

DOI : 10.16285/j.rsm.2015.07.030

非连续变形分析方法中的阻尼问题研究

付晓东, 盛 谦, 张勇慧

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 定量研究了非连续变形分析(DDA)方法中的黏性阻尼与数值阻尼。首先, 基于 Newmark 直接积分法, 推导了块体系统的运动方程。其次, 通过动力学中的黏性阻尼理论建立了 DDA 中动力系数、时间步长与黏性阻尼比的关系式, 探讨了 DDA 中的常加速度积分方案的数值阻尼分区及阻尼比计算方法, 进而得到两种阻尼共同作用时的阻尼比表达式, 并分析了频域内阻尼比的分布情况。最后, 以谐振激励下的块体振动为例, 通过对比不同阻尼作用下块体位移的 DDA 计算值与理论解, 验证了本文提出的阻尼比计算公式的正确性。研究表明: 黏性阻尼对低频的衰减作用明显, 数值阻尼则可以很快地消除高频干扰, 而二者共同作用下可降低阻尼的频率相关性。该研究成果为 DDA 的振动、波动等动力计算的阻尼取值提供了理论依据。

关 键 词: 非连续变形分析(DDA); 阻尼问题; Newmark 法; 黏性阻尼; 数值阻尼

中图分类号: O 241

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 7598 (2015) 07 - 2057 - 06

Damping problem in discontinuous deformation analysis method

FU Xiao-dong, SHENG Qian, ZHANG Yong-hui

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: This paper quantitatively investigates the viscous damping and numerical damping in the discontinuous deformation analysis (DDA) method. The motion equations of the block system are first developed based on the Newmark method; and the relationship among the viscous damping ratio, the dynamic coefficient and the time interval of each step in DDA is developed based on the kinetic theory of viscous damping. The constant acceleration integration scheme in DDA, the partitions and the damping ratio of the numerical damping are discussed; and the calculating formulations of the damping ratio for the combined damping are obtained. An example of the block vibration is analyzed under simple harmonic motions; and the proposed formulations are validated by comparing the DDA calculations to the theoretical solutions. The simulation results show that the viscous damping significantly affects the low frequencies; and the numerical damping can quickly eliminate the interference of the high frequencies. If the two dampings are combined, the frequency-dependence can be reduced. The study results provide a theoretical basis for the vibration and wave calculation using the DDA method.

Keywords: discontinuous deformation analysis (DDA); damping problem; Newmark method; viscous damping; numerical damping

1 引 言

由石根华^[1]提出的块体系统非连续变形分析 (discontinuous deformation analysis, 简称 DDA) 是基于岩体介质非连续性发展起来的一种新的数值分析方法。

目前, DDA 方法中的能量消耗方式主要有库仑摩擦、黏性阻尼与数值阻尼。库仑摩擦能模拟块体接触面的力学特性, 黏性阻尼反映了块体系统自由

振荡的能量耗散, 数值阻尼则可以防止罚函数在处理接触问题时出现振荡。

DDA 的 3 种耗能形式中, 库仑摩擦准则理论比较成熟, 而黏性阻尼与数值阻尼的定量研究工作较少^[2]。石根华在 DDA 程序中引入动力系数来模拟计算中块体系统的能量耗散, 动力系数实质上是黏性阻尼的显式表达。Hatzor、Tsesarsky 等^[3-5]学者定性研究了动力系数对 DDA 计算结果的影响, 并指出为更加准确地模拟块体系统的能量耗散, 需要在

收稿日期: 2014-04-10

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(No. 2015CB057905); 国家自然科学基金资助项目(No. 11272331); 国家自然科学基金重大研究计划集成项目(No. 91215301); NSFC-云南联合基金重点支持项目(No. U1402231)。

第一作者简介: 付晓东, 男, 1986 年生, 博士, 助理研究员, 主要从事岩土力学领域中数值计算方面的研究工作。E-mail: xdfu@whrsm.ac.cn

DDA 中引入合适的阻尼模型。此后, Koo^[6]、Chen^[7]、Sasaki^[8]、甯尤军^[9]、姜清辉^[10]及刘永茜^[11]等先后在 DDA 中采用了质量阻尼、黏弹性阻尼、自适应阻尼及瑞利阻尼等, 但并未深入研究这些阻尼模型的力学意义。

