.300	0.002 1	3.51
100	0.750	0.300	0.002 3	3.54
100	1.000	0.300	0.002 5	3.55
100	1.350	0.300	0.002 4	3.57

(3) 模拟结果分析

根据上述模型参数，分别对平均静水压力 $p^{av} = 100$ kPa，平均应力比 $\eta^{av} = 0.50, 0.75, 1.00, 1.35$ ，循环应力比 $\zeta^{ampl} = 0.3$ 的累积偏应变循环三轴试验结果进行模拟。排水循环三轴试验累积偏应变的试验结果与拟合曲线如图 4 所示。

通过对平均静水压力 $p^{av} = 100$ kPa 模型预测与循环三轴试验结果对比发现，对于平均应力率 $\eta^{av} < M$ 的情况，模型预测基本与试验结果吻合；而对于平均应力率 $\eta^{av} > M$ 的情况，模型预测与试验结果相差比较大。事实上，平均静水压力 $p^{av} = 200$ 和 300 kPa 的情况也是这样的。这主要是因为当平均应力率 $\eta^{av} > M$ 时，土体在循环荷载作用下表现出体积膨胀

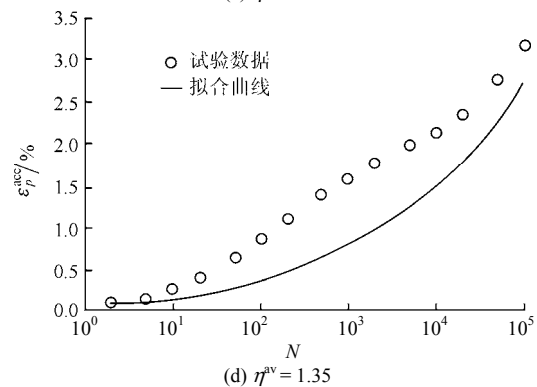
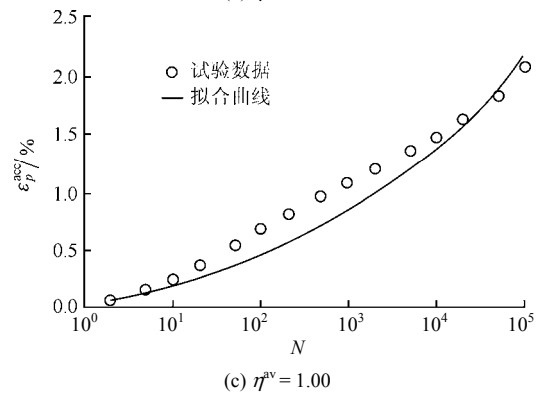
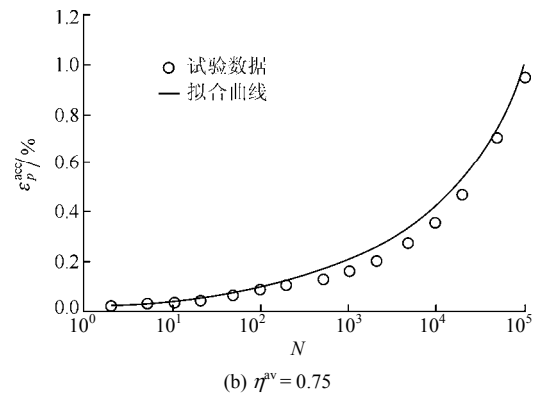
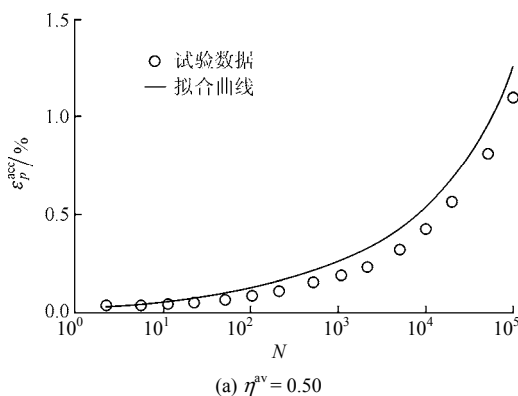


图 4 排水循环三轴试验累积偏应变的试验结果与拟合曲线
Fig.4 Experimental results and fitted curves of accumulated deviatoric strain of drained cyclic triaxial tests

行为，过应力函数的非零性无法模拟体积膨胀情况下循环三轴试验中的 $\varepsilon_p^{acc} - N$ 曲线(见图 5)。也就是

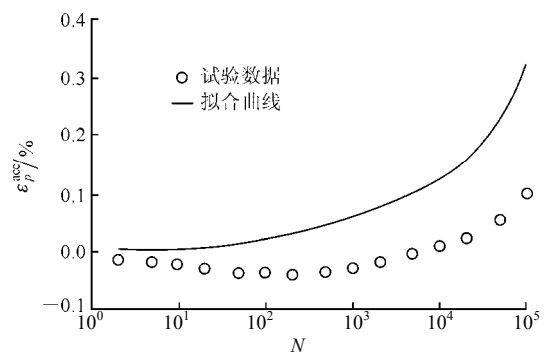


图 5 循环三轴试验值与过应力函数拟合曲线对比
($p^{av} = 100$ kPa, $\eta^{av} = 1.35$, $\zeta^{ampl} = 0.3$)
Fig.5 Comparison between cyclic triaxial test result and fitting curve of overstress function($p^{av} = 100$ kPa, $\eta^{av} = 1.35$, $\zeta^{ampl} = 0.3$)

说，本文模型完全不能描述体积膨胀情况下的塑性应变累积行为。

4 结 论

本文基于塑性包络提出一个弹塑性累积模型来描述土体在高周循环荷载作用下的塑性应变累积行为。得到如下结论：

(1) 在高周循环计算中，将一定循环次数增量 ΔN 内的累积塑性应变增量 $\Delta \bar{\epsilon}_{\Delta N}^{\text{acc}}$ 作为一个封装来计算，并用一个幂形式的过应力函数来描述。

(2) 使用累积塑性体应变 ϵ_p^{acc} 作为硬化参数来描述塑性应变累积的大小，在硬化准则的描述上，引入 $1 - \eta^{\text{av}} / M$ 反映平均应力水平对硬化过程的影响。另外，采用平均应力状态下修正 Cam-Clay 模型的流动准则来描述塑性应变累积的方向。

(3) 通过模型预测与循环三轴试验结果对比发现，本文模型在模拟低应力水平下的塑性应变累积行为具有足够的精度，对于高应力水平(尤其当平均应力水平接近或高于临界状态时)的情况，模型预测与试验结果差距比较大。这主要是由于过应力函数的非零性无法描述体积膨胀时的塑性应变累积行为。如何突破对体积膨胀的描述是未来的研究重点。

参考文献(References)：

- [1] DAFALIAS Y F, HERRMANN L R. Bounding surface plasticity : application to isotropic cohesive soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, 112(12) : 1 263 – 1 291.
- [2] GE Y N. Cyclic constitutive modeling of granular materials[Ph. D. Thesis][D]. Boulder : The University of Colorado, 2003.
- [3] ABDELKRIM M, BONNET G, DE BUHAN P. A computational procedure for predicting the long term residual settlement of a platform induced by repeated traffic loading[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(6) : 463 – 476.
- [4] NIEMUNIS A, WICHTMANN T, TRIANTAFYLIDIS T. A high-cycle accumulation model for sand[J]. Computers and Geotechnics, 2005, 32(4) : 245 – 263.
- [5] 黄茂松, 李进军, 李兴照. 饱和软黏土的不排水循环累积变形特性[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(7) : 891 – 895.(HUANG Maosong, LI Jinjun, LI Xingzhao. Cumulative deformation behaviour of soft clay in cyclic undrained tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(7) : 891 – 895.(in Chinese))
- [6] 张宏博, 苗海涛, 宋修广. 长期交通荷载作用下粉砂土累积变形本构模型构建及数值积分格式[J]. 山东大学学报: 工学版, 2010, 40(2) : 59 – 65.(ZHANG Hongbo, MIAO Haitao, SONG Xiuguang. Constitutive model of silty sands for cumulative deformation under long-term traffic loading and numerical integration[J]. Journal of Shandong University : Engineering Science, 2010, 40(2) : 59 – 65.(in

- Chinese))
- [7] SUIKER A. The mechanical behaviour of ballasted railway tracks[Ph. D. Thesis][D]. Delft : Delft University of Technology, 2002.
- [8] SUIKER A, DE BORST R. A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(4) : 441 – 470.
- [9] PERZYNA P. Fundamental problems in viscoplasticity[J]. Advances in Applied Mechanics, 1966, 9 : 243 – 377.
- [10] OLSZAK W, PERZYNA P. On thermal effects in viscoplasticity[J]. Zeitschrift FÜR Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, 1969, 20(5) : 676 – 680.
- [11] LEMAITRE J, CHABOCHE J. Mechanics of solid materials[M]. Cambridge : Cambridge University Press, 1990 : 253 – 345.
- [12] 张宏博. 长期往复荷载作用下无黏性材料累积变形研究[博士学位论文][D]. 上海 : 同济大学, 2006.(ZHANG Hongbo. Long-term cumulative deformation of cohesionless material induced by repeated loading[Ph. D. Thesis][D]. Shanghai : Tongji University, 2006.(in Chinese))
- [13] WICHTMANN T. Explicit accumulation model for non-cohesive soils under cyclic loading[Ph. D. Thesis][D]. Bochum : Ruhr University Bochum, 2005.
- [14] KARG C, FRANCOIS S, HAEGEMAN W, et al. Elasto-plastic long-term behavior of granular soils : Modelling and experimental validation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010, 30(8) : 635 – 646.
- [15] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behaviour of wet clay[C]// Proceedings of Engineering Plasticity. New York : [s.n.], 1968 : 535 – 609.
- [16] VERMEER P A. Formulation and analysis of sand deformation problems[Ph. D. Thesis][D]. Delft, Netherlands : Delft University of Technology, 1980.
- [17] BORJA R. Cam-clay plasticity, Part II : implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 88(2) : 225 – 240.
- [18] DESAI C S, ZHANG D. Viscoplastic model for geologic materials with generalized flow rule[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(6) : 603 – 620.
- [19] ROWE R K, HINCHBERGER S D. The significance of rate effects in modelling the Sackville test embankment[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, 35(3) : 500 – 516.
- [20] KELLN C, SHARMA J, HUGHES D, et al. An improved elastic-viscoplastic soil model[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45(10) : 1 356 – 1 376.
- [21] LUONG M P. Mechanical aspects and thermal effects of cohesionless soils under cyclic and transient loading[C]// Proceedings of IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials. Delft : [s.n.], 1982 : 239 – 246.
- [22] CHANG C S, WHITMAN R V. Drained permanent deformation of sand due to cyclic loading[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 114(10) : 1 164 – 1 180.
- [23] WICHTMANN T, NIEMUNIS A, TRIANTAFYLIDIS T. Experimental evidence of a unique flow rule of non-cohesive soils under high-cyclic loading[J]. Acta Geotechnica, 2006, 1(1) : 59 – 73.