

基于软化本构的有限元强度折减法

孙 聪, 李春光, 郑 宏, 孙冠华

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘要: 针对目前有限元强度折减法每次计算均从零应力状态算起, 需要大量试算的缺点, 提出基于软化本构的有限元强度折减法。该方法仅需一次性施加所有外力, 通过折减系数的增量迭代来使边坡进入极限平衡状态。该方法直接模拟强度折减过程, 在此过程中, 屈服面会不断地收缩, 通过应力跌落和塑性流动来调整各高斯点的应力值来使系统达到平衡, 直至系统进入极限平衡为止。最后给出 2 个算例验证了本文方法的可靠性。

关键词: 边坡工程; 有限元强度折减; 软化本构; 安全系数; 应力跌落

中图分类号: P 642

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2014)10-2147-07

FINITE ELEMENT METHOD OF STRENGTH REDUCTION WITH SOFTENING CONSTITUTIVE MODEL

SUN Cong, LI Chunguang, ZHENG Hong, SUN Guanhua

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: A new iteration method with the softening constitutive model is proposed to overcome the shortcomings of the existing method of strength reduction in FEM that every computational process started from the zero stress state. In the new method, the strength reduction factor to bring slope into the limit equilibrium state after all the external loads applied was increased gradually. The method directly simulated the process of strength reduction. During the process of the yielding surface shrinking, the stresses at each Gauss' point reached the equilibrium state through stress drop and plastic flow. Two examples are given to prove the effectiveness of the method.

Key words: slope engineering; strength reduction FEM; softening constitutive model; safety factor; stress drop course

1 引 言

自从 O. C. Zienkiewicz 等^[1]提出有限元强度折减法以来, 它在国内外已经有十几年的发展, 通过不断降低边坡岩土体的抗剪强度参数来使其达到极限破坏状态, 此刻的强度折减系数即是所需要的安全系数。该方法可以充分利用有限元的优点: 不用事先假设滑动面的位置和形状; 可以充分考虑力和

变形两者的关系; 能模拟工程的施工力学行为等。正是由于有限元强度折减相对于极限平衡法的众多优点, 已经有大量工程采用此方法来进行边坡稳定性分析。

目前, 国内外学者针对此方法进行了大量的理论研究, T. Matsui 和 K. C. San^[2]比较早地将有限元和剪切强度折减技术结合起来进行边坡的稳定性分析; D. V. Griffiths 和 P. A. Lane^[3]基于有限元强度折减法得到了与传统方法比较接近的安全系数; E.

收稿日期: 2013-10-27; **修回日期:** 2014-06-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172313); 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2011CB013505)

作者简介: 孙 聪(1989-), 男, 2010年毕业于中国地质大学(武汉)岩土工程专业, 现为博士研究生, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: sunson0324@qq.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2014.10.023

Dawson 等^[4]基于 Hoek-Brown 准则对强度折减法进行了研究；J. B. Lechman 和 D. V. Griffiths^[5]运用有限元强度折减分析了边坡的变形破坏特征。国内学者中，郑颖人团队在此方面做了大量的研究，例如徐干成和郑颖人^[6]提出了莫尔-库仑等面积圆；张鲁渝等^[7]探讨了不同影响因素下边坡稳定安全系数的精度问题；赵尚毅等^[8]将强度折减技术应用于节理岩质边坡；郑宏等^[9-10]针对 3 种不同安全系数的定义分析了产生误差的原因，并提出了当采用强度折减法对强度参数同步折减的同时，应使内摩擦角 φ 和泊松比 μ 满足不等式 $\sin \varphi \leq 1 - 2\mu$ ；陈卫兵等^[11]在进行强度折减时，把岩土体的流变特征考虑了进来，得到了一些有意义的结论。

