

DOI : 10.16285/j.rsm.2015.06.033

# 基于方位离散线性化的上限原理有限元法

孙 聪, 李春光, 郑 宏, 孙冠华

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘 要**: 上限原理有限元法不仅可以得到边坡的安全系数, 还可以给出临界滑动面, 且具有比极限平衡法更严谨的理论基础, 因此, 拥有更广阔的应用前景。针对传统的上限有限元法不能考虑强度各向异性的问题, 提出了一种新的摩尔-库仑屈服面线性化方法。该方法在对方位角离散化的基础上, 建立了线性化的方位离散塑性流动约束方程, 丰富了基于线性规划的上限法理论。两个算例结果表明: 该方法可以稳定地从极限解的上方收敛; 且对边坡进行稳定性分析, 若忽略了边坡的强度各向异性, 则会高估边坡的稳定性, 得到较大的安全系数。

**关 键 词**: 上限有限元法; 方位离散; 各向异性; 线性规划

**中图分类号**: TD824.7

**文献标识码**: A

**文章编号**: 1000 - 7598 (2015) 06 - 1784 - 07

## An upper-bound limit finite element method based on linearized spatial discretization

SUN Cong, LI Chun-guang, ZHENG Hong, SUN Guan-hua

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

**Abstract**: With a theoretical basis more rigorous than the limit equilibrium method, the upper-bound limit finite element method can be used to determine not only the safety factor of slope but also the critical slip surface so that it will have a broad prospect of application. To remove the limitation that the traditional upper-bound limit finite element method cannot address the effect of heterogeneity, a new Mohr-Coulomb yield surface linearization method is proposed herein, based on the linearized spatial discretization. Within this context, the linearized constraint equations for plastic flow are developed, which enriches the upper-bound limit method based on linear programming and lays a solid foundation for the application of linear programming technics to the upper-bound limit analysis. Two examples are analyzed, showing that the proposed method stably yields a convergent solution from above the upper-bound solution. In analyzing the stability of a slope, if the strength anisotropy is ignored, the factor of safety is overestimated, resulting in a larger factor of safety of the slope.

**Keywords**: upper bound finite element method; spatial discretization; anisotropy; linear programming

## 1 引 言

塑性极限分析由于具有清楚的物理意义和严密的理论基础, 已经成为众多岩土工程领域的有效研究手段。相对下限法的应力场, 上限法速度场更易构造, 且由于其可得到边坡临界状态的滑动失稳面, 具有更广阔的应用前景。

目前, 上限法的实现途径主要有两种。第 1 种是预先假定破坏模式, 最后通过数学优化得到上限解, 如 Chen<sup>[1]</sup>提出了一种用于求解二维边坡旋转破坏的上限解方法, 滑裂面仅限于对数螺旋曲线, 并

利用解析方法寻求边坡上限解; Michalowski<sup>[2]</sup>建议采用与传统的极限平衡法类似的破坏机构, 即将滑体离散成为一系列垂直的条块, 在相关联流动法则的理论框架下, 对所有条块构造一个许可的速度场, 然后根据功能平衡方程, 迭代求解边坡的安全系数; 陈祖煜等<sup>[3]</sup>推出了基于斜条分思想的斜条分上限解法, 并在 2000 年, 将塑性极限的求解范围从二维扩大到三维, 对小湾高拱坝的稳定性进行了三维极限分析<sup>[4-5]</sup>等。此类方法虽然直观明了, 对特定问题的研究十分有效, 但当模型边界条件复杂时, 破坏模式将难以构建。

收稿日期: 2014-03-02

基金项目: 973 项目(No.2011CB013505); 国家自然科学基金资助项目(No.11172313)。

第一作者简介: 孙聪, 男, 1989 年生, 博士研究生, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: sunson0324@qq.com

第 2 种是结合有限元、边界元、无网格法等数值计算方法离散系统构建速度场，其中有限元则是最常用的离散手段。此类方法不需要事先假设破坏模式，可考虑复杂的边界条件和不同的力学参数，通过数学规划自动搜索出破坏方式，从而得到上限解。由于此种方法是对整个系统进行离散，变量较多，若最终数学模型为非线性规划，那么求解过程将相当耗时。Sloan<sup>[6-7]</sup>采用外切多边形对屈服函数进行逼近，实现了上限法的线性化，随后许多学者采用这一思路对上限有限元法展开了研究<sup>[8-12]</sup>。该方法虽然随着外切正多边形边数的增加，可很好地展现出数值解从上方逼近真实值的性质，但却难以考虑材料的各向异性。针对此问题，本文从空间方位出发，对于任意应力点建立基于方位离散的线性化 Mohr-Coulomb 塑性流动方程，为各向异性的上限法分析打下基础，并采用两个算例验证了本文方法的正确性和优势。

## 2 上限定理

将在所求区域  $V$  内满足几何相容条件、位移边界  $S_T$  上满足速度边界条件的速度场称为机动场，也称容许速度场。受力体内存在无数个机动场，但所有与机动场对应的外荷载一定不小于真实的外荷载。因为外荷载位于极限解的上侧，故称满足速度容许的外荷载为上限解。显然，上限问题可归结为一个数学规划问题，即在所有的几何容许速度场中寻找一速度场使其对应的极限荷载最小。

## 3 基于方位离散的塑性流动约束方程

上限法要求受力体满足相关联流动法则和速度相容条件，对平面应变条件下的理想弹塑性体，相关流动法则表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{aligned} \right\} \lambda \geq 0 \quad (1)$$

式中： $F$  为塑性势函数； $\lambda$  为塑性乘子； $\dot{\varepsilon}$ 、 $\dot{\sigma}$  分别为应变和应力； $u$ 、 $v$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的速度。为了利用高效的线性规划求解，需要形成节点速度和塑性乘子之间的线性关系，并将屈服函数线性化，下面来详细介绍基于方位离散的线性化塑性流动约束方程的推导过程。

平面问题中的任意应力点对应的摩尔应力圆

如图 1 所示，把方位角以  $x$  轴为基准，从 0 到  $\pi$  分成  $n$  等份，则第  $k$  个离散方位与  $x$  轴的夹角为

$$\alpha_k = k \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

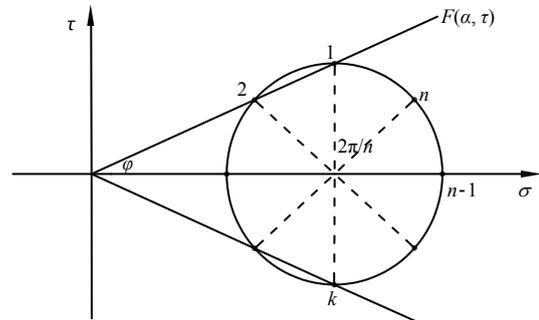


图 1 摩尔应力圆的离散  
Fig.1 Discretization of Mohr stress circle

对应到摩尔应力圆中相应的角度则是  $k \frac{2\pi}{n}$ ，该方位平面外法线向量和切向量分别为

$$\mathbf{n} = [\cos \alpha_k \quad \sin \alpha_k], \mathbf{t} = [-\sin \alpha_k \quad \cos \alpha_k] \quad (3)$$

设此点的应力张量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

则该方位平面上的正应力和剪应力分别为

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^T = \sigma_x \cos^2 \alpha_k + \tau_{xy} \sin 2\alpha_k + \sigma_y \sin^2 \alpha_k \quad (5)$$

$$\tau = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^T = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha_k + \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\alpha_k + \tau_{xy} \cos 2\alpha_k \quad (6)$$

显然， $\sigma_n$  和  $\tau$  是关于  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  的线性函数。

该方位平面上的 Mohr-Coulomb 屈服准则为

$$F_k(\sigma_n, \tau) = |\tau| + \sigma_n \tan \varphi_k - c_k \quad (7)$$

式中： $\varphi_k$  和  $c_k$  为该方位平面上的摩擦角和黏聚力。

将式 (5) (6) 代入式 (7)，则形成了每个离散方位上的屈服条件。在全部方位的  $[0, 2\pi]$  区间上，可以得到  $2n$  个线性化的屈服函数：

$$F_i = M_i \sigma_x + N_i \sigma_y + P_i \tau_{xy} - c_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (8)$$

式中： $c_i$  为第  $i$  个方位上的黏聚力。

且当  $i=2k-1$  时 ( $k=1, 2, \dots, n$ ):

$$\left. \begin{aligned} M_{2k-1} &= \tan \varphi_k \cos^2 \alpha_k - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_k \\ N_{2k-1} &= \tan \varphi_k \sin^2 \alpha_k + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_k \\ P_{2k-1} &= \tan \varphi_k \sin 2\alpha_k + \cos 2\alpha_k \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

当  $i=2k$  时 ( $k=1, 2, \dots, n$ ):

$$\left. \begin{aligned} M_{2k} &= \tan \varphi_k \cos^2 \alpha_k + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_k \\ N_{2k} &= \tan \varphi_k \sin^2 \alpha_k - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_k \\ P_{2k} &= \tan \varphi_k \sin 2\alpha_k - \cos 2\alpha_k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

传统的 Sloan<sup>[6]</sup>方法中对屈服面的线性化是通过外切多边形进行逼近, 应力点位于屈服面上或屈服面外, 等于说是把整个屈服强度提高了, 才会符合上限的要求, 如图 2 所示, 其中  $p$  表示外切多边形边数。

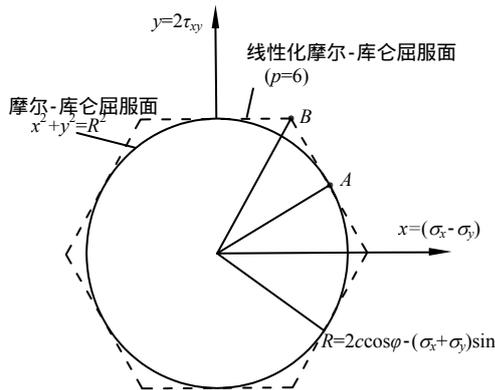


图 2 传统的屈服面线性化方法  
Fig.2 Traditional yield surface linearization method

本文采用的方位离散线性化方法, 任意一个摩尔圆与屈服线  $F$  只存在两种关系: 相切或相交, 如图 3 所示。我们知道, 一个摩尔圆相当于应力空间

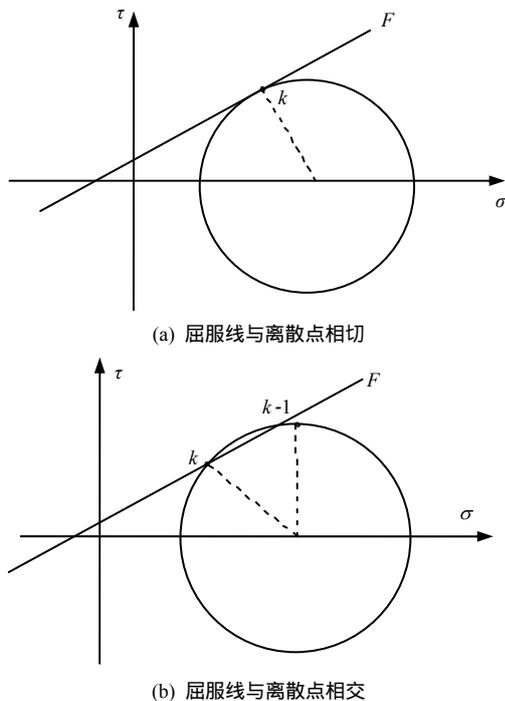


图 3 屈服线与方位离散点的关系  
Fig.3 Relationship of the yield line and azimuth discrete points

中的一个点, 当相切时(见图 3(a)), 该应力状态正好位于屈服面上, 对应于 Sloan 方法中外切线与屈服圆相切的点(图 2 中  $A$  点); 当相交时(见图 3(b)), 处于屈服状态, 则应力状态位于屈服面外, 对应于 Sloan 方法中屈服圆以外的某一点(图 2 中  $B$  点)。随着方位离散点数量的增多, 位于屈服面外的应力状态会减少, 所有应力点从上方逼近屈服面, 与 Sloan 的屈服面逼近方法有着异曲同工之妙, 因此, 这两种情况均严格满足上限性质。

用  $2n$  个线性化的方程代替屈服函数, 代入式 (1), 即可得基于方位离散的塑性流动约束方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_x} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i M_i \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_y} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i N_i \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i \frac{\partial F_i}{\partial \tau_{xy}} = \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i P_i \\ \dot{\lambda}_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

本文计算区域采用四边形网格离散, 如式 (12), 与三角形网格不同, 得到的速度场并不是空间坐标的线性函数, 而是双线性性质的函数。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:  $u_i$  和  $v_i$  是四边形单元节点  $i$  的速度分量;  $N_i$  为节点  $i$  的形函数。将式 (12) 代入式 (11), 可得到用矩阵表达的流动方程, 显然, 它并不是单元节点速度的线性方程, 不过可以对其两端在单元上进行积分, 使其在单元意义上满足流动方程, 从而得到线性化流动方程的弱形式:

$$\bar{A}_{11} X_1 = A_{12} X_2 \quad (13)$$

式中:

$$\bar{A}_{11} = \frac{1}{A^e} \bar{B} = \frac{1}{A^e} \iint_{A^e} B dA; \quad X_1 = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T;$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{2n} \\ N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_{2n} \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_{2n} \end{bmatrix}; \quad X_2 = [\dot{\lambda}_1 \ \dot{\lambda}_2 \ \dot{\lambda}_3 \ \dots \ \dot{\lambda}_{2n}]^T;$$

$B$  为应变矩阵;  $A^e$  为四边形单元面积。

## 4 其他约束条件

### 4.1 速度间断线约束

假定速度不连续位于两个相邻单元的公共边

上，对于 Mohr-Coulomb 屈服准则，速度间断线上的法向和切线相对速度 $\Delta v$ 和 $\Delta u$ 需满足：

$$\Delta v = |\Delta u| \tan \varphi \tag{14}$$

按照文献[7]的方法，对每对速度间断点引入一对非负变量  $u^+$  和  $u^-$ ，令：

$$\Delta u_{ij} = u_{ij}^+ - u_{ij}^-, \Delta v_{ij} = (u_{ij}^+ + u_{ij}^-) \tan \varphi \tag{15}$$

将式 (15) 代入式 (14)，则有

$$A_{21} X_1 = A_{23} X_3 \tag{16}$$

式中： $A_{21} = \begin{bmatrix} T & -T & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & T & -T \end{bmatrix}; T = \begin{bmatrix} -n_x & -n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix};$

$X_1 = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]'; A_{23} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & R \end{bmatrix}; R =$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tan \varphi & \tan \varphi \end{bmatrix}; X_3 = [u_{12}^+ \ u_{12}^- \ u_{34}^+ \ u_{34}^-]'; n_x$ 和 $n_y$ 为速

度间断线法向量  $n$  的分量。

### 4.2 速度边界条件

设  $n$  为一速度边界的法向量  $n_x$ 和 $n_y$ 为其分量，已知该边界上的切向和法向速度分别为  $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ ，则该边界上的节点  $i$  的速度分量需满足：

$$A_{31} X_1 = G \tag{17}$$

式中： $A_{31} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix}; X_1 = [u_i \ v_i]'; G = [\bar{u} \ \bar{v}]'$ 。

### 4.3 外部功率与内部功率耗散

#### 4.3.1 内功率

内功率是指应力分量在相应的应变增量上所做的功，又称内功耗散率。

(1) 单元内部内功率

对于每个四边形单元，其内部相应的耗散功率为

$$P_c = \iint_{A^e} (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA \tag{18}$$

将式 (11) 代入式 (18) 并利用  $F_k = 0$ ，可得

$$P_c = A^e \sum_{i=1}^{2n} \dot{\lambda}_i c_i \tag{19}$$

将式 (19) 写成矩阵形式即为

$$P_c = C_2^T X_2 \tag{20}$$

式中： $C_2^T = A^e [1_1 \ 1_2 \ \dots \ 1_i \ \dots \ 1_{2n}]$ ； $X_2 = [\dot{\lambda}_1 c_1 \ \dot{\lambda}_2 c_2 \ \dots \ \dot{\lambda}_i c_i \ \dots \ \dot{\lambda}_{2n} c_{2n}]'$ 。

(2) 速度间断线上内功率

每条速度间断线上，由于塑性剪切产生的耗散能为

$$P_d = \int_l c' |\Delta u| dl \tag{21}$$

式中： $l$  为间断线长度； $c'$  为每条速度间断线方位上的黏聚力。

令  $|\Delta u| = u^+ + u^-$ ，代入式 (21) 并写成矩阵形式可得

$$P_d = C_3^T X_3 \tag{22}$$

式中： $C_3^T = 0.5c'l[1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ； $X_3 = [u_{12}^+ \ u_{12}^- \ u_{34}^+ \ u_{34}^-]'$ 。

#### 4.3.2 外部功率

外部功率是指节点荷载（外荷载等效移植）在节点速度上做的功，写成矩阵形式为

$$P_w = C_1^T X_1 \tag{23}$$

式中： $X_1 = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_m \ v_m]'$  为节点速度向量； $C_1^T = [p_{x1} \ p_{y1} \ p_{x2} \ p_{y2} \ \dots \ p_{xm} \ p_{ym}]'$  为节点荷载向量； $m$  为节点总数。

## 5 线性规划模型

设超载系数为  $K$ ，当外功率仅考虑体力时，则上限有限元法的目标函数为

$$\text{Min} : K = (C_2^T X_2 + C_3^T X_3) / C_1^T X_1 \tag{24}$$

由于我们求解的是破坏时结构的破坏形式，它仅与  $X_1$  的相对大小有关，因此令：

$$C_1^T X_1 = 1 \tag{25}$$

此时整个求解区域的上限有限元法线性规划模型为

$$\text{Min} : K = C_2^T X_2 + C_3^T X_3 \tag{26}$$

$$\text{subject to: } \begin{cases} \bar{A}_{11} X_1 = A_{12} X_2 \\ A_{21} X_1 = A_{23} X_3 \\ A_{31} X_1 = G \\ C_1^T X_1 = 1 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{cases} \tag{27}$$

## 6 算例分析

### 6.1 各向同性边坡

本算例取自文献[13]，是一个典型的公路边坡。边坡断面尺寸如图 4 所示，包含两种土层，材料参数如表 1，采用三角形和四边形的网格划分如图 5、6 所示。本文采用文献[14]中所建议的方法，即求解超载系数为 1 时的强度折减系数。

本算例极限平衡 Spencer 法得到的安全系数为 1.41，文献[15]基于强度折减有限元计算出的安全系数为 1.43。采用文献[6]所建议的外接屈服圆线性化方法，并取边数为 15 时，采用四边形网格计算的上限强度折减安全系数  $F_s = 1.438$ 。若采用本文的方位离散线性化方法，取不同数量离散点时安全系数如

表 2 和图 6 所示。

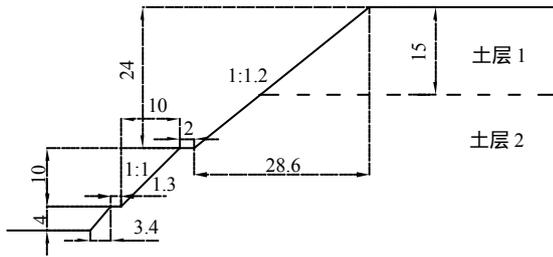


图 4 算例 1 计算剖面 (单位: m)  
Fig.4 Profile of example 1(unit: m)

表 1 算例 1 物理力学参数

岩性	$\gamma/(\text{kN/m}^3)$	$c/\text{kPa}$	$\varphi/(\text{°})$
土层 1	24	34	26
土层 2	25	39	35

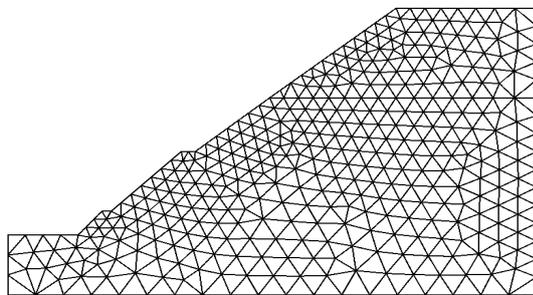


图 5 算例 1 三角形网格划分  
Fig.5 Triangle meshing of example 1

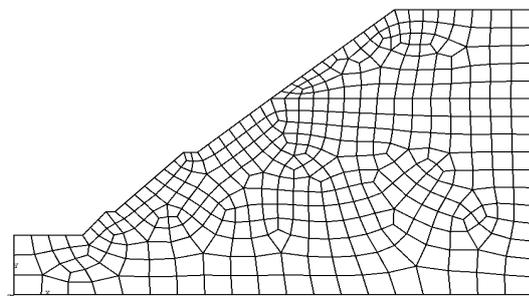


图 6 算例 1 四边形网格划分  
Fig.6 Quadrilateral meshing of example 1

表 2 不同离散方位数时的安全系数

方位离散点数 $N$	$N=4$	$N=8$	$N=12$	$N=16$	$N=20$
三角形网格 $F_s$	1.922	1.574	1.476	1.463	1.459
四边形网格 $F_s$	1.734	1.479	1.445	1.436	1.433

从表 2 可以看到,基于方位离散的上限法从上方逼近真实解,可以很好地保证解的上限性质。当方位离散点数  $N=16$  时与用 Sloan 方法外切 15 边形屈服面的安全系数结果几乎相同,说明了本文方法的正确性。图 8 为  $N=20$  时,基于四边形网格的边坡速度矢量图,从图中可清晰地看出临界滑动面的位置。