本文基于黏性阻尼理论, 获取了 DDA 程序中的黏性阻尼、数值阻尼及二者共同作用的阻尼比计算公式, 可为 DDA 动力计算的阻尼取值提供参考。

2 基于 Newmark 法的块体系统的运动方程

DDA 方法的基础是拉格朗日函数^[12]:

$$L(\{D\}, \{\dot{D}\}) = T(\{\dot{D}\}) - V(\{D\}) \quad (1)$$

式中: $\{\dot{D}\}$ 、 $\{D\}$ 分别为块体系统的速度列阵、位移列阵; T 和 V 分别为动能与势能函数, 在 DDA 中, 势能函数由块体单元的弹性应力、初始应力、点荷载、体积荷载、惯性力、点位移及块体之间的接触及锚固约束条件等部分组成。

对拉格朗日函数进行时间积分, 由汉密尔顿原理得到拉格朗日运动方程为^[13]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \{\dot{D}\}} - \frac{\partial V}{\partial \{D\}} = 0 \quad (2)$$

展开式(2)便得到块体系统的动力常微分方程组如下

$$[M]\{\ddot{D}\} + [C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{F\} \quad (3)$$

式中: $\{\ddot{D}\}$ 为块体系统的加速度列阵; $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 和 $\{F\}$ 分别为块体系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵与荷载向量。

采用基于 Newmark 法的直接积分求解式(3), 引入如下的位移、速度与加速度的关系:

$$\begin{aligned} \{D\}_{n+1} &= \{D\}_n + \Delta t \{\dot{D}\}_n + \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \{\ddot{D}\} d\tau \approx \\ \{D\}_n + \Delta t \{\dot{D}\}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \{\ddot{D}\}_n + \beta \Delta t^2 \{\ddot{D}\}_{n+1} = \\ \{D\}_n + \Delta t \{\dot{D}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\{\ddot{D}\}_n + 2\beta\{\ddot{D}\}_{n+1}] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{D}\}_{n+1} &= \{\dot{D}\}_n + \int_0^{\Delta t} \{\ddot{D}\} d\tau \approx \\ \{\dot{D}\}_n + (1-\gamma)\Delta t \{\ddot{D}\}_n + \gamma\Delta t \{\ddot{D}\}_{n+1} = \\ \{\dot{D}\}_n + \Delta t [(1-\gamma)\{\ddot{D}\}_n + \gamma\{\ddot{D}\}_{n+1}] \end{aligned} \quad (5)$$

式中: Δt 为时间步长; τ 为时间增量; β 、 γ 为 Newmark 法的积分参数。

然后将式(4)(5)代入式(3), 得

$$[\hat{K}]\{\hat{D}\}_{n+1} = \{\hat{F}\}_{n+1} \quad (6)$$

其中

$$[\hat{K}] = [K] + \frac{1}{\beta\Delta t^2}[M] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[C] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{F}\}_{n+1} &= \{F\}_{n+1} + [M] \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2} \{D\}_n + \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{D}\}_n + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{D}\}_n \right] + \\ & [C] \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t} \{D\}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \{\dot{D}\}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \{\ddot{D}\}_n \right] \end{aligned} \quad (8)$$

3 DDA 方法中的黏性阻尼

3.1 黏性阻尼理论

取式(3)中某一块体的单自由度在自由振动下的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (9)$$

式中: m 、 c 、 k 分别为块体的质量、阻尼系数与刚度系数; x 为求解的自由度。

令振动圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 阻尼比 $\xi = \frac{c}{2\omega m}$, 则式(9)可写为

$$\ddot{x} + 2\omega\xi\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (10)$$

解式(10)可得块体的振动过程, 如图1所示。由图可知, 在 $\xi=0$ 时, 块体在平衡位置作振幅不变的振荡, 称为无阻尼状态; $0 < \xi < 1$ 时, 块体仍在平衡位置振荡, 振幅按指数形式逐渐减小, 称为欠阻尼状态; $\xi=1$ 时, 块体不产生振荡, 称为临界阻尼状态; $\xi > 1$ 时, 块体也不产生振荡, 且以指数衰减的形式回到平衡位置, 称为过阻尼状态。

与 $\xi=1$ 相应的阻尼系数为 $c_r = 2\omega m$, 称为临界阻尼系数, 因此, ξ 也可表达为

$$\xi = \frac{c}{c_r} \quad (11)$$

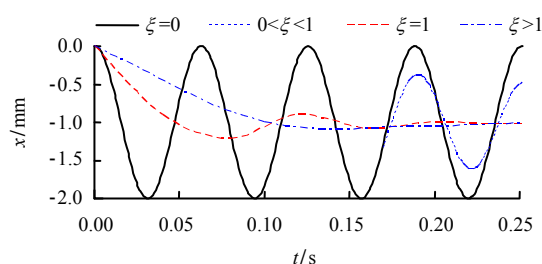


图1 各种阻尼状态下单自由度块体的自由振动
Fig.1 Free vibration of single degree block in various damping states

3.2 DDA 中的黏性阻尼

DDA 中通过施加阻尼来耗散块体系统振动过程中的动能。具体的做法是施加与速度成比例的黏性阻尼，如式(3)中的阻尼矩阵项。理论上，黏性力子矩阵应采用当前计算步的块体速度，但 Newmark 法的每个时间步内速度是变化量，因此，黏性阻尼有不同的表现形式，如：石根华^[1]在其博士论文中采用当前计算步的平均速度；但为了方便编程，DDA 程序显式地采用了上一计算步结束的块体速度。DDA 程序中采用动力系数 gg 来表征黏性阻尼，其意义为每个块体当前时间步的初始速度与上一时间步的最终速度的比值， gg 的取值范围为 $0 \sim 1$ 。

当 $gg < 1$ 时，相当于引入了黏性阻尼力。黏性阻尼作用的能量损失可以记作为

$$\Delta E = \frac{1}{2} m [v^2 - (gg \cdot v)^2] \quad (12)$$

那么其等效阻尼力为

$$f_c = \frac{\Delta E}{d} = \frac{\frac{1}{2} m [v^2 - (gg \cdot v)^2]}{v \Delta t} = \frac{(1 - gg^2) m v}{2 \Delta t} \quad (13)$$

式中： v 为块体速度； d 为块体位移。

由式(13)可得阻尼系数为

$$c = \frac{f_c}{v} = \frac{(1 - gg^2) m}{2 \Delta t} \quad (14)$$

由式(11)可知，黏性阻尼比表达式为

$$\xi_{\text{viscous}} = \frac{c}{c_r} = \frac{(1 - gg^2)}{4 \omega \Delta t} \quad (15)$$

由式(15)，当 $gg = 0.99$ 时，黏性阻尼比 ξ_{viscous} 随参数 Ω ($\Omega = \omega \Delta t$) 的变化曲线如图 2。由图可知，DDA 方法中的黏性阻尼是与系统的频率相关，且对低频率振动系统更加有效。

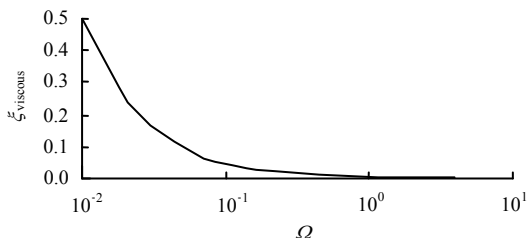


图 2 DDA 的黏性阻尼比随参数 Ω 的变化曲线

Fig.2 Curve of viscous damping ratio vs. Ω in DDA

4 DDA 方法中的数值阻尼

目前，DDA 程序中采用常加速度积分方法，即

假设当前计算步内的加速度为常数，式(7)中 $\gamma = 1$ ， $\beta = 1/2$ 。常加速度积分方案满足无条件稳定，且具有非常重要的数值阻尼。

4.1 数值阻尼分区

DDA 方法中的数值阻尼可以分为 3 个区域^[14]，如图 3 所示。

(1) 无阻尼区： $0 < \Omega < 0.1$ ， $50 < \Omega$ ，谱半径（能够有效度量算法的稳定性与数值阻尼^[15]） $r \approx 1$ ，可见数值阻尼可以忽略。

(2) 欠阻尼区： $0.1 < \Omega < 4$ ， $0.333 < r < 0.999$ ，该区域谱半径的变化很大，特别是 $1 < \Omega < 4$ ，数值阻尼很快增加到临界阻尼值。此时，特征值为复数，使得迭代过程的解出现衰减的振荡现象。

(3) 过阻尼区： $4 < \Omega < 50$ ，该区域 r 逐渐增加到 1。此时，特征值是实数，使得迭代过程中的解呈指数形式衰减。

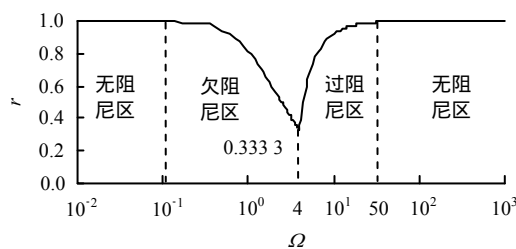


图 3 DDA 方法的数值阻尼分区

Fig.3 Partitions of numerical damping in DDA method

4.2 DDA 的数值阻尼比

通常，为了满足 DDA 方法求解的准确性，应尽可能使数值阻尼处于欠阻尼状态，而且需定量了解常加速度法的数值阻尼。由阻尼分区可知，欠阻尼状态即当 $\Omega < 4$ ，数值阻尼比可由下式计算^[16-17]：

$$\xi_{\text{numerical}} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Omega^2}{2} \right)}{2\Omega} \quad (16)$$

阻尼比能够定量表征数值积分方法对运动方程的阻尼贡献，图 4 为数值阻尼比 $\xi_{\text{numerical}}$ 随 Ω 的变化曲线。由图可知， $0 < \Omega < 0.1$ ，阻尼比很小，这说明在这个范围内需要很长时间的求解才能到达平衡，这与该区域内 $r \approx 1$ 等价；当 $0.1 < \Omega < 4$ ，阻尼比陡增到最大值（约为 0.284 52），这说明该区域内迭代很快能达到平衡。

5 黏性阻尼与数值阻尼的共同作用

在一般的 DDA 计算中，数值阻尼与黏性阻尼

将会同时存在。结合式(15)及(16),可以得到两种阻尼共同作用下总阻尼比的计算公式为

$$\xi_{total} = \xi_{numerical} + \xi_{viscous} \quad (17)$$

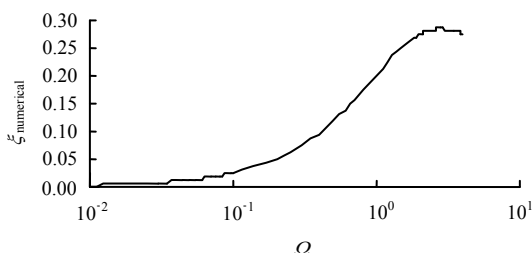


图 4 DDA 的数值阻尼比随 Ω 的变化曲线

Fig.4 Curve of numerical damping ratio vs. Ω in DDA

图 5 是频域内阻尼比的分布图,其中时间步为 0.002 5 s,动力系数取 0.998。由图可知,黏性阻尼和数值阻尼分别对低、高频的衰减作用明显,这与有限元方法的瑞利阻尼相似,与质量阻尼和刚度阻尼相对应;二者联合作用可降低其频率相关性,如在 2~8 Hz 内,总阻尼比处于 3%~4%的范围内;总阻尼比仍然保留数值阻尼对高频的有效消除能力,可以防止 DDA 中罚函数在处理接触问题时出现振荡。

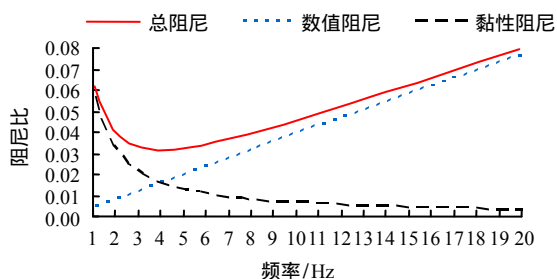


图 5 频域内阻尼比的分布

Fig.5 Distribution of damping ratio in frequency domain

6 算例分析

6.1 谐振激励下的块体振动算例

用 DDA 方法模拟固定块体 B 上的块体 A 的谐振过程。如图 6 所示,块体 A 的尺寸为 1 m×1 m,固定的块体 B 的尺寸为 4 m×1 m。材料力学参数:弹性模量为 100 GPa,泊松比为 0.3,密度为 1.0 g/cm³,不考虑重力;为防止块体之间的分离,假设节理面的抗剪及抗拉强度参数均很大。法向接触弹簧刚度为 10 MPa。监测点为块体 A 的形心点 C。

Y 向谐振力 $p(t)=p_0\sin(\omega_0 t)$ 其中 p_0 为力的幅值,频率 ω_0 为谐振频率。取 $p_0=1\ 000\ \text{N}$, $\omega_0=\omega=100\ \text{rad/s}$ (ω 为块体 A 的固有频率),

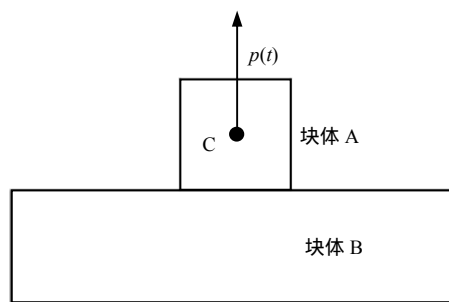


图 6 块体谐振的 DDA 模型

Fig.6 DDA model for block under simple harmonic motion

考虑具有黏性阻尼的块体共振的控制微分方程为^[18]

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin(\omega t) \quad (18)$$

该方程的解为

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\cos(\omega_D t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) \right) - \cos(\omega t) \right] \quad (19)$$

式中: $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ 。

6.2 阻尼作用分析

6.2.1 黏性阻尼

为保证 DDA 计算仅存在黏性阻尼,在 DDA 模拟中引入平均加速度积分方式(此时不存在数值阻尼^[10])。时间步长取 0.000 5 s,采用不同的动力系数,可以得到测点 C 的位移-时程曲线,如图 7 所示。由图可知,当动力系数为 1,DDA 在求解过程中基本不存在数值阻尼,其模拟结果与无阻尼共振理论解一致,随着时间的增长,位移振幅不断增大;当动力系数减小,在黏性阻尼作用下瞬态振动项不断衰减,最终趋于稳态,且块体 A 的稳定振幅越来越小。

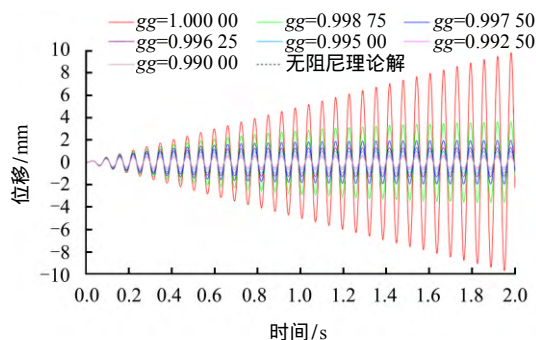


图 7 不同动力系数下测点 C 的位移时程曲线

Fig.7 Displacement-time curve of point C at different dynamic coefficients

由式 (15) 可求得各动力系数下的阻尼比，再通过式 (19) 得到对应阻尼比下的理论解。由图 8 可知，DDA 模拟结果与理论解基本一致，这证明了动力系数与阻尼比的转化公式的正确性。

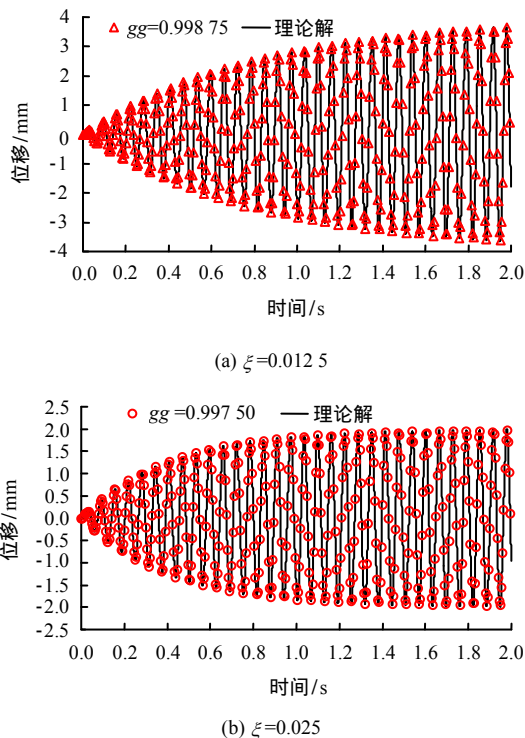


图 8 不同阻尼比下 DDA 计算值与理论解的对比图
Fig.8 Comparison between DDA result and theoretical solution at different damping ratios

6.2.2 数值阻尼

不考虑黏性阻尼 (即动力系数取 1), 采用常加速度积分方式, 取不同的时间步长, 可以得到块体 A 的运动过程。

采用式 (16) 计算 DDA 数值阻尼比大小, 如图 9 所示为阻尼比约 0.0125 (时间步长为 0.0005 s) 和 0.0250 (时间步长为 0.001 s) 时, 测点 C 位移-时程的 DDA 模拟结果与理论解的对比图。分析可知, DDA 计算值与对应阻尼比下的理论解基本一致, 证明了 DDA 数值阻尼比公式计算的正确性。

6.2.3 阻尼共同作用

在 DDA 中同时考虑黏性阻尼和数值阻尼: 采用常加速度积分方式, 取时间步为 0.0005 s; 取动力系数为 0.99875、0.99750 两种工况。利用式 (17), 计算其总阻尼比分别为 0.0250、0.0375。如图 10 所示, 对比 DDA 计算值与理论解, 二者基本一致, 证明了数值阻尼和黏性阻尼共同作用下 DDA 计算的正确性。

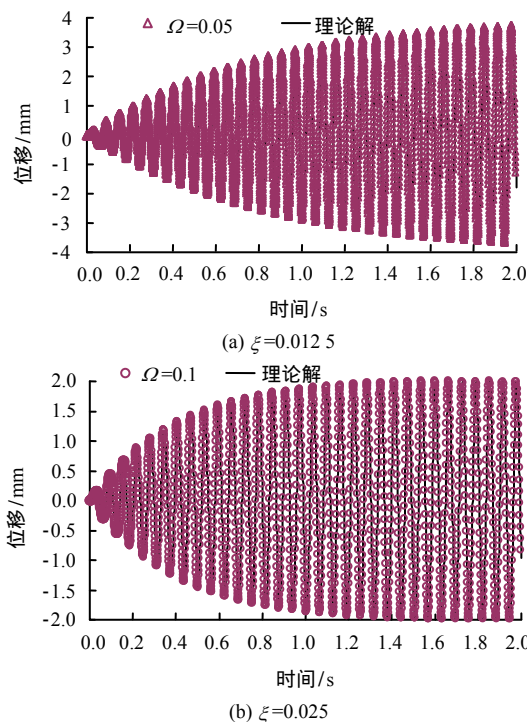


图 9 不同阻尼比下 DDA 计算值与理论解的对比图
Fig.9 Comparison between DDA result and theoretical solution at different damping ratios

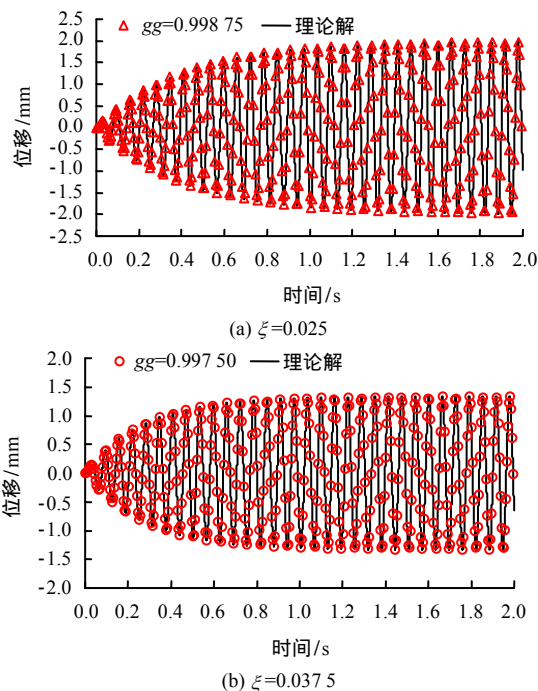


图 10 不同阻尼比下 DDA 计算值与理论解的对比图
Fig.10 Comparison between DDA result and theoretical solution at different damping ratios

7 结 论

(1) 根据动力学中的黏性阻尼理论, 获得了 DDA 中黏性阻尼比的计算公式。总结并探讨了 DDA 数值阻尼的分区、阻尼比计算等问题。通过谐

振激励下块体振动的 DDA 算例,证明了本文推导的黏性、数值阻尼比公式的正确性。

(2) DDA 中的阻尼理论与算例都表明:黏性阻尼对低频的衰减作用明显,数值阻尼则可以很快消除高频干扰;黏性与数值阻尼的联合作用降低了阻尼的频率相关性,而且联合阻尼可消除高频,防止 DDA 中罚函数在处理接触问题时出现振荡。

本文的研究成果为 DDA 的振动、波动等^[19-20]动力计算的阻尼取值提供了理论依据。

参 考 文 献

- [1] SHI G H. Discontinuous deformation analysis—A new numerical model for the statics and dynamics of block systems[D]. Berkeley: Department of Civil Engineering, University of California, 1988.
- [2] JIANG Q H, CHEN Y F, ZHOU C B. Kinetic energy dissipation and convergence criterion of discontinuous deformations analysis (DDA) for geotechnical engineering[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2013, 46(6): 1443 - 1460.
- [3] HATZOR Y H, FEINTUCH A. The validity of dynamic displacement prediction using DDA[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2001, 38(4): 599 - 606.
- [4] HATZOR Y H, ARZI A A, ZASLAVSKY Y, et al. Dynamic stability analysis of jointed rock slopes using the DDA method: King Herod's Palace, Masada, Israel[J]. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 2004, 41(5): 813 - 832.
- [5] TSESARSKY M, HATZOR Y H, SITAR N. Dynamic displacement of a block on an inclined plane: analytical, experimental and DDA results[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2005, 38(2): 153 - 167.
- [6] KOO C Y, CHERN J C. Modification of the DDA method for rigid block problems[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, 1998, 35(6): 683 - 693.
- [7] CHEN G Q. Numerical modeling of rock fall using extended DDA[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(6): 926 - 931.
- [8] SASAKI T, HAGIWARA K, SASAKI K, et al. Fundamental studies for dynamic response of simple block structures by DDA [C]//Proceedings of the Eighth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation: Fundamentals and Applications to Mining & Civil Engineering. Beijing: [s. n.], 2007: 141 - 146.
- [9] NING Y J, YANG J, CHEN P W. Application study of DDA method in blasting numerical simulation[C]//Proceedings of The 8th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation: Fundamentals and Applications to Mining & Civil Engineering. Beijing: [s. n.], 2007: 117 - 122.
- [10] 姜清辉, 周创兵. 岩土工程不连续变形分析计算中的若干问题[J]. **岩石力学与工程学报**, 2007, 26(10): 2014 - 2026.
JIANG Qing-hui, ZHOU Chuang-bing. Some issues in discontinuous deformation analysis (DDA) for geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(10): 2014 - 2026.
- [11] 刘永茜, 杨军. 一种改进步长自调的非连续变形分析法[J]. **岩土力学**, 2011, 32(8): 2544 - 2548.
LIU Yong-qian, YANG Jun. An improved DDA method with adaptive step size[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(8): 2544 - 2548.
- [12] 张雄, 王天舒. 计算动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [13] IRIE K, KOYAMA T, HAMASAKI E, et al. DDA simulations for huge landslides in Aratozawa area, Miyagi, Japan caused by Iwate-Miyagi Nairiku earthquake[C]//Proceedings of the 9th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation: New Development and Applications. Singapore: Research Publishing Services, 2009: 153 - 160.
- [14] KHAN M S. Investigation of discontinuous deformation analysis for application in jointed rock masses[D]. Toronto: Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2010.
- [15] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [16] HUGHES T J R. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior[C]//Computational Methods for Transient Analysis, Computational Methods in Mechanics Series, Vol. 1. North-Holland, Amsterdam: Elsevier, 1983.
- [17] DOOLIN D M, SITAR N. Time integration in discontinuous deformation analysis[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2004, 130(3): 249 - 258.
- [18] CHOPRA ANIL K. 结构动力学理论及其在工程中的应用[M]. 第2版. 谢礼立, 吕大刚译. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [19] 付晓东, 盛谦, 张勇慧, 等. DDA 方法在波动问题计算中的初步研究[J]. **四川大学学报(工程科学版)**, 2012, 44(2): 70 - 75.
FU Xiao-dong, SHENG Qian, ZHANG Yong-hui, et al. Preliminary research on wave problem calculation using DDA method[J]. **Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)**, 2012, 44(2): 70 - 75.
- [20] ZHANG Y H, FU X D, SHENG Q. Modification of the discontinuous deformation analysis method and its application to seismic response analysis of large underground caverns[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2014, 40: 241 - 250.