现有的方法均是通过人工对强度折减值进行不断地试算，直到达到不收敛或者塑性区贯通为止，每折减一次都要重新运行一次弹塑性有限元计算。其实对强度进行折减的过程即是材料软化的过程，每软化一次，屈服面便会收缩一次，当材料的强度参数承受不了外力，即满足不了力的收敛条件时，材料便会破坏，这时的折减值便是最终的安全系数值。宋二祥^[12]提出过新的思路，逐渐增大强度折减值，但该文并没有详细说明应力是如何跌落到强度折减后的屈服面上的。本文以 DP 准则为例，采用满足 Il'yushin 公设的脆塑性跌落过程，并给出了应力跌落点的解析解；设计了一套新的强度折减迭代算法，得到了边坡最终的安全系数。

2 基于软化角度的强度折减

2.1 有限元强度折减法

强度折减法即是强度参数降低法，基本原理就是不断降低材料的强度参数直至破坏，其临界折减系数被定义为安全系数：

$$\left. \begin{aligned} c' &= \frac{c}{k} \\ \varphi' &= \arctan \frac{\tan \varphi}{k} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： k 为折减系数， c 和 c' 分别为折减前后的黏聚力， φ 和 φ' 分别为折减前后的内摩擦角。此方法多是结合有限元技术开展的，也有不少研究是将其运用到有限差分^[13]、离散元^[14]等其他数值方法中。

2.2 应力跌落

随着折减系数的不断增大，材料的强度参数越来越小，其对应的应力空间中的屈服面也在逐渐收缩，应力跌落示意图如图 1 所示。实际上，每步的

折减过程可以看作是一系列脆塑性应力跌落过程。

图 1 中的 f_k 为对应折减系数为 k 的外屈服面， $f_{k+\Delta k}$ 为折减系数增加到 $k + \Delta k$ 时的内屈服面，在这个屈服面收缩的过程中，应力从点 A 跌落到点 B，点 B 应力应满足：

$$\sigma_B = \sigma_A + \Delta \sigma \quad (2a)$$

$$f_{k+\Delta k}(\sigma_A, k + \Delta k) > 0 \quad (2b)$$

$$f_{k+\Delta k}(\sigma_B, k + \Delta k) = 0 \quad (2c)$$

式中： $\Delta \sigma$ 为需要进行的应力跌落值。

将式(2c)泰勒展开：

$$f_{k+\Delta k}(\sigma_A + \Delta \sigma, k + \Delta k) = f_k(\sigma_A, k + \Delta k) + \frac{\partial f_k(\sigma_A, k + \Delta k)}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{1}{2} \Delta \sigma^T \frac{\partial^2 f_k(\sigma_A, k + \Delta k)}{\partial \sigma^2} \Delta \sigma + o(\Delta \sigma^T \Delta \sigma) \quad (3)$$

式中： $o(\Delta \sigma^T \Delta \sigma)$ 为一个关于 $\Delta \sigma^T \Delta \sigma$ 的高阶无穷小量。

$\Delta \sigma$ 满足：

$$\Delta \sigma = D \Delta \varepsilon_c = D(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_p) \quad (4)$$

式中： D 为弹性矩阵， $\Delta \varepsilon_p$ 为塑性应变增量， $\Delta \varepsilon_c$ 为弹性应变增量。因极限状态与应力路径无关，可以认为在屈服面发生收缩时应力将发生脆性跌落^[15]，即令 $\Delta \varepsilon = 0$ ，代入式(4)得到：

$$\Delta \sigma = -D \Delta \varepsilon_p \quad (5)$$

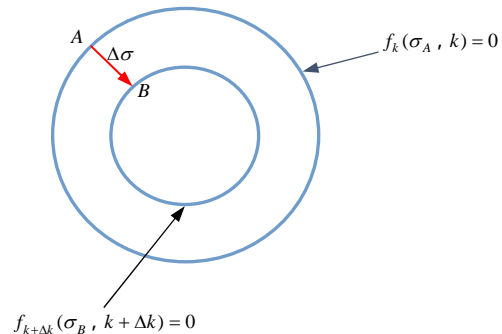


图 1 应力跌落示意图

Fig.1 Sketch of stress drop

由于脆性材料仍满足 Il'yushin 公设，强度折减导致应力跌落的过程可以看作是脆性材料由峰值强度面跌落到残余强度面的过程，所以跌落过程产生的塑性应变增量的方向仍然满足塑性位势理论^[15]：

$$\Delta \varepsilon_p = \Delta \lambda \frac{\partial f_k}{\partial \sigma} \quad (6)$$