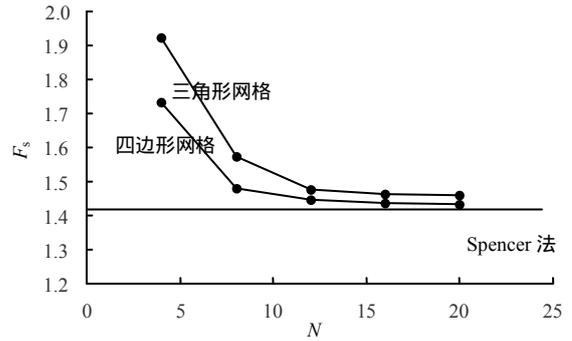


图 7 方位离散点数  $N$  与安全系数  $F_s$  的关系  
Fig.7 Relationships between  $N$  and  $F_s$

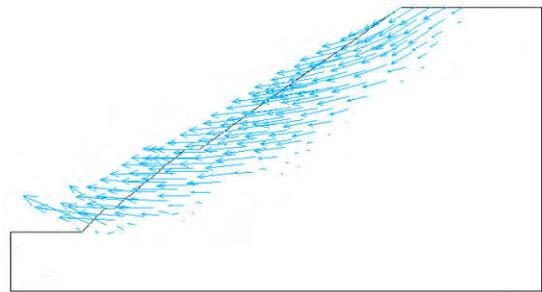


图 8 算例 1 边坡临界速度场  
Fig.8 Critical velocity field of example 1

### 6.2 各向异性边坡

本算例的模型取自文献[16],为经典边坡考核题,坡高为 10 m,坡比为 1:2,底部固定约束,两侧法向约束,边坡网格划分如图 9 所示。土体参数为  $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$ ,  $\varphi=19.6^\circ$ ,  $c=3 \text{ kPa}$ 。为了考虑各向异性,本文对黏聚力采用如下的关系<sup>[17]</sup>:

$$c_\theta = c_h + (c_v - c_h) \sin^2 \theta \quad (28)$$

式中:  $c_v$  为垂直方向黏聚力,  $c_v = 3 \text{ kPa}$ ;  $c_h$  为水平方向黏聚力;  $\theta$  指黏聚力  $c_\theta$  所在的平面与水平面的夹角。

设各向异性系数  $K$  为

$$K = \frac{c_h}{c_v} \quad (29)$$

代入式 (28) 则可得:

$$c_\theta = c_v [K + (1 - K) \sin^2 \theta] \quad (30)$$

由上式可知,当  $K=1$  时,则退化成为各向同性材料。不同  $K$  取值时,运用本文方法得到的边坡安全系数如表 3 和图 10 所示。

本算例由于  $c_v$  较小,导致强度各向异性对安全系数的影响不明显,从表 3 可知,随着各向异性系数  $K$  的增大,安全系数  $F_s$  也缓慢变大。众所周知,长期的沉淀过程导致土颗粒的定向排列,土在固结方向(垂向)的强度要高于其他方向, $K$  通常是小

于 1 的，若假设土体为强度各向同性材料，则求出的安全系数偏大，这等于高估了边坡的稳定性，且黏聚力越大，高估的幅度越大，所以对于较大黏聚力的边坡，考虑各向异性将显得尤为重要。图 11 为  $K=0.7$  时的边坡失稳速度场，从图中可以看出边坡的临界滑动面。

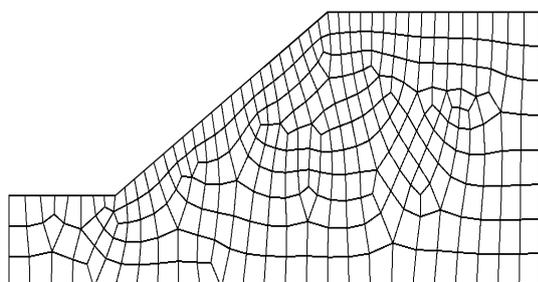


图 9 算例 2 网格划分  
Fig.9 Meshing of example 2

表 3 不同各向异性系数  $K$  时的安全系数  
Table 3 Safety factors  $F_s$  of different anisotropy coefficients  $K$

各向异性系数 $K$	0.5	0.7	1.0	1.3	1.5
安全系数 $F_s$	0.936	0.977	1.025	1.064	1.085

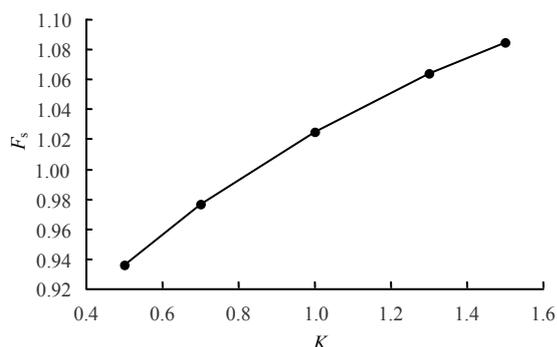


图 10 各向异性系数  $K$  与安全系数  $F_s$  的关系曲线  
Fig.10 Relationship between  $K$  and  $F_s$

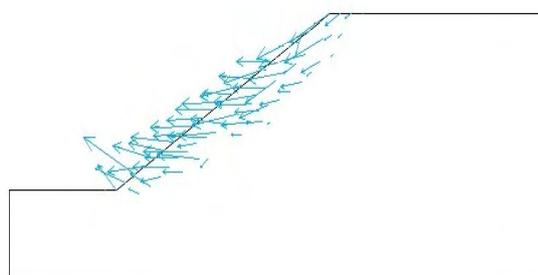


图 11 算例 2 临界速度场  
Fig.11 Critical velocity field of example 2

## 7 结 论

(1) 通过对方位角进行有限离散，得到了线性化的基于方位离散的塑性流动约束方程，建立了基于线性规划的可考虑各向异性的上限有限元理论。

算例证明，本文方法可稳定地从上方逼近真实解，且具有与传统上限法相同的收敛性。

(2) 在长期的沉积过程中形成的真实工程边坡，具有强度各向异性的性质，垂直方向的黏聚力要大于水平方向，但绝大部分的数值分析方法为了简单起见，均是将其当作各向同性材料进行求解，这就造成了求得的安全系数偏大，高估边坡的稳定性，给工程形成一定的安全隐患。所以正确地考虑边坡的各向异性特性也是岩土工程一个重要的研究方向。

(3) 对于节理岩体引起的黏聚力和摩擦角各向异性，本文所构造法方法也可以很容易地处理。

## 参 考 文 献

- [1] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Science, 1974.
- [2] MICHALOWSKI R L. Slope stability analysis: A kinematical approach[J]. *Geotechnique*, 1995, 45(2): 283 - 293.
- [3] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(1): 1 - 11.  
CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(1): 1 - 11.
- [4] CHEN Zu-yu, WANG Xiao-gang, HABERFIELD C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem, Part I: Theory and methods[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, 38: 369 - 378.
- [5] CHEN Zu-yu, WANG Jian, WANG Yu-jie. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem, Part II: Numerical approaches, applications and extensions[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, 38: 379 - 397.
- [6] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite element and linear programming[J]. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 1989, 13(3): 263 - 282.
- [7] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 127(4): 293 - 314.
- [8] 黄阜, 杨小礼, 赵炼恒, 等. 基于 Hoek-Brown 破坏准则的浅埋条形锚板抗拔力上限分析[J]. *岩土力学*, 2012, 33(1): 179 - 184.  
HUANG Fu, YANG Xiao-li, ZHAO Lian-heng, et al. Upper bound solution of ultimate pullout capacity of strip

- plate anchor based on Hoek-Brown failure criterion[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2012, 33(1): 179 - 184.
- [9] 王均星, 王汉辉, 张优秀, 等. 非均质土坡的有限元塑性极限分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(3): 415 - 421.  
WANG Jun-xing, WANG Han-hui, ZHANG You-xiu, et al. Plastic limit analysis of heterogeneous soil slope using finite elements[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(3): 415 - 421.
- [10] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 考虑孔隙水压力的土坡稳定性的刚体有限元上限分析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(3): 273 - 277.  
YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE Chack-fan. A rigid finite element method for upper bound limit analysis of soil slopes subjected to porewater pressure[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2003, 25(3): 273 - 277.
- [11] YU H S, SLOAN S W, KLEEMAN P W. A quadratic element for upper bound limit analysis[J]. **Engineering Computations**, 1994, 11(3): 195 - 212.
- [12] 杨峰, 阳军生. 一种二阶锥线性化方法在上限有限元中的应用研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 593 - 599.  
YANG Feng, YANG Jun-sheng. Investigation and application of a second-order cone linearizing method to finite element upper bound solution[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(2): 593 - 599.
- [13] ZHENG H, THAM L, LIU D. On two definitions of the factor of safety commonly used in the finite element slope stability analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2006, 33(3): 188 - 195.
- [14] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 84 - 89.
- [15] 孙冠华, 郑宏, 李春光. 基于等效塑性应变的边坡滑面搜索[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 1159 - 1163.  
SUN Guan-hua, ZHENG Hong, LI Chun-guang. Searching critical slip surface of slopes based on equivalent plastic strain[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(5): 1159 - 1163.
- [16] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析的原理, 方法与程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [17] YU H, SLOAN S. Limit analysis of anisotropic soils using finite elements and linear programming[J]. **Mechanics Research Communications**, 1994, 21(6): 545 - 554.

