

基于能量耗散修正的 Boom clay 上下加载面模型及其数值实施

龚哲¹, 陈卫忠^{1,2}, 于洪丹¹, 马永尚¹, 袁克阔³, 李香玲⁴

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 山东 济南 250061; 3. 中煤科工集团西安研究院有限公司, 陕西 西安 710077; 4. Euridice, SCK·CEN 比利时核研究中心, 比利时 摩尔 2400)

摘要: 针对剑桥模型不适用于超固结土和结构性土的局限性, 引入上下加载面模型以描述 Boom clay 的结构性; 基于 Boom clay 的屈服面的特点, 通过修改能量耗散函数对上下加载面的形状进行了修正, 构造一个更好地反映其特性的弹塑性模型; 以有限元程序 ABAQUS 的 UMAT 子程序接口为平台, 采用隐式积分算法——最近点映射法(closest point projection method, CPPM)实现了模型的二次开发; 最后利用该模型对不同围压下的 Boom clay 不排水三轴试验进行了模拟, 并将该模型的计算结果与修正剑桥模型的计算结果以及试验实测结果进行比较, 结果表明, 该模型能较好地反映 Boom clay 在剪切过程中的结构性演化, 且在一定程度上纠正了常规上下加载面模型高估重超固结土峰值强度而低估正常固结土和轻超固结土峰值强度的问题。

关键词: 土力学; 上下加载面; 能量耗散; 超固结; 结构性; 应力积分算法

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2015)06-1218-10

A MODIFIED SUPER-SUBLOADING SURFACE MODEL BASED ON ENERGY DISSIPATION FOR BOOM CLAY AND ITS NUMERICAL IMPLEMENTATION

GONG Zhe¹, CHEN Weizhong^{1,2}, YU Hongdan¹, MA Yongshang¹, YUAN Kekuo³, LI Xiangling⁴

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. Geotechnical and Structural Engineering Research Center, Shandong University, Jinan, Shandong 250061, China; 3. Xi'an Research Institute, China Coal Technology and Engineering Group Corp, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 4. Euridice, SCK·CEN, Belgian Nuclear Research Centre, Mol 2400, Belgium)

Abstract: Due to the limitation of modified Cam-clay model, which cannot depict the over consolidated or structured clay, the concept of super-subloading surface was introduced to describe the destruction of Boom clay. According to the characteristics of the yield surface of Boom clay, the super-subloading surface model was modified based on energy dissipation. Adopting the closest point projection method(CPPM), the UMAT subroutine of the developed model was implemented in the finite element modeling code ABAQUS. With the developed model and the modified Cam-clay model, numerical simulations to the undrained triaxial compression tests on Boom clay under the different confining pressures were performed. The simulated results with two different models were compared with the test results. It was shown that the developed model depicted the destruction process of Boom clay during shearing and the peak strength of over consolidated clay decreased in compared with the super-sub loading surface model.

Key words: soil mechanics; super-subloading surface; energy dissipation; over consolidation; structure characteristics; stress iteration algorithm

收稿日期: 2014-09-01; **修回日期:** 2014-10-24

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(51225902); 国家自然科学基金资助项目(51109207)

作者简介: 龚哲(1988-), 男, 2010年毕业于武汉大学水利水电工程专业, 现为博士研究生, 主要从事软岩多场耦合长期力学性质方面的研究工作。E-mail: zhe_gong_gucas@hotmail.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2014.1202

1 引言

Boom clay 地层是属第三系鲁珀利组的沉积黏土，主要分布在比利时东北部。由于 Boom clay 化学上的稳定，具有良好的核素滞留能力和极低的渗透性、以及遇水自愈合等有利性质，并且在地层厚度和均质性方面满足需要，被选为比利时的核废料地质处置场址^[1]。比利时核研究中心建立了 HADES 地下实验室，对 Boom clay 的特性进行了大量现场试验和室内试验^[2]。

G. Baldi 等^[3-4]总结了大量 Boom clay 的三轴排水/不排水压缩试验数据，将其在屈服点绘于 p - q 平面上，得到 Boom clay 的屈服面^[3]如图 1 所示。从图中可以明显看出，修正剑桥模型的椭圆形屈服面与 Boom clay 的屈服面存在较大的差别，高估了重超固结 Boom clay 的强度而低估了轻超固结土的强度。对此，G. Baldi 等^[3]建议采用帽盖模型作为 Boom clay 的屈服面。然而帽盖模型由于具有参数多、数值实现复杂、收敛性差等问题，实际使用非常困难。

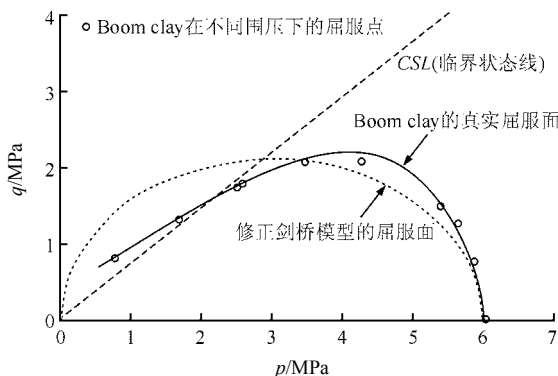


图 1 Boom clay 在 p - q 平面上的屈服面^[3]

Fig.1 Yield surface of Boom clay on p - q plane^[3]

I. F. Collin 与 P. A. Kelly^[5]基于能量耗散函数，建立了 α 模型。该模型严格满足热力学定律，结合了修正剑桥模型和线性摩擦模型的优点，引入了一个形状参数 α ，很大程度上纠正了修正剑桥模型高估超固结土强度的问题^[6-7]。因此采用 α 模型能更好地描述 Boom clay 的屈服面。

而另一方面，Boom clay 又是一种具有较强结构性的黏土^[8]。结构性土由于其内部的联结结构的作用，其应力-应变特性与重塑土有较大区别^[9]。剑桥模型和 α 模型均无法描述结构性黏土的应力-应变特性。K. Hashiguchi 和 M. Ueno^[10]在 1977 年提出了下加载面模型，该模型可以考虑超固结土在加

载过程的塑性累积过程；A. Asaoka 等^[11]于 2000 年在下加载面模型的基础上提出了上加载面的概念，以描述加载过程中因原状土的结构性的演化所造成的复杂应力-应变特性。上、下加载面相结合，可以通过引入较少几个具有明确物理意义的参数，描述不同类型土的力学特性，因此该模型得到了广泛的接受和采用；袁克阔等^[8, 12]建立了考虑黏聚力和拉压不等效应的上下加载面剑桥模型，并在此基础上建立了 Boom clay 的蠕变模型；B. Ye 等^[13]建立了一个可以考虑沙土在液化过程中应力诱导各向异性演化上下加载面模型；罗爱忠等^[14]采用上下加载面模型描述了结构性黄土的应力-应变特性。

为了结合上下加载面模型和 α 模型的优点，更好地模拟超固结结构性土复杂的应力-应变特性，基于能量耗散对上下加载面模型进行了修正，建立了一个能较好描述超固结结构性土和土体拉压异性的本构模型。以大型有限元软件 ABAQUS 为平台，采用最近点映射算法 (closest point projection method, CPPM)，编制了模型的本构程序。通过对不同超固结比下的排水三轴/不排水试验进行数值模拟，验证了模型的合理性和程序的可靠性。

2 基于能量耗散修正的上下加载面剑桥模型

2.1 上下加载面的定义及特点

自然界中的土在形成过程中由于其复杂的应力历史和物理化学过程形成土的结构性^[9]。结构性土由于其内部的联结结构，强度往往高于重塑土。

为了能描述超固结结构性土的强度，上下加载面模型在剑桥模型的基础上引入超固结状态参数 R 和结构性状态参数 R^* ，并由此得到 2 个物理曲面：代表当前应力状态的下加载面^[10]，以及代表结构性强度的上加载面^[11]。3 个物理曲面几何相似，上加载面与正常屈服面的比例为结构性参数 R^* ，上加载面与下加载面之间的比例为超固结状态参数 R 。若考虑抗拉强度，上下加载面模型可以用图 2 表示。图中， (p, q) 为当前应力状态； (p_n, q_n) 与 (p_s, q_s) 分别为对应于正常屈服面和上加载面的应力点； t_s 为抗拉强度； t_{ss}, t_{os} 分别为 t_s 在上、下加载面对应的点； p_c 为先期固结压力； p_{sc}, p_{oc} 分别为其在上、下加载面对应的点。

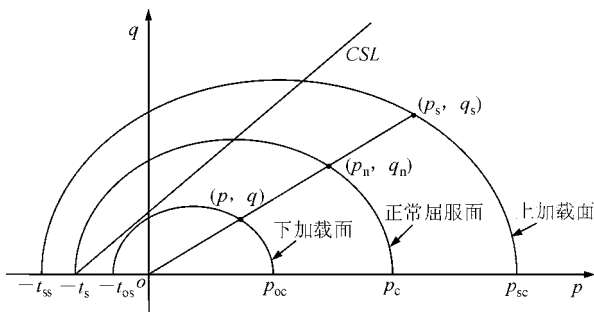


图2 考虑抗拉强度时的上下加载面模型示意图

Fig.2 Sketch of super-subloading surface model considering tensile strength

超固结状态参数 R 与结构性状态参数 R^* 分别定义为

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{p}{p_s} = \frac{q}{q_s} = \frac{p_{oc}}{p_{sc}} = \frac{t_{os}}{t_{ss}} \quad (0 < R < 1) \\ R^* &= \frac{p_n}{p_s} = \frac{q_n}{q_s} = \frac{p_{nc}}{p_{sc}} = \frac{t_{ns}}{t_{ss}} \quad (0 < R^* < 1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

当土的应力发生变化时，下加载面随之移动，超固结状态参数 R 随之发生变化。土的结构性在加载过程中会因为扰动而逐渐消失，与之对应的结构性参数 R^* 会随着塑性应变的累积而逐渐趋于 1，上加载面逐渐与正常屈服面重合。

需要指出的是，3 个屈服面的相似中心必须为原点，詹云刚等^[6,8]将相似中心选为 $(-t_s, 0)$ ，此时有

$$R = \frac{q}{q_s} = \frac{p_{oc} - t_s}{p_{sc} - t_s} = \frac{p - t_s}{p_s - t_s} \quad (2)$$

这样不仅失去了 R 反映超固结比的物理意义，而且在 $p < 0$ 时，可能会发生下负荷屈服面全部处于轴左侧的情况，这将导致能量耗散为负值的情况，显然不符合热力学第二定律。

常规的上下加载面模型的正常屈服面采用修正剑桥模型的屈服面，显然也存在高估重超固结土的峰值强度低估正常固结土和轻超固结土的峰值强度的问题，因此有必要对其屈服面的形状进行合理修正。

2.2 基于 α 模型改进的上下加载面模型

I. F. Collins 和 P. A. Kelly^[5]提出将修正剑桥模型的能量耗散势函数增量修改为

$$\delta\phi = \chi\delta e_v^p + \tau\delta e_\gamma^p = \frac{p_c}{2} \sqrt{(\delta e_v^p)^2 + (M\Pi\delta e_\gamma^p)^2} \quad (3a)$$

其中，

$$\Pi = \alpha + 2(1 + \alpha)p / p_c \quad (3b)$$

式中： χ 为背应力(back stress)，代表屈服面的“中心”^[15]， $\chi = p_c / 2$ ； τ 为对应 q 的耗散应力， $\tau = q$ ； e_v^p ， e_γ^p 分别为对应于剪切空间内的塑性体积应变和塑性剪切应变； M 为临界状态线斜率； α 为模型常数，且有 $0 < \alpha < 1$ 。

将式(3a)进行 Legendre 变换得到耗散空间内的屈服函数为

$$qf = M^2\Pi^2 \left(\gamma^2 - \frac{p_c^2}{4} \right) + \tau^2 = 0 \quad (4)$$

转换到真实应力空间的屈服函数为

$$f = M^2 \left[\alpha + \frac{2(1 + \alpha)p}{p_c} \right]^2 p(p - p_c) + q^2 = 0 \quad (5)$$

上述模型被称为 α 模型，参数 α 取不同的值时，屈服面在子午面上的轨迹如图 3 所示，从图中可见： $\alpha = 1$ 时模型退化为修正剑桥模型，其屈服面为一椭圆； $\alpha < 1$ 时该模型在很大程度上纠正了修正剑桥模型高估重超固结土强度而低估轻超固结土强度的问题^[6-7]。

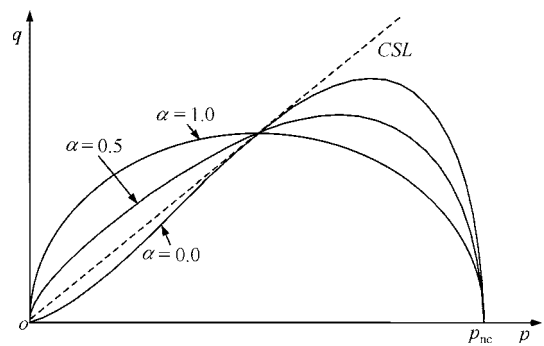


图3 α 模型的屈服面

Fig.3 Yield surface of α model

将 α 模型引入上下加载面模型，则下加载面的背应力应为

$$\chi = \frac{R}{2R^*} (p_c + t_s) \quad (6)$$

将能量耗散函数改写为

$$\delta W = \chi\delta e_v^p + \tau\delta e_\gamma^p =$$

$$\frac{R}{2R^*} (p_{nc} + t_{ns}) \sqrt{(\delta e_v^p)^2 + M^2\Pi^2 g(\theta)^2 (\delta e_\gamma^p)^2} \quad (7a)$$

其中，

$$\Pi = \alpha + (1 - \alpha) \frac{p + t_s}{p_c + t_s} \quad (7b)$$

$$g(\theta) = \frac{2\eta}{1 + \eta - (1 - \eta)\sin(3\theta)} \quad (7c)$$

$$\eta = \frac{3 - \sin\varphi}{3 + \sin\varphi} \quad (7d)$$

式中： θ 为 Lode 角， φ 为内摩擦角。

经 Legendre 变换得到下加载面的表达式为

$$f_s = M^2 \Pi^2 g(\theta)^2 \left(p + \frac{R}{R^*} t_s \right) \left(p - \frac{R}{R^*} p_c \right) + q^2 = 0 \quad (8)$$

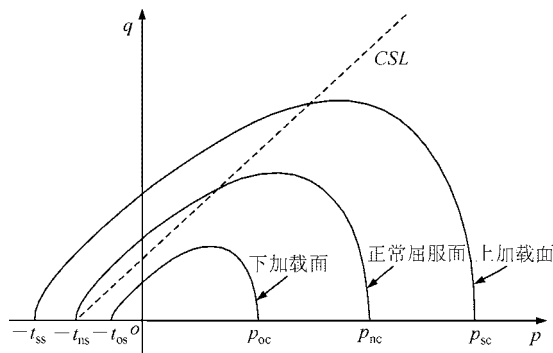
相应地可得到正常屈服面的表达式为

$$f = M^2 \Pi^2 g(\theta)^2 (p + t_s)(p - p_c) + q^2 = 0 \quad (9)$$

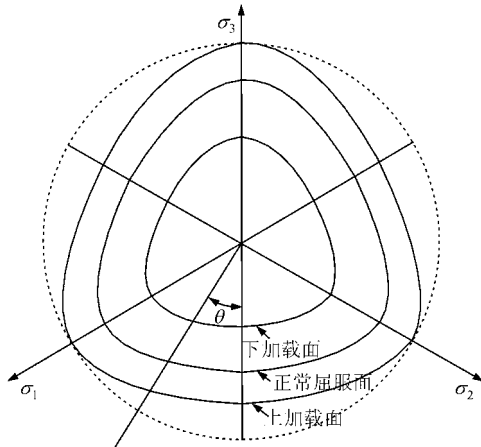
上加载面的表达式为

$$f_u = M^2 \Pi^2 g(\theta)^2 \left(p + \frac{1}{R^*} t_s \right) \left(p - \frac{1}{R^*} p_c \right) + q^2 = 0 \quad (10)$$

修正后的上下加载面模型在子午面和 π 平面上的屈服面如图 4 所示，从图中可见，该模型既保留了上下加载面模型描述结构性土的特点，又结合了 α 模型描述超固结土强度的优势，同时还能考虑土的拉压异性。



(a) 子午面上的屈服面



(b) π 平面上的屈服面

图 4 修正的上下加载面模型在子午面和 π 平面上的形状

Fig.4 Yield surfaces of the modified super-subloading surface model on meridian plane and π plane

2.3 弹性应力-应变关系

采用多孔介质非线性弹性模型，体积弹性模量

K 和剪切模量 G 分别为

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1+e}{\kappa} p = C_1 p \\ G &= \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} K = C_2 K \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1+e}{\kappa} \\ C_2 &= \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

式中： e 为孔隙比， κ 为压缩指数， μ 为泊松比。

则弹性应力-应变关系可以写为

$$\dot{\sigma} = \dot{p}\delta + \dot{s} \quad (12a)$$

其中，

$$\dot{p} = K \dot{\varepsilon}_v^e = C_1 p \dot{\varepsilon}_v^e \quad (12b)$$

$$\dot{s} = 2C_1 C_2 p \dot{e}^e \quad (12c)$$

式中： δ 为 Kronecker 算子， \dot{s} 为偏应力张量， $\dot{\varepsilon}_v^e$ 为弹性体积应变， \dot{e}^e 为偏应变张量。

2.4 塑性流动规律

在耗散空间内由正交条件可得

$$d\varepsilon_v^p = d\lambda \frac{\partial f_s}{\partial \chi} = 2d\lambda M^2 \Pi^2 \chi = d\lambda \frac{R}{R^*} M^2 \Pi^2 (p_{nc} + t_{ns}) \quad (13)$$

$$d\varepsilon_\gamma^p = d\lambda \frac{\partial f_s}{\partial \tau} = 2d\lambda \tau = 2d\lambda \frac{R}{R^*} q \quad (14)$$

式中： ε_v^p 为塑性体应变， ε_γ^p 为塑性等效剪应变， λ 为塑性乘子。

显然，本模型的流动法则并非关联流动。正因为如此，在屈服面形状发生改变之后，依然保留了剑桥模型在临界状态线上体积不变的重要性质。

2.5 塑性硬化规律

上下加载面模型共有 3 个硬化参数，分别为 p_c ， R 和 R^* ，其中 p_c 的演化规律与剑桥模型相同：

$$dp_c = C_3 p_c d\varepsilon_v^p \quad (15a)$$

其中，

$$C_3 = \frac{1+e_0}{\lambda - \kappa} \quad (15b)$$

式中： λ 为回弹指数， e_0 为初始孔隙比。

而 R 和 R^* 的演化规律采用 K. Hashiguchi 等^[10-11] 建议的形式：

$$\left. \begin{aligned} dR &= -C_3 M m \ln R d\epsilon_v^p \\ dR^* &= C_3 M R^* [1 - (R^*)^a] d\epsilon_v^p \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中： m 与 a 为模型参数。值得注意的是，卸载过程虽然纯弹性的，但参数 R 会随着应力状态改变而发生变化。

3 模型在 ABAQUS 中的数值实现

3.1 应力-应变关系在增量步上的积分

对于采用多孔介质弹性的弹塑性本构模型，弹性模量在每个增量步中是一个变化的量。更新应力需对应力-应变关系在增量步上积分：

$$\sigma^{n+1} = p^{n+1} \delta + s^{n+1} = (p^n + \Delta p) \delta + s^n + \Delta s \quad (17)$$

其中，

$$\Delta p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} K \dot{\epsilon}_v^e dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 p \dot{\epsilon}_v^e dt \quad (18)$$

$$\Delta s = \int_{t_n}^{t_{n+1}} G \dot{e}^e dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 C_2 p \dot{e}^e dt \quad (19)$$

一种处理方法是在增量步内采用 σ^n 处的切线弹性模量^[6,8]，如图 5(a)所示，可表示为

$$\Delta p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 p \dot{\epsilon}_v^e dt \approx p^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 \dot{\epsilon}_v^e dt \quad (20)$$

$$\Delta s = \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 C_2 p \dot{e}^e dt \approx p^n \int_{t_n}^{t_{n+1}} C_1 C_2 \dot{e}^e dt \quad (21)$$

这种算法相对简单，易于编程实施，但是会造成较大误差积累^[16]。

R. I. Borja^[17]提出了一种采用割线弹模的算法(见图 5(b))，可以得到精确的计算结果。在小应变的情况下，同一个增量内的孔隙比 e 变化很小，在增量步将其内当成常数处理对算法的精度影响可以忽略。将式(12b)在增量步内积分可得

$$p^{n+1} = p^n e^{C_1 \Delta \epsilon_v^e} \quad (22)$$

得到割线体积模量为

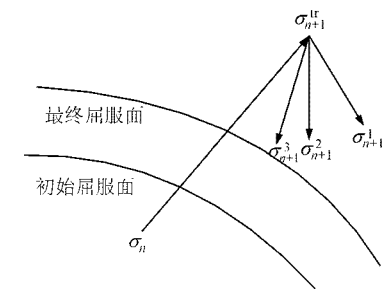
$$\bar{K} = \frac{p^n (e^{C_1 \Delta \epsilon_v^e} - 1)}{C_1 \Delta \epsilon_v^e} \quad (23)$$

进而得到割线剪切模量为

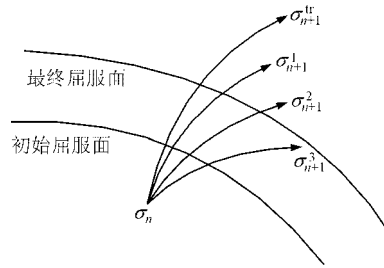
$$\bar{G} = C_2 \bar{K} = \frac{C_2 p^n (e^{C_1 \Delta \epsilon_v^e} - 1)}{C_1 \Delta \epsilon_v^e} \quad (24)$$

偏应力增量为

$$\Delta s = \bar{G} \Delta e^e \quad (25)$$



(a) 采用切线模量^[16]



(b) 采用割线模量^[13]

图 5 采用切线模量进行弹性计算和采用割线模量进行计算的最近点映射算法示意图

Fig.5 Sketch of procedure of closest point projection method with the tangent and the secant elastic moduli

将式(25)代入式(17)即可得到

$$\sigma^{n+1} = p^n e^{C_1 \Delta \epsilon_v^e} \delta + s^n + \bar{G} \Delta e^e \quad (26)$$

采用这种积分方法在增量步取得较大的情况下仍然可以得到比较精确的结果，因此本文采用这种应力积分算法。

3.2 最近点映射算法

最近点映射算法(closest point projection method, CPPM)是一种隐式向后欧拉应力积分算法，该算法首先假设应变增量全是弹性的，得到一个弹性试探应力，若该试探应力超出了屈服面则通过塑性修正迭代将应力拉回屈服面，因其总是在屈服面上找到距离试探应力最近的一点而得名^[18]。

算法的关键在于当应力超出屈服面时，通过求解控制方程组得到应力、内变量与塑性应变增量。

对于最近点迭代法，塑性应变增量 $\Delta \epsilon^p$ 可表示为

$$\Delta \epsilon^p = \Delta \Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_\chi} \right)^{n+1} = \Delta \Lambda r^{n+1} \quad (27a)$$

其中，

$$r = \partial f / \partial \sigma_\chi \quad (27b)$$

式中： σ_χ 为耗散应力。增量步结束时的应力为

$$\sigma_{ij}^{n+1} = s_{ij}^n + 2\bar{G}\Delta\omega_{ij} + p_n e^{\nu} \delta_{ij} \quad (28)$$

$$\left. \frac{1}{3} \left(\frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial \zeta^{n+1}} \right)^T \right] \quad (38)$$

其中，

$$\nu = C_1(\Delta\varepsilon_{kk} - \Delta A r_{kk}^{n+1}) \quad (29)$$

$$\Delta\omega_{ij} = \Delta A \left(r_{ij}^{n+1} - \frac{1}{3} r_{kk}^{n+1} \delta_{ij} \right) \quad (30)$$

硬化参数的演化方程为

$$\left. \begin{aligned} p_c^{n+1} &= p_c^n e^{C_3 \Delta A r_v^{n+1}} \\ R^{n+1} &= R^n - C_3 m \ln R \Delta A r_\gamma^{n+1} \\ (R^*)^{n+1} &= (R^*)^n + C_3 R^* \{1 - [(R^*)^n]^a\} \Delta A r_\gamma^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

为了表述方便，将其写成如下形式：

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \Delta A s^{n+1} \quad (32a)$$

其中，

$$s = \partial \zeta / \partial A \quad (32b)$$

式中： ζ 为硬化参数。在塑性流动过程中，有

$$f_s(\sigma^{n+1}, \zeta^{n+1}) \equiv 0 \quad (33)$$

式(28)，(32a)，(33)构成了最近点迭代法的控制方程组，可采用 Newton-Raphson 迭代法求解，其残差方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_\sigma &= \boldsymbol{\sigma}^{n+1} - s^n - 2\bar{G}\Delta\boldsymbol{\omega} + p_n e^{\nu} \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{R}_\zeta &= \zeta^{n+1} - \zeta^n - \Delta A s^{n+1} \\ \mathbf{R}_f &= f_s(\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \zeta^{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

将其 Taylor 展开，写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{T} \\ \mathbf{H} & \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{J}^T & \mathbf{E}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \zeta \\ \delta A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_\sigma^1 \\ -\mathbf{R}_\zeta^1 \\ -\mathbf{R}_f^1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中，

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{I} - C_1 \Delta A \boldsymbol{\beta} \left(\frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}} \right)^T + 2\Delta A \bar{G} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}} \right)^T - \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \left(\frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}} \right)^T \right] \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\beta} = 2\Delta\boldsymbol{\omega} \frac{\bar{G} p^n e^{\nu}}{\nu} - 2\Delta\boldsymbol{\omega} \frac{\bar{G}}{\nu} + p^n e^{\nu} \boldsymbol{\delta} \quad (37)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial \zeta} = C_1 \Delta A \boldsymbol{\beta} \left(\frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial \zeta^{n+1}} \right)^T + 2\Delta A \bar{G} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}^{n+1}}{\partial \zeta^{n+1}} \right)^T - \right.$$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{R}_\sigma}{\partial A} = C_1 r_v^{n+1} \boldsymbol{\beta} + 2\Delta A \bar{G} (\Delta\varepsilon_{kk} - \Delta A r_{kk}^{n+1}) \quad (39)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{R}_\zeta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 - c_3 \Delta A r_v^{n+1} p_c^n e^{c_3 \Delta A r_v^{n+1}} \frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial p_c^{n+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{R}_\zeta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} C_3 \Delta A r_v^{n+1} p_c^n e^{c_3 \Delta A r_v^{n+1}} \left(\frac{\partial r_v^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \\ C_3 M m \ln R \Delta A \left(\frac{\partial r_\gamma^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \\ -C_3 M R^* \{1 - [(R^*)^n]^a\} \Delta A \left(\frac{\partial r_\gamma^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{R}_\zeta}{\partial A} = \begin{bmatrix} -C_3 r_v^{n+1} p_c^n e^{c_3 \Delta A r_v^{n+1}} \\ C_3 m \ln R r_\gamma^{n+1} \\ -C_3 R^* \{1 - [(R^*)^n]^a\} r_\gamma^{n+1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \quad (43)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{R}_f}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_s}{\partial \zeta} \quad (44)$$

求解方程组式(35)得

$$\delta A = \frac{\mathbf{R}_f^1 - \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{R} \mathbf{R}_\sigma^1 + \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_\zeta^1 - \mathbf{E}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_\zeta^1}{\mathbf{E}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} + \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{R} \mathbf{r}} \quad (45)$$

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_\zeta^1 - \mathbf{R} \mathbf{R}_\sigma^1 - \bar{\mathbf{R}} \delta A \quad (46)$$

$$\delta \zeta = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_\zeta^1 (\mathbf{R}_\sigma^1 + \mathbf{B} \delta A + \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\sigma}) \quad (47)$$

其中，

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} \quad (48)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{J} - \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{n} - \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H} \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{T} - \mathbf{Q} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} \quad (50)$$

应力积分算法遵循以下步骤：

(1) 弹性试探

假设应变增量全部为弹性应变，则计算弹性试探应力 σ^{trial} 为

$$\sigma^{trial} = s^n + p^n e^{C_1 \Delta \epsilon_v} \delta + \bar{G} \Delta \epsilon \quad (51)$$

其中，

$$\bar{G} = \frac{C_2 p^n (e^{C_1 \Delta \epsilon_v} - 1)}{C_1 \Delta \epsilon_v} \quad (52)$$

(2) 检查屈服条件

将 σ^{trial} ， ζ^n 代入屈服函数，检查是否已经达到屈服状态。屈服函数计算式为

$$f^{trial} = f_s(\sigma^{trial}, \zeta^n) \quad (53)$$

若 $f^{trial} > TOL_f$ (TOL_f 为屈服函数容差)，则认为没有达到屈服状态，更新应力 $\sigma^{n+1} \leftarrow \sigma^{trial}$ ，根据 σ^{n+1} 更新 R^{n+1} ，转至步骤(6)；否则，转至步骤(3)。

(3) 预估塑性乘子 $\Delta \lambda$

Newton-Raphson 迭代法并非无条件收敛，如果迭代的初值选择不合理，可能会出现不收敛的情况。为了尽量避免此种情况的发生，A. Anandarajah^[18] 提出了先采用显式截平面法预测塑性乘子，再以此为初值利用 Newton-Raphson 迭代法得到精确结果。

预估的塑性乘子为

$$\Delta \lambda = \frac{R_f^{trial}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_s}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_s}{\partial \sigma} \end{bmatrix}^T s + n^T R r} \quad (54)$$

式中： R_f^{trial} 为试算得到的残差。将 $\Delta \lambda$ 代入式(46)，(47)得到 $\delta \sigma$ ， $\delta \zeta$ 。按式(28)，(31)更新 ζ^{n+1} ， σ^{n+1} 。

(4) 计算残差并检查收敛性

将 σ^{n+1} ， ζ^{n+1} ， $\Delta \lambda^{n+1}$ 代入式(34)得 R_σ ， R_ζ ， R_f 。判断收敛性，收敛准则为

$$\left. \begin{aligned} E_\sigma &= \|R_\sigma\| / \|\sigma_{n+1}\| < TOL_\sigma \\ E_\zeta &= \|R_\zeta\| / \|\zeta_{n+1}\| < TOL_\zeta \\ |f| &= |R_f| < TOL_f \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

式中： TOL_σ ， TOL_ζ 分别为应力和硬化参数的容差。若满足式(55)，则计算已经收敛，否则进入步骤(5)。

(5) 塑性修正

根据式(45)~(47)计算 $\delta \lambda$ ， $\delta \sigma$ ， $\delta \zeta$ 。更新 σ^{n+1} ， ζ^{n+1} ， $\Delta \lambda^{n+1}$ ：