式中： $\Delta \lambda$ 为塑性乘子。将式(6)代入式(3)和(5)，可求出 $\Delta \lambda$ ，进而求出 $\Delta \sigma$ 。

以 DP 准则为例， $\Delta \lambda$ 的求解过程为：假设图 1

中对应折减系数为 k 和 $k + \Delta k$ 时的屈服函数分别为

$$f(\sigma_A) = \alpha_0 I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa_0 = 0 \quad (7a)$$

$$f(\sigma_B) = \alpha_r I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa_r = 0 \quad (7b)$$

式中： I_1 为应力张量第一不变量； J_2 为应力偏量第二不变量； α_0, κ_0 和 α_r, κ_r 分别为跌落前和跌落后强度参数，由内摩擦角 φ 和黏聚力 c 转化得到，如 DP 屈服面外接于 MC 屈服面，则

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \\ \kappa &= \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对式(7a)和(7b)进行泰勒展开，可求得跌落过程中的 $\Delta \lambda$ 是下列一元二次方程的一个根^[15]：

$$a \Delta \lambda^2 + b \Delta \lambda + c = 0 \quad (9)$$

其中，

$$a = (9\alpha_0 \alpha_r K)^2 - G^2 < 0 \quad (10)$$

$$b = 2G\sqrt{J_2(\sigma_A)} - 18\alpha_0 \alpha_r K[\alpha_r I_1(\sigma_A) - \kappa_r] \quad (11)$$

$$c = [\alpha_r I_1(\sigma_A) - \kappa_r]^2 - J_2(\sigma_A) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{E}{3(1-2\mu)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中： E 和 μ 分别为弹性模量和泊松比。

因为：

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= \{18\alpha_0 \alpha_r K \sqrt{J_2(\sigma_A)} - \\ &2G[\alpha_r I_1(\sigma_A) - \kappa_r]\}^2 > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

所以式(9)一定有 2 个不相同的实根：

$$\Delta \lambda_1 = \frac{f(\sigma_A)}{9\alpha_0 \alpha_r K + G} > 0 \quad (15a)$$

$$\Delta \lambda_2 = \frac{\alpha_r I_1(\sigma_A) - \kappa_r - \sqrt{J_2(\sigma_A)}}{9\alpha_0 \alpha_r K - G} \quad (15b)$$

显然，可将 $\Delta \lambda$ 取为

$$\Delta \lambda = \begin{cases} \min(\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2) & (\Delta \lambda_2 > 0) \\ \Delta \lambda_1 & (\Delta \lambda_2 < 0) \end{cases} \quad (16)$$

2.3 边坡极限状态的判据

边坡何时进入破坏状态一直是有限元强度折减

领域的热门讨论话题，到目前为止，失稳判据主要有以下 3 类：

- (1) 以有限元计算不收敛作为边坡失稳标志^[3-4,16]。
- (2) 以边坡上某点位移发生突变作为失稳标志^[12]。
- (3) 以广义塑性应变或等效塑性应变从坡脚到坡顶的贯通作为失稳标志^[17-18]。

众所周知，随着折减系数的不断增大，边坡逐渐接近临界状态。当到达临界状态时，即使再增加无穷小的 Δk ，滑动面上某些点的位移将产生无限制的塑性流动，系统再无法到一个既能满足应力-应变关系，又能满足强度条件的静力平衡解，因此上述失稳判据(1)和(2)其实是一致的，由于计算过程中存在各种误差，这使得以失稳判据(1)和(2)作为判据得到的结果会有一定的差别。

本文采用失稳判据(1)作为边坡进入极限状态的判据。

2.4 计算过程

强度折减计算过程如下：

(1) 给定一足够小的初始折减系数 k ，建议取 0.1，以保证初始折减后，整个边坡处于弹性状态，得到整个弹性状态下各节点的位移和各高斯点的应力和应变值；并设定初始折减增量 Δk 及其允许误差 ξ 。

(2) 令 $k = k + \Delta k$ 。

(3) 此时屈服面会收缩，判断每个高斯点是否仍处于弹性状态，若是，保持其不变，否则，按照节 2.2 中的方法进行应力跌落，并记跌落后的应力状态为 σ_d ；然后进行弹塑性计算，计算式为

$$\Delta F = F - \int \mathbf{B}^T \sigma_d dv \quad (17)$$

$$\int \mathbf{B}^T \sigma dv = \Delta F \quad (18)$$

式中： F 为外荷载， ΔF 为不平衡力， \mathbf{B}^T 为应变矩阵， v 为单元面积。如系统不能达到平衡，则令 $\Delta k = \frac{\Delta k}{2}$ 。

(4) 若 $\Delta k < \xi$ ，退出，否则重复步骤(2)。

步骤(4)中， ξ 为数值小的量，根据工程精度要求来选，本文算例均为 0.001。

2.5 与常规强度折减法计算过程对比

常规的有限元强度折减法在每次折减系数试算时，都要从零应力状态重新算起，且越接近极限状态，计算所需时间越多，这就大大影响了计算效率。其实强度折减的过程即是屈服面不断收缩的过程，只需对前一步计算出的应力状态通过脆性跌落和塑

性流动使其更新到新的屈服面上，便可充分利用每一步的计算结果来使整体的计算效率得到提高。常规强度折减法与本文方法每步计算时边坡的初始和最终状态如表 1，2 所示。

表 1 常规强度折减法每步计算时边坡的初始和最终状态

Table 1 The initial and final states of slope for every calculation step of conventional strength reduction method

折减系数	边坡初始状态			边坡最终状态		
	位移 u	应力 σ	应变 ε	位移 u	应力 σ	应变 ε
k_1	0	0	0	u_1	σ_1	ε_1
k_2	0	0	0	u_2	σ_2	ε_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k_n	0	0	0	u_n	σ_n	ε_n

表 2 本文方法每步计算时边坡的初始和最终状态

Table 2 The initial and final states of slope for every calculation step of new method

折减系数	边坡初始状态			边坡最终状态		
	位移 u	应力 σ	应变 ε	位移 u	应力 σ	应变 ε
k_1	0	0	0	u_1	σ_1	ε_1
k_2	u_1	σ_1	ε_1	u_2	σ_2	ε_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k_n	u_{n-1}	σ_{n-1}	ε_{n-1}	u_n	σ_n	ε_n

由于本文方法每一步的计算均运用了上一步的计算结果，显然可以较大地提高计算效率。

3 算例

本文算例均是借助于 Abaqus 进行网格划分，有限元强度折减则是通过自编 Matlab 程序进行计算。为了方便地与商用软件进行了比较，本文重点分析了以 DP 外接圆作为强度准则时的强度折减法，同时得到了 DP 内接圆和经典的 M-C 准则下的计算结果，并进行了分析。

3.1 算例 1：均质边坡

均质边坡^[19]的坡高为 10 m，坡比为 1/2，网格划分如图 2 所示，边坡材料参数如表 3 所示。由于刚度参数对最终强度折减的影响不大^[20]，参考常规边坡的计算参数，弹性模量和泊松比分别取 1×10^4 MPa 和 0.4。

图 3 为边坡坡脚 A 和坡面中点 B 的水平位移随折减系数的变化曲线，可以看到，在 $k = 0.4$ 时，曲线上的点开始变密，说明此时发生了塑性变形，程

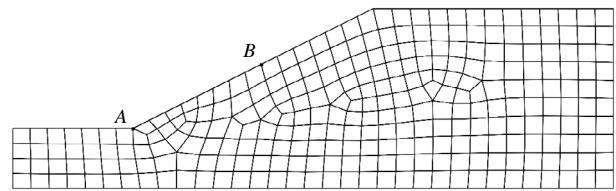


图 2 网格划分(算例 1)

Fig.2 Mesh generation(example 1)

表 3 边坡材料参数(算例 1)

Table 3 Material parameters of slope(example 1)

γ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	c /kPa	φ ($^\circ$)	E /MPa	μ
20.0	3.0	19.6	1×10^4	0.4

序开始调整 Δk 的大小；当 k 接近 1.2 时，曲线逐渐趋于水平，这表明每增加一个较小的 Δk ，就会产生一段较大的位移，边坡接近极限状态，产生不稳定的征兆，直至边坡达到极限状态。图中 ANSYS 强度折减在 DP 外接圆准则下的不收敛安全系数 $F = 1.325$ ，本文方法得到的 $k = 1.305$ ，二者比较接近。陈祖煜^[19]给出的参考解为 1.000，本文方法在其他屈服准则下计算得到的安全系数如表 4 所示。

表 4 不同方法计算得到的安全系数(算例 1)

Table 4 Safety factors of different methods(example 1)

方法	安全系数
陈祖煜 ^[19] 参考解	1.000
DP 外接圆	1.305
DP 内接圆	0.926
DP 等面积圆	1.045
M-C 屈服准则	1.021

从表 4 中可以看出，本文方法采用 M-C 屈服准则得到的最终强度折减安全系数 $k = 1.021$ ，与参考解很接近，进一步说明了方法的可靠性，同时表中结果也说明了采用 DP 外接圆时会大大地夸大边坡的安全性，而采用 DP 内接圆会低估边坡的安全性。

采用 DP 外接圆进行极限分析得到的极限状态下的位移增量矢量图如图 4 所示($k = 1.305$ 时总位移减去弹性位移)，从图中位移增量的相对大小可以很明显地看出边坡滑动面的形状，坡脚处变形最大，可能最先破坏。为了更清楚地描述边坡的破坏过程和破坏后的形态，分别把 $k = 1.200$ 和 1.305 时边坡的位移增量(总位移减去弹性位移)扩大 15 倍，得到极限状态下边坡破坏模式如图 5 所示。从图 5 中也可以看出，在边坡接近极限状态时，即便较小的折减增量也会产生较大的位移增量，边坡极不稳定。

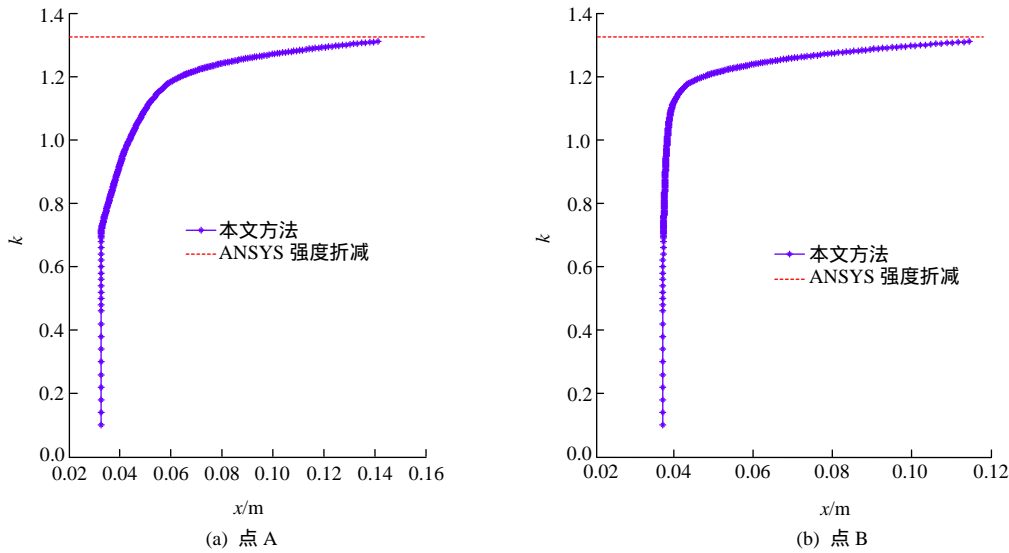


图 3 点 A, B 的水平位移随折减系数的变化曲线(算例 1)
 Fig.3 Curves of horizontal displacement and reduction factor of point A, B(example 1)

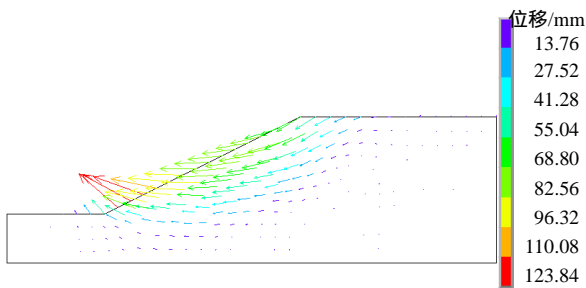


图 4 极限状态下的位移增量矢量图(算例 1)
 Fig.4 Vector diagram of displacement increment in limit state(example 1)

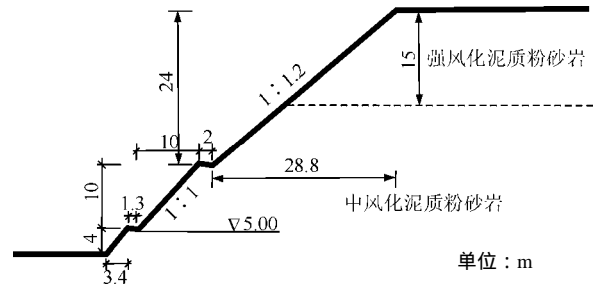
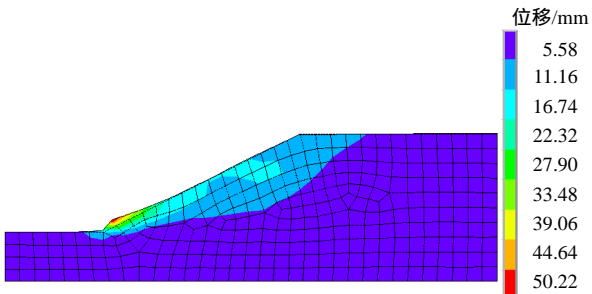
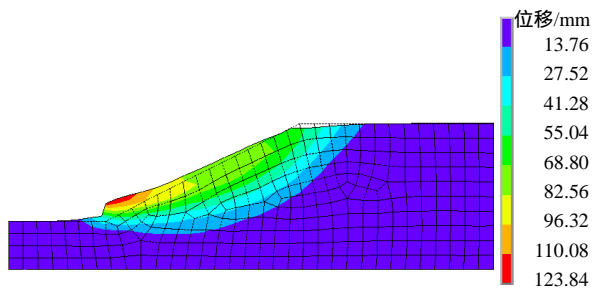


图 6 边坡坡面特征(算例 2)
 Fig.6 Surface characteristics of slope(example 2)



(a) $k = 1.200$



(b) $k = 1.305$

图 5 极限状态下边坡破坏模式(算例 1)
 Fig.5 Failure modes of slope in limit state(example 1)

数如表 5 所示,网格划分如图 7 所示。图 8 为点 A, B 的水平位移随折减系数的变化曲线,图中 ANSYS 强度折减在 DP 外接圆准则下的强度折减安全系数

表 5 边坡材料参数(算例 2)
 Table 5 Material parameters of slope(example 2)

岩性	γ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	c ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)	ϕ ($^\circ$)	E /MPa	μ
强风化泥质粉砂岩	24.0	34.0	26	2×10^4	0.35
中风化泥质粉砂岩	25.0	39.0	35	5×10^4	0.30

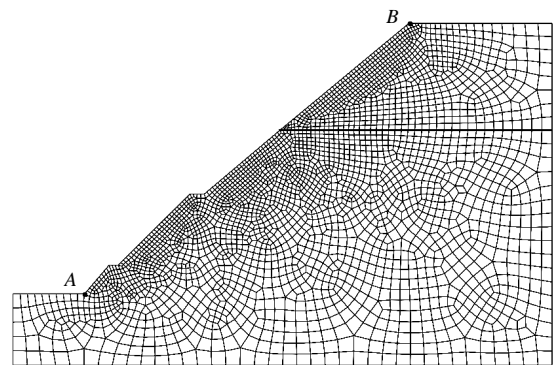


图 7 网格划分(算例 2)
 Fig.7 Mesh generation(example 2)

3.2 算例 2：分层边坡

公路边坡^[9]坡面特征如图 6 所示,边坡材料参

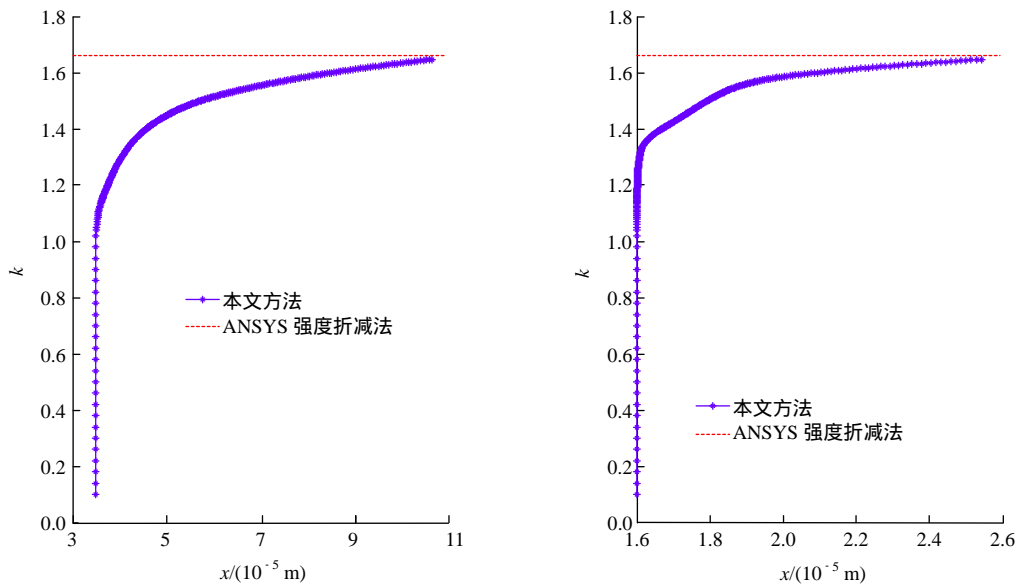


图 8 点 A, B 的水平位移随折减系数的变化曲线(算例 2)

Fig.8 Curves of horizontal displacement and reduction factor of point A, B(example 2)

$F = 1.66$, 本文方法屈服函数采用 DP 外接圆时的最终临界折减 $k = 1.647$ 。

表 6 为本文方法在其他屈服准则下的计算结果, 其中采用 M-C 屈服准则时的安全系数与郑宏等^[9]基于 M-C 准则下有限元强度折减法得到的结果相近, 再次证明了本文方法的有效性。

表 6 不同方法计算得到的安全系数(算例 2)

Table 6 Safety factors of different methods(example 2)

方法	安全系数
郑宏等 ^[9] 有限元强度折减(M-C 准则)	1.480
DP 外接圆	1.647
DP 内接圆	1.382
DP 等面积圆	1.455
M-C 屈服准则	1.440

图 9 为在 DP 外接圆准则下, 边坡极限状态的位移增量矢量图($k = 1.647$ 时总位移减去弹性位移), 从图中矢量的相对大小可以很明显的看出边坡滑动面的形状, 还可以看到坡脚处的变形最大且最易失稳。图 10 为 $k = 1.580$ 和 1.647 时, 产生塑性变形后的边坡位移增量均扩大 5 万倍后的破坏图, 从图中也可以较明显的看出边坡的破坏及发展过程。

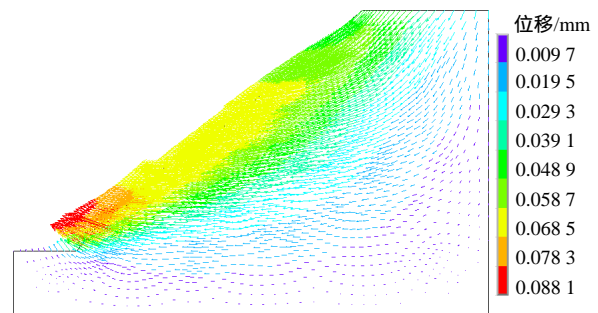
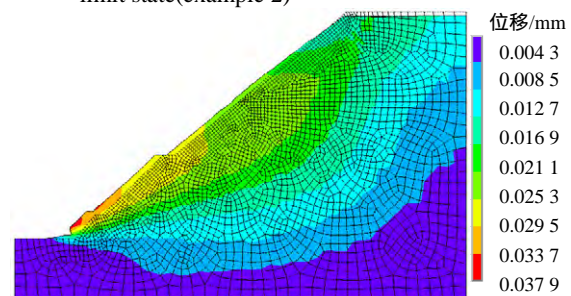
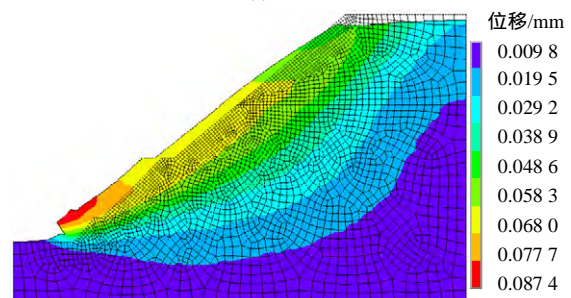


图 9 边坡极限状态的位移增量矢量图(算例 2)

Fig.9 Vector diagram of displacement increment of slope in limit state(example 2)



(a) $k = 1.580$



(b) $k = 1.647$

图 10 边坡最终破坏失稳图(算例 2)

Fig.10 Final failure modes of slope(example 2)

4 结 论

边坡强度降低的过程即是屈服面收缩的过程，本文通过满足 Il'yushin 公设的脆塑性跌落来模拟材料强度的折减过程，使边坡进入临界平衡状态，得到了边坡的安全系数。该方法仅需不断地对材料的强度参数进行折减，且把每一步计算得到的边坡应力状态作为下一步的初始状态，这样不再需要像常规的强度折减法那样每步折减都从零应力状态算起，较大地提高了计算效率。算例表明该方法是正确、可靠的。

参考文献(References)：

- [1] ZIENKIEWICZ O C ,HUMPHESON C ,LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. Geotechnique , 1975 , 25(4) : 671 – 689.
- [2] MATSUI T ,SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. Soils and Foundations , 1992 , 32(1) : 59 – 70.
- [3] GRIFFITHS D V ,LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique , 1999 , 49(3) : 387 – 403.
- [4] DAWSON E ,YOU K ,PARK Y. Strength-reduction stability analysis of rock slopes using the Hoek-Brown failure criterion[C]// Proceedings of Trends in Rