

# 基于拉丁超立方抽样的有限元可靠度程序开发及应用

伍国军<sup>1</sup>, 陈卫忠<sup>1,2</sup>, 谭贤君<sup>1</sup>, 杨典森<sup>1</sup>

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;

2.山东大学 岩土与结构工程研究中心, 山东 济南 250061)

**摘 要:** 在地下工程结构可靠性分析中, 岩土体参数离散性大, 功能函数非线性程度高, 常为隐式函数, 因此, 对可靠度计算方法提出了很高的要求。针对传统蒙特卡罗抽样方法计算量非常大, 难以满足工程要求的问题, 基于拉丁超立方抽样技术, 结合了 Matlab 和有限元软件 Abaqus 各自的优点, 编制了 Matlab-Abaqus 联合计算的有限元可靠度程序, 该程序具有节省样本空间、提高抽样效率的显著特点。通过对某圆形隧道的结构可靠性分析, 表明该程序能很快达到收敛, 能够满足地下工程结构可靠性计算分析的要求。

**关 键 词:** 拉丁超立方抽样; 蒙特卡罗; 可靠度分析; 有限元; 地下工程

**中图分类号:** O 242.21

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 7598 (2015) 02 - 0550 - 05

## Program development of finite element reliability method and its application based on Latin hypercube sampling

WU Guo-jun<sup>1</sup>, CHEN Wei-zhong<sup>1,2</sup>, TAN Xian-jun<sup>1</sup>, YANG Dian-sen<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China)

**Abstract:** During the reliability analysis of supporting structure in underground engineering, more reasonable reliability computing methods would like to be adopted because of large discreteness of parameters of soil-rock mass and high-degree of nonlinearity of performance function, as well as nearly manifesting as implicit function. While it is hard to satisfy the project requirement by traditional Monte Carlo simulation method with large amount of computation work, the finite element reliability program of joint computation including Matlab and Abaqus is developed. It combines the advantages of Matlab and Abaqus based on Latin hypercube sampling and has the outstanding feature of saving sample space and improving efficiency of sampling as well. It can easily converge and satisfies requirements of reliability analysis of supporting structure by exhibiting a case of a circular tunnel in underground engineering.

**Key words:** Latin hypercube sampling (LHS); Monte Carlo; reliability analysis; finite element; underground engineering

## 1 引 言

在地下工程中, 由于岩土体的地质条件复杂多变, 物理力学参数存在较大的离散性, 同时, 作用在岩土体上的结构荷载也常常带有一定的不确定性, 因此, 对各种地下工程中的不确定性因素分别地加以某种形式的定量考虑, 通过可靠度分析方法得到地下工程围岩体或支护结构的失效概率或可靠度, 对地下工程设计具有重要的理论意义<sup>[1]</sup>。

在地下工程可靠度分析中, 常用的可靠度计算方法有以下几种: 一次二阶矩验算点法、响应面方法及随机抽样法 (Monte Carlo 法) 等<sup>[2]</sup>。此外, 随着计算技术的发展, 有限元-一次二阶矩法、有限元-最大熵法、有限元-Monte Carlo 法, 也先后应用于结构可靠度分析中。地下工程的可靠度分析方法众多, 实际应用时需根据结构极限状态方程中基本随机变量的概率分布和方程式的线性或非线性的情况使用。

收稿日期: 2013-10-14

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 41130742, No. 51379007, No. 2010CDB10401)

第一作者简介: 伍国军, 男, 1977 年生, 副研究员, 主要从事隧道及地下工程方面的研究工作。E-mail: gjwu@whrsm.com

近年来,在地下工程可靠度分析方法的研究方面,国内外取得了很多的研究成果:1989年,H-S在前人的理论基础上,对隧道衬砌结构的可靠性问题进行了分析,最终提出了隧道支护系统体系可靠度的概念及分析方法<sup>[3]</sup>;Laso等<sup>[4]</sup>采用基于连续介质模式的响应面法对II类围岩的衬砌结构进行了可靠度计算分析。赵国藩<sup>[5]</sup>提出了结构可靠度的实用分析方法,并将一种迭代格式的响应面方法用以解决极限状态方程为隐式的极限状态曲面,提供了求解结构可靠度的新思路。景诗庭等<sup>[6]</sup>、宋玉香等<sup>[7]</sup>根据隧道结构的特点,应用概率理论及工程结构系统可靠度分析方法,对整个隧道结构系统可靠度进行了探讨。张清等<sup>[8]</sup>采用蒙特卡罗法对隧道的围岩弹性抗力系数、衬砌荷载响应特征等进行了计算分析。左育龙等<sup>[9]</sup>充分利用了基本随机变量的统计信息,提出了基于人工神经网络的结构可靠度四阶矩法。谭忠盛等<sup>[10-11]</sup>也在隧道与地下结构可靠度的计算理论和实践研究方面作出了较大的贡献。

由于地下工程可靠性分析中,岩土体参数变异系数大,功能函数往往非线性程度很高,难以获得显式函数,特别是在大型地下工程的结构可靠性分析中,常用的可靠度计算方法难以满足分析要求。

本文针对传统蒙特卡罗法计算量巨大、难以满足工程分析要求的问题,采用拉丁超立方抽样技术,编制了Matlab-Abaqus联合计算的蒙特卡罗有限元计算程序,该程序能大大缩减计算量,不仅能应用于荷载-结构法,对于地层-结构法计算分析往往也能达到预想效果。

## 2 传统蒙特卡罗法

蒙特卡罗法(Monte Carlo simulation, MCS)又称随机抽样法、概率模拟法、数值模拟法或统计试验法,是通过随机模拟和统计试验来求解结构可靠度的数值方法。它起源于1946年物理学家Von Neuman和Ulam等在计算机上用随机方法模拟中子连锁反应的秘密称呼而来。在目前的结构可靠度计算方法中,蒙特卡罗法被认为是一种相对精确的方法。

蒙特卡罗模拟方法的基本思想是:若已知随机变量的概率分布及极限状态方程,根据各个随机变量的分布,利用蒙特卡罗方法产生相应分布的一组随机变量,代入极限状态方程得

$$z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

作 $N$ 次这样的试验,可得到随机变量 $Z$ 的一

组:若其中有 $M$ 个 $Z < 0$ ,则

$$P_f = P\{g(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0\} = M/N \quad (2)$$

对 $N$ 个 $Z$ 求均值和方差,根据 $Z$ 的分布,从而计算可靠指标。

从理论思路上看,蒙特卡罗法的应用范围极其广泛,几乎没有什么限制,它回避了结构可靠度分析中的数学困难,并且不受随机变量分布和功能函数形式的影响,原理简单,在抽取的样本数足够多时其计算结果可以认为是精确的。

但蒙特卡罗法的计算量非常大,当实际工程的结构破坏概率在 $10^{-3}$ 以下时,需要计算的次数将达 $10 \times 10^4$ 次以上,进而占用大量的计算时间。岩土体由于计算参数的离散性比较大,在失效概率较小时,模拟数目相当庞大,耗费过多的时间,大大限制了其实际应用的范围和程度。为提高抽样效率,人们研究出许多降低模拟方差,改善模拟精度的抽样技巧:如分层抽样法、重要抽样法、匕首抽样法等。

拉丁超立方抽样方法是分层抽样法的一种,避免了重复抽样,能以较小的样本量反映总体的变异规律,抽样的次数可大大减少。

## 3 拉丁超立方复合抽样方法

### 3.1 分层抽样方法

分层抽样法的概念与重要抽样法相似,它们都是要使对 $p_i$ (第 $i$ 次目标抽样概率)贡献大的抽样更多地出现。但是分层抽样法并不改变原始的密度函数,而是将抽样区间分成一些子区间,并使各子区间的抽样点数不同,在贡献大的子区间内抽取更多的样本<sup>[12]</sup>。

将积分区域 $G(x) < 0$ 分成 $M$ 个互不相交的子区间 $L_j$ ,在每个子区间内,取 $N_j$ 个均匀分布在该子区间的均匀随机数向量 $r$ ,这里 $N_j$ 不仅仅是第 $j$ 个子区间内产生的均匀随机数向量的个数,也是 $[0, 1]$ 区间均匀随机数向量落入该子区间的频数。这样,分层抽样法的模拟结果可以写为

$$\hat{p}_f = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j = \sum_{j=1}^M \frac{L_j}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} f(r_i^{(j)}) \quad (3)$$

模拟方差为

$$Var(\hat{p}_f) = Var\left[\sum_{j=1}^M \frac{L_j}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} f(r_i^{(j)})\right] = \sum_{j=1}^M \frac{L_j^2}{N_j} Var[f(r_i^{(j)})] \quad (4)$$

式中: $Var[f(r_i^{(j)})] = \frac{1}{L_j} \int f^2(X) dX - \frac{p_j^2}{L_j}$ 。

相应的模拟方差的估计值为

$$\text{Var}(\hat{p}_f) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{N_j - 1} \left[ \frac{L_j^2}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} f^2(\mathbf{r}_i^{(j)}) - \hat{p}_f^2 \right] \quad (5)$$

在式(5)模拟方差公式中,可以证明:

$$\text{若 } \sum_{j=1}^M N_j = N, \text{ 且 } N_j = N \frac{L_j \sqrt{\text{Var}[f(\mathbf{r}_i^{(j)})]}}{\sum_{j=1}^M L_j \sqrt{\text{Var}[f(\mathbf{r}_i^{(j)})]}}$$

则

$$\text{Var}(\hat{p}_f) \Big|_{\min} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^M L_j \sqrt{\text{Var}[f(\mathbf{r}_i^{(j)})]} \right\}^2 \quad (6)$$

由此可见,为减少模拟方差,应使每个子区间抽取的样本数正比于该子区间的标准差与体积的乘积。

### 3.2 拉丁超立方抽样方法

拉丁超立方抽样是一种多维分层抽样方法,如图1所示,它的工作原理为:

(1) 定义参与计算机运行的抽样数目  $N$ ;

(2) 把每一次输入等概率地分成  $N$  列,  $x_{i0} < x_{i1} < x_{i2} < x_{i3} \cdots < x_{in} < \cdots < x_{iN}$ , 且有  $P(x_{in} < x < x_{in+1}) = \frac{1}{N}$ 。

(3) 对每一列仅抽取一个样本,各列中样本 bin 的位置是随机的。

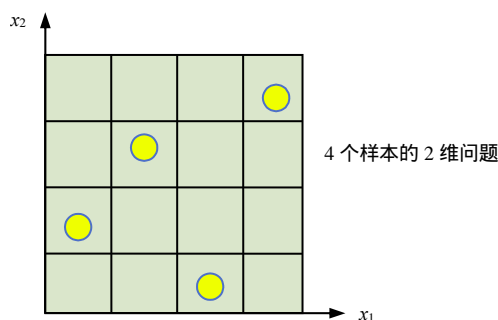


图1 拉丁超立方抽样

Fig.1 Latin hypercube sampling

相对于单纯的分层抽样,拉丁超立方抽样的最大优势就在于任何大小的抽样数目都能容易地产生。

至于估计均值,通常的做法是:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x^n) \quad (7)$$

一般情况下,这种估计的标准误差不能认为是对标准蒙特卡罗抽样方法的改进。但实际上,拉丁超立方抽样对均值和方差的估计与蒙特卡罗方法相

比,在效果上至少是一样的,且常常会显著改善:

假设  $y$  是关于输入变量的线性函数,  $y = \sum_{i=1}^d a_i x_i$ , 分别利用蒙特卡罗抽样和拉丁超立方抽样方法,再对均值进行估计,结果都是式(7),而标准误差分别为

$$\text{MC: } E[(\bar{y} - \mu_y)^2] = \frac{1}{N} \sum a_i^2 \sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{N} \sigma_y^2 \quad (8)$$

$$\text{LHS: } E[(\bar{y} - \mu_y)^2] = \frac{1}{N^3} \sum a_i^2 \sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{N^3} \sigma_y^2 \quad (9)$$

因而:  $\frac{\text{拉丁超立方抽样的标准误差}}{\text{蒙特卡罗抽样的标准误差}} = \frac{1}{N^2}$

由此可知,拉丁超立方抽样对样本数量的节省是非常显著的。

需要特别指出的是:此拉丁超立方抽样并不是从均匀分布的[0, 1]中抽样,而是从各随机变量分布函数的实际抽样范围内抽样<sup>[13]</sup>。

## 4 Matlab-Abaqus 程序的研制

大型有限元程序 Abaqus 是一款非常优秀的岩土工程计算分析软件,具有非常强大的非线性功能,在材料本构模型及二次开发方面表现出非常独到的优点。Matlab 是一套功能极其强大的科学和工程计算数学软件系统,对计算数学领域的特定数学问题都给出了各种高效算法,具有编程简单直观、用户界面友善、开放性强等特点。

本文基于拉丁超立方抽样技术,提出 Matlab-Abaqus 联合计算的有限元蒙特卡罗可靠度分析方法:根据基本变量的分布概型,在 Matlab 中利用拉丁超立方技术进行抽样,通过编程,将每组抽样变量随机值转入有限元软件 Abaqus 实现计算分析得到响应量的随机值,将每组得到的响应量随机值进行统计分析,可得到响应量的统计特征,根据极限状态方程,便可得到结构的失效概率或可靠指标。

编制 Matlab-Abaqus 可靠度程序: 确定各基本随机变量的统计特征,并将非正态分布转换成正态分布函数; 利用拉丁超立方抽样指令:  $r = \text{lhsnorm}(\mu, \sigma, M, N)$ , 产生服从  $N(\mu, \sigma^2)$  分布的  $m$  行  $n$  列随机变量数组  $R$ ; 编制 Matlab 程序,调用 Abaqus 的命令流文件.inp,实现基本随机变量的替换; 调用 Abaqus 实现计算分析,将数据结果文件.dat 中的响应量计算值返回到 Matlab; 将

每次得到的响应量计算值进行统计分析,得到统计特征; 根据极限状态方程,计算失效概率或可靠指标。具体流程见图2。

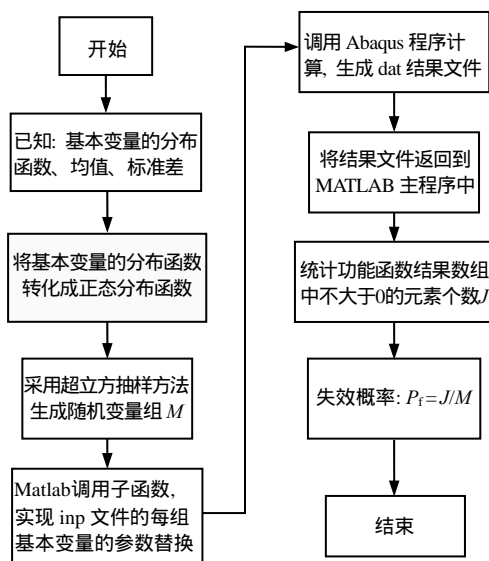


图2 Matlab-Abaqus 联合计算程序框图

Fig.2 Block diagram of joint program of Matlab and Abaqus

## 5 圆形隧洞开挖锚固承载力可靠性分析算例

圆形隧洞模型: 建立 1/4 的轴对称模型, 尺寸为 60 m×60 m, 开挖隧洞半径为 10 m; X、Y 轴均轴向对称约束, 假定外部施加等向压应力 20 MPa, 模型见图3。

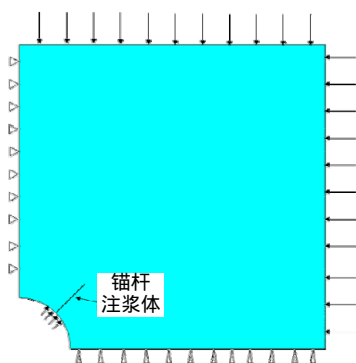


图3 1/4 圆形隧道模型图

Fig.3 A quarter model of circular tunnel

锚杆直径  $\phi 22$ , 锚杆长度为 8 m, 以隧洞开挖后长期流变情形下锚固体的可靠性为研究目标, 岩体材料的非线性蠕变方程为

$$\varepsilon_c^i = P_1 \sigma_i^{P_2} t^{P_3} \quad (10)$$

蠕变试验参数如下:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 9.582 \times 10^{-7} \\ P_2 &= 1.35 \\ P_3 &= 0.164 \quad 75 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

采用高强 II 级预应力锚杆 (注: 轴向拉力设计值 500 MPa), 初始预紧力为 120 kN, 由于锚杆材料力学参数变异性很小, 以围岩体的弹性模量  $E_s$ 、凝聚力  $c_s$ 、内摩擦角  $\varphi_s$  作为随机变量, 流变时间取 6 个月, 采用 Drucker-Prager 塑性屈服准则, 计算锚固体的可靠度。

### 5.1 锚固参数统计特征的选取

采用如表 1 所示的围岩体和锚固体力学参数的统计数据。

表 1 随机变量的统计特征

Table 1 Statistical characteristics of random variables

随机变量	围岩体		
	弹性模量 $E_s$ / GPa	凝聚力 $c_s$ / MPa	内摩擦角 $\varphi_s$ / (°)
均值 $\mu$	10.0	1.20	45.00
方差 $\sigma$	2.0	0.20	3.00
变异系数	0.2	0.16	0.06
分布类型	正态	正态	正态

### 5.2 极限状态方程

将锚杆锚固力视为响应量, 在可靠性分析中锚固力变化统计特征为正态分布。我国《土层锚杆设计与施工规范 CECS22: 90》中规定: 预应力变化值不应大于锚杆设计轴向拉力值的 10%。根据这个规定, 锚杆在施作后的锚固力随围岩体蠕变后, 其锚固拉力值变化量超过锚杆设计轴向拉力值的 10%, 即认为已经失效。即:

$$\Delta P \geq 10\% \times 500 = 50 \quad (12)$$

式中:  $\Delta P$  为锚固拉力值变化量 (MPa)。

因此, 对于锚固承载力的可靠性研究, 以锚固力变幅等于锚杆设计轴向拉力值的 10% 作为锚固失效的极限状态方程。

### 5.3 流变 6 个月的可靠度计算

对锚固体流变 6 个月的可靠度进行计算。采用本文编制的 Matlab-Abaqus 联合实现的可靠度程序对模型进行计算, 以锚固体预应力变化幅度等于锚杆设计轴向拉力值 10% 作为锚固体失效的极限指标, 对模型计算的次数依次为 100、150、200、250、300、320 次。从表 2 不难看出, 计算次数为 320 次时, 结果与 300 次的计算结果已完全一致。由此选定  $n=320$  次作为可靠性计算的次数。

而采用蒙特卡罗普通抽样进行计算, 根据文献

[14], 至少需计算 4 096 次, 当计算到 5 137 次时得到的失效概率为 0.007 1, 与拉丁超立方抽样方法得到的实效概率基本相同。由此可见, 采用本文的拉丁超立方抽样技术能大大提高抽样效率。

最终计算得到的锚杆锚固力的失效概率  $P_f = 0.72\%$ , 若锚固力也服从正态分布, 可由  $\phi(\beta) = 1 - p_f$  得到可靠指标  $\beta = 2.44$ , 该值小于《水利水电工程结构可靠度设计统一标准》的最低 2.70 的目标可靠指标, 可认为锚固体失效。

表 2 失效概率计算结果

Table 2 Probabilities of anchorage failure

计算次数	失效概率 $P_f$ / %	计算次数	失效概率 $P_f$ / %
100	0.41	250	0.70
150	0.63	300	0.72
200	0.74	320	0.72

## 6 结 论

(1) 在地下工程结构可靠度分析中, 蒙特卡罗法计算结果被公认为几乎接近真实值, 但需要大量的统计样本, 计算工作量巨大, 而拉丁超立方抽样方法避免了重复抽样, 能以较小的样本量反映总体的变异规律, 往往能有效改善样本的均值和方差, 从而使得抽样次数大大减少。因此, 抽样效率能得到很大提升。

(2) 本文结合了 Matlab 和 Abaqus 各自的优点, 基于拉丁超立方抽样技术, 编制了 Matlab-Abaqus 联合计算的有限元可靠度程序, 通过某圆形隧洞的锚固可靠性分析, 表明该程序能很快达到收敛, 实现地下工程结构可靠性的计算分析, 并具有高效、实用等优点。

(3) 拉丁超立方抽样技术运用于蒙特卡罗有限元分析时, 当随机参数有一定关联时, 计算分析难以达到理想效果, 今后还需在这方面开展进一步的研究工作。

## 参 考 文 献

- [1] 伍国军, 陈卫忠, 刘豆豆, 等. 基于连续介质模型的隧道衬砌结构可靠性研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(增刊 1): 359 - 363.  
WU Guo-jun, CHEN Wei-zhong, LIU Dou-dou, et al. Reliability analysis of tunnel lining based on continuum model[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2006, 27(Supp.1): 359 - 363.
- [2] 吴世伟. 结构可靠度分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990.
- [3] SHIGEYUKI K A H-S. Reliability evaluation of idealized

- tunnel systems[J]. *Structural Safety*, 1992, (11): 81 - 93
- [4] LASO E, GOMEZ L M S, ALARCON E. A level II reliability approach to tunnel support design[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1996, (33): 172
- [5] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.
- [6] 景诗庭, 朱永全, 宋玉香. 隧道结构可靠度[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002.
- [7] 宋玉香, 景诗庭, 朱永全. 隧道结构系统可靠度研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(3): 780 - 784.  
SONG Yu-xiang, JING Shi-ting, ZHU Yong-quan. Research on reliability of tunnel structural system[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(3): 780 - 784.
- [8] 张清, 王东元, 李建军. 铁路隧道衬砌结构可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1994, 13(3): 209 - 218.  
ZHANG Qing, WANG Dong-yuan, LI Jiang-jun. Reliability analysis of railway tunnel lining[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1994, 13(3): 209 - 218.
- [9] 左育龙, 朱合华, 李晓军. 岩土工程可靠度分析的神经网络四阶矩法[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 513 - 518.  
ZUO Yu-long, ZHU He-hua, LI Xiao-jun. An ANN-based four order moments method for geotechnical engineering reliability analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(2): 513 - 518.
- [10] 谭忠盛, 王梦恕. 隧道衬砌结构可靠度分析的二次二阶矩法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, (23): 2243 - 2247.  
TAN Zhong-sheng, WANG Meng-shu. Second-order second-moment method for structural reliability analysis of tunnel lining[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, (23): 2243 - 2247.
- [11] 谭忠盛. 隧道洞门抗滑模型试验及可靠度分析[J]. 兰州铁道学院学报(自然科学版), 2001, 20(3): 4 - 7.  
TAN Zhong-sheng. A model experiment on the anti sliding property of tunnel door and research on its reliability[J]. *Journal of Lanzhou Railway University (Natural Sciences)*, 2001, 20(3): 4 - 7.
- [12] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.
- [13] 丁克勤, 柳春图. 接管高应变区缺陷的安全评定概率方法研究[J]. 中国安全科学学报, 1999, 9(5): 63 - 68.  
DING Ke-qin, LIU Chun-tu. Study on the probability methods of safety assessment of defects of high strain zone of the nozzle[J]. *China Safety Science Journal*, 1999, 9(5): 63 - 68.
- [14] 段楠, 薛会民, 潘越. 用蒙特卡洛法计算可靠度时模拟次数的选择[J]. 煤矿机械, 2002, (3): 13 - 14.  
DUAN Nan, XUE Hui-min, PAN Yue. A method for determining the number realizations in the calculation of reliability by Monte Carlo simulation method[J]. *Coal Mine Machinery*, 2002, (3): 13 - 14.