### 《岩土力学》2014年第12期被EI收录论文(39篇, 收录率100%)(1)

序号	论文题名	作者	页码
1	桂林红黏土的土-水特征曲线	孙德安, 刘文捷, 吕海波	3345 - 3351
2	湿胀条件下合肥膨胀土土-水特征研究	谭晓慧, 辛志宇, 沈梦芬, 等	3352 - 3360
3	黄土作为西北地区填埋场覆盖层的可行性及设计厚度分析	詹良通, 焦卫国, 孔令刚, 等	3361 - 3369
4	让压锚索在边坡支护中的应用试验研究及摩阻力问题的探讨	汪波, 徐建强, 吴正恺, 等	3370 - 3376
5	侵蚀影响下水泥土的力学性质试验研究	刘泉声, 屈家旺, 柳志平, 等	3377 - 3384
6	可溶盐对黄土触变性的作用效应研究	王文孟, 郭少春, 崔自治	3385 - 3388
7	基于锚杆抗拔试验的动态折线模型分析	刘思思, 赵明华, 李亮	3389 - 3395
8	地震条件下黏性土挡土墙土压力分析	陈奕柏, 谢洪波, 柯才桐, 等	3396 - 3402
9	动载作用下砂岩变形速率及能量毫秒级模拟研究	刘杰, 胡静, 李建林, 等	3403 - 3414
10	考虑残余含气量的非饱和土的水力耦合本构模型	马田田, 韦昌富, 陈盼, 等	3415 - 3420
11	胶结充填体三轴压缩变形破坏及能量耗散特征分析	徐文彬, 宋卫东, 王东旭, 等	3421 - 3429
12	一种基于应变能理论的黏弹塑性蠕变本构模型	沈才华, 张兵, 王文武	3430 - 3436
13	重复荷载作用下粉性路基土累积塑性变形研究	董城, 冷伍明, 李志勇, 等	3437 - 3442
14	双相多孔介质中体波传播特性影响参数研究	刘志军, 夏唐代, 张琼方, 等	3443 - 2450
15	加锚岩石抗弯特性试验研究	陈璐, 臧传伟, 于凤海, 等	3451 - 3459
16	基于响应面法的边坡稳定二阶可靠度分析	傅方煜, 郑小瑶, 吕庆, 等	3460 - 3466
17	煤体吸附膨胀变形模型理论研究	郭平, 曹树刚, 张遵国, 等	3467 - 3472
18	节理岩体超声测试及单轴压缩试验研究	孙旭曙, 李建林, 王乐华, 等	3473 - 3478
19	高温后砂岩动力特性应变率效应的试验研究	李明, 茅献彪, 曹丽丽, 等	3479 - 3488
20	恒定渗流作用下泥石流起动过程冲刷试验分析	杨顺, 欧国强, 王钧, 等	3489 - 3495
21	西藏邦铺矿区花岗岩剪切流变本构研究及其开挖边坡长期稳定性分析	王新刚, 胡斌, 连宝琴, 等	3496 - 3502
22	基于无限边坡算法的降雨型滑坡预警系统的模型试验研究	王俊, 黄润秋, 聂闻, 等	3503 - 3510
23	直接加固软弱下卧层的地基工作性状模型试验研究	胡海涛, 夏力农, 廖常斌, 等	3511 - 3516
24	三峡库区黄土坡滑坡非饱和水力参数研究	简文星, 许强, 吴韩, 等	3517 - 3522
25	孤岛综放面冲击地压前兆信息识别及多参数预警研究	王春秋, 蒋邦友, 顾士坦, 等	3523 - 3530
26	考虑土拱效应的疏排桩支护基坑内力和变形分析	古海东, 杨敏	3531 - 3540
27	基于最大熵原理的黄土丘陵区地质灾害规模频率分布研究	邱海军, 崔鹏, 曹明明, 等	3541 - 3549
28	膨胀土膨胀模型及边坡工程应用研究	黄斌, 程展林, 徐晗	3550 - 3555

(未完, 见第1814页)