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &\leftarrow \sigma^{n+1} + \delta \sigma \\ \zeta^{n+1} &\leftarrow \zeta^{n+1} + \delta \zeta \end{aligned}$$

$$\Delta \lambda^{n+1} \leftarrow \Delta \lambda^{n+1} + \delta \lambda$$

转至步骤(4)。

(6) 更新弹性应变、塑性应变、塑性应变、孔隙比。

3.3 一致性切线模量的确定

J. C. Simo 和 R. L. Taylor^[19]证明了通过使用一致性切线模量可以使有限元计算二阶收敛。采用最近点映射算法可以得到精确的一致性切线模量。

将算法的控制方程式在 σ^{n+1} 处进行微分：

$$\begin{bmatrix} P & Q & T \\ H & K & B \\ J^T & E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \dot{\epsilon} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

式中： C 为刚度矩阵。

解式(56)得

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{n}^T R C \dot{\epsilon}}{E^T K^{-1} B + n^T R r} \quad (57)$$

$$\dot{\sigma} = R C \dot{\epsilon} - R \bar{r} \dot{\lambda} \quad (58)$$

将式(57)代入式(58)得

$$\dot{\sigma} = \left[R C - \frac{(R \bar{r})(\bar{n}^T R C)}{E^T K^{-1} B + n^T R r} \right] \dot{\epsilon} = D_{const} \dot{\epsilon} \quad (59)$$

式中： D_{const} 为一致性切线模量。

3.4 UMAT 子程序二次开发

ABAQUS 提供了以 FORTRAN 语言编写的 UMAT 用户子程序接口，利用该接口，可以进行二次开发，定义材料的本构关系。本模型的 UMAT 子程序算法如图 6 所示。

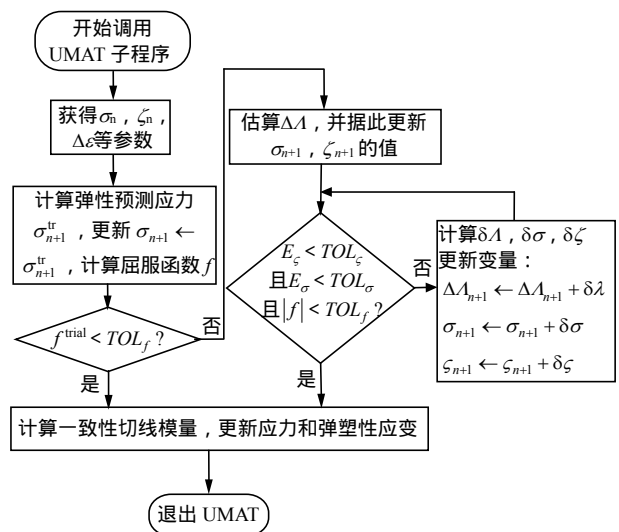


图 6 UMAT 子程序的流程图
Fig.6 Flow of subroutine for UMAT

4 Boom clay 的不排水三轴压缩试验结果与仿真结果的对比

S. T. Horseman 等^[20]对 Boom clay 进行了三轴固结不排水压缩试验。试验过程中，先将 Boom clay 完全饱和，再加载到设定围压值，最后关闭阀门，对采用位移控制方式进行压缩试验。

为了检验模型的合理性，分别采取修正剑桥模型、常规的上下加载面模型和本文修正的上下加载面模型对 S. T. Horseman 等^[20]中 Boom clay 的三轴不排水压缩试验进行了模拟。模拟所采用的单元为轴对称渗流应力耦合单元(CAX4RP)。模拟的过程为：先在底部约束竖向的位移，在四周设置不排水边界，然后施加围压达到应力平衡状态，最后采用位移控制的方式进行加载。Boom clay 的模型参数通过反演获得，如表 2 所示。

表 2 Boom clay 的模型参数

Table 2 Model parameters of Boom clay

e_0	λ	κ	μ	M	p_c/MPa	t_s/MPa	α	R^*
0.67	0.14	0.035	0.125	0.65	5.5	0.5	0.63	0.35

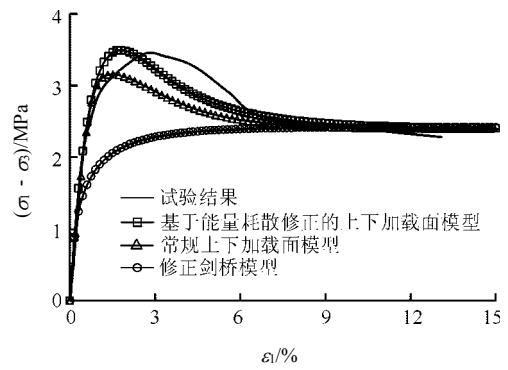
4.1 应力-应变曲线与超孔压变化规律

图 7, 8 给出了 3 个模型计算得到的不同围压 (5.4, 2.5 和 0.9 MPa) 下不排水三轴压缩试验的应力-应变与超孔压的试验曲线与数值计算结果的对比。从图中可以看出：

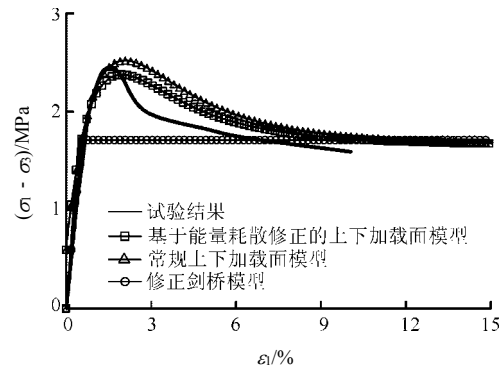
(1) 3 个模型在达到临界状态时的偏压和超孔压完全一致。这是因为采用上下加载面模型计算过程中结构性参数 R^* 与超固结参数 R 不断演化并逐渐趋向于 1，此时模型退化为修正剑桥模型。而修正的上下加载面模型采用非关联的流动法则，依然保留了修正剑桥模型在临界状态线上体积不变的性质。

(2) 上下加载面模型相比于修正剑桥模型能更好地描述 Boom clay 的应力峰值和应变软化等结构性特点，由于结构性参数的演化的影响，采用上下加载面模型计算得到的超孔压曲线存在先升高再降低然后再升高的趋势，并最终达到临界状态。

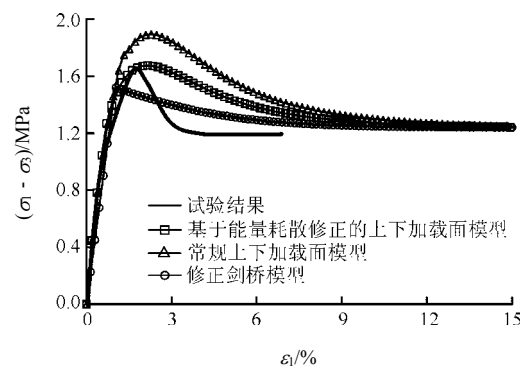
(3) 围压为 5.4 MPa 时 ($OCR \approx 1$)，修正的上下加载面模型的应力峰值高于常规的上下加载面模



(a) 围压为 5.4 MPa



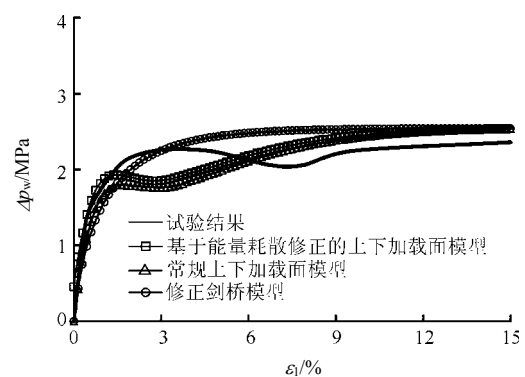
(b) 围压为 2.5 MPa



(c) 围压为 0.9 MPa

图 7 不同围压下不排水三轴压缩试验的应力-应变试验曲线与数值计算结果的对比

Fig.7 Comparisons of experimental results and numerical results of undrained triaxial compression tests under different confining pressures



(a) 围压为 5.4 MPa

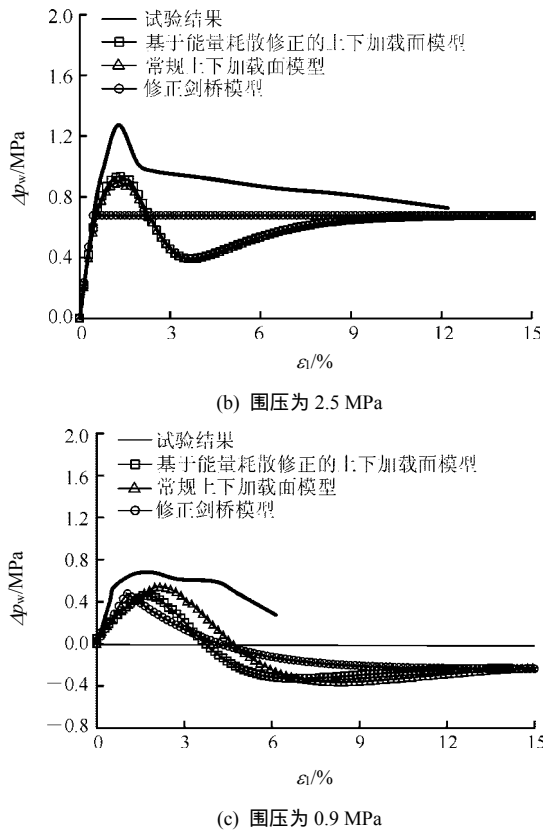


图 8 不同围压下不排水三轴压缩试验的超孔压试验曲线与数值计算结果的对比

Fig.8 Comparisons of experimental and numerical excess pore pressures in undrained triaxial compression tests under different confining pressures

型，而且峰值出现得更晚。而在围压为 2.5 和 0.9 MPa 时采用修正上下加载面模型计算的峰值低于常规的上下加载面模型。孔压的演化也与之类似。显然经过修正的上下加载面模型的计算峰值与试验实测的峰值更加接近。

4.2 加载过程中应力路径

图 9 给出了 3 个模型计算得到不排水三轴压缩试验过程中的应力路径与试验实测的对比。从图中可以看出，修正剑桥模型计算得到的应力路径与实测结果相差较大，无法模拟 Boom clay 的应力峰值；常规的上下加载面模型大大高估了 0.9 MPa 围压下 Boom clay 的峰值强度，采用修正后的上下加载面模型的峰值强度则明显下降。在 2.5 MPa 的围压下，本文所提出的模型峰值强度略低于常规上下加载面模型，与试验曲线的吻合度依然较好。在 5.4 MPa 的围压下时(正常固结)，修正后的模型计算得到的峰值强度则提高了很多，与试验结果更吻合。在上述 3 种情况下，修正后的上下加载面模型与常规模型相比，其计算得到的应力路径与试验所得应力路径更加吻合。

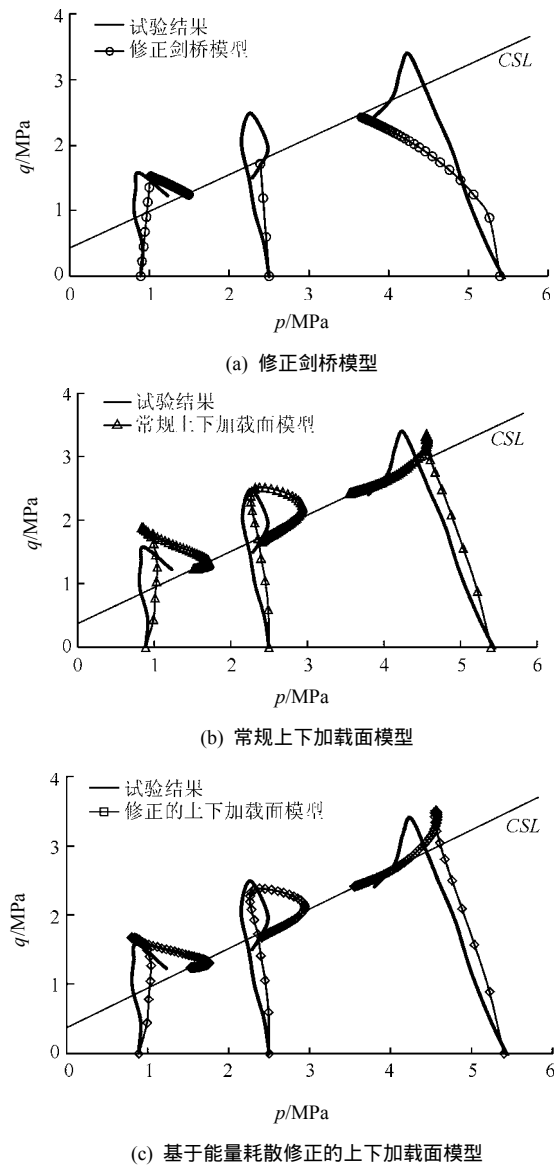


图 9 不排水压缩过程中的应力路径与计算结果的对比

Fig.9 Comparisons of stress paths during undrained compression process from experimental and numerical results

5 结论

本文对 Boom clay 的本构模型开展了研究，将 α 模型引入到上下加载面模型中。既保留了上下加载面模型描述结构性黏土的优点，又改正了其屈服面。采用最近点映射算法(CPPM)编制了模型的 UMAT 子程序，实现了模型在 ABAQUS 里的二次开发。通过模拟处于不同超固结比下的 Boom clay 不排水三轴压缩试验，结果表明改进后的上下加载面模型能更好地反映 Boom clay 的应力-应变特性：一方面该模型能较好地描述 Boom clay 结构性特征，另一方面又在一定程度上纠正了常规的上下加载面模型高估重超固结土的峰值强度而低估正常

固结和轻超固结土强度的问题。将温度对结构性黏土的应力-应变特性的影响加入该模型将是下一阶段的工作。

参考文献(References) :

- [1] WITHERSPOON P A. Geological problems in radioactive waste isolation-second worldwide review[R]. Berkeley : Berkeley National Laboratory , 1996.
- [2] BERNIER F , DEMARCHE M , BEL J. The Belgian demonstration programme related to the disposal of high level and long lived radioactive waste : achievements and future works[C]// Symposium Proceedings. Scientific Basis for Nuclear Waste Management XXIX. Gent : Materials Research Society , 2004 : 103 – 110.
- [3] BALDI G , HUECKEL T , PEANO A , et al. Developments in modelling of thermo-hydro-geomechanical behaviour of Boom clay and clay-based buffer materials[R]. Luxembourg : Office for Official Publications of the European Communities , 1991.
- [4] SULTAN N , CUI Y J , DELAGE P. Yielding and plastic behaviour of Boom clay[J]. Géotechnique , 2010 , 60(9) : 657 – 666.
- [5] COLLINS I F , KELLY P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. Géotechnique , 2002 , 52(7) : 507 – 518.
- [6] 詹云刚,袁非凡,栾茂田. 基于次加载面理论改进的 ALPHA 模型及其数值实施[J]. 岩土力学, 2010 , 31(2) : 407 – 415.(ZHAN Yungang , YUAN Fanfan , LUAN Maotian. A modified ALPHA model based on subloading surface theory and its numerical implementation[J]. Rock and Soil Mechanics , 2010 , 31(2) : 407 – 415.(in Chinese))
- [7] 李相崧. 饱和土弹塑性理论的数理基础——纪念黄文熙教授[J]. 岩土工程学报, 2013 , 35(1) : 1 – 33.(LI Xiangsong. Physical and mathematical bases of elastoplastic theories on saturated soils —in memory of professor HUANG Wenxi[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 2013 , 35(1) : 1 – 33.(in Chinese))
- [8] 袁克阔,陈卫忠,赵武胜. 考虑黏聚力的上下加载面修正剑桥模型及数值实现[J]. 岩石力学与工程学报, 2013 , 32(4) : 842 – 848. (YUAN Kekuo , CHEN Weizhong , ZHAO Wusheng. Super-subloading surface modified cam-clay model considering cohesion and its numerical implementation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2013 , 32(4) : 842 – 848.(in Chinese))
- [9] 张 锋. 计算土力学[M]. 北京 : 人民交通出版社 , 2007 : 31. (ZHANG Feng. Computational soil mechanics[M]. Beijing : China Communications Press , 2007 : 31.(in Chinese))
- [10] HASHIGUCHI K , UENO M. Elastoplastic constitutive laws of granular materials[C]// Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo : Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering , 1977 : 73 – 82.
- [11] ASAOKA A , NAKANO M , NODA T. Super loading yield surface concept for highly structured soil behavior[J]. Soils and Foundations , 2000 , 40(2) : 99 – 110.
- [12] 陈卫忠,袁克阔,于洪丹,等. Boom clay 蠕变特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013 , 32(10) : 1 981 – 1 990.(CHEN Weizhong , YUAN Kekuo , YU Hongdan , et al. Creep behavior of Boom clay[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2013 , 32(10) : 1 981 – 1 990.(in Chinese))
- [13] YE B , YE G L , ZHANG F. Numerical modeling of changes in anisotropy during liquefaction using a generalized constitutive model[J]. Computers and Geotechnics , 2012 , 42 : 62 – 72.
- [14] 罗爱忠,邵生俊,陈昌禄. 黄土的修正上下加载面模型研究岩土力学[J]. 岩土力学, 2013 , 34(增 2) : 128 – 133.(LUO Aizhong , SHAO Shengjun , CHEN Changlu. Research on modified super-loading and sub-loading yield surface model of loess[J]. Rock and Soil Mechanics , 2013 , 34(Supp.2) : 128 – 133.(in Chinese))
- [15] LEMAITRE J L , CHABOCHE J L. Mechanics of solid materials[M]. Cambridge : Cambridge University Press , 1990 : 81.
- [16] SHENG D , SLOAN S W , YU H S. Aspects of finite element implementation of critical state models[J]. Computational Mechanics , 2000 , 26(2) : 185 – 196.
- [17] BORJA R I. Cam-clay plasticity , part II : implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 1991 , 88(2) : 225 – 240.
- [18] ANANDARAJAH A. Computational methods in elasticity and plasticity[M]. New York : Springer Press , 2010 : 423 – 512.
- [19] SIMO J C , TAYLOR R L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 1985 , 48(1) : 101 – 118.
- [20] HORSEMAN S T , WINTER M G , ENTWISTLE D C. Geotechnical characterization of Boom clay in relation to disposal of radioactive waste[R]. [S. l.] : Commission of the European Communities , 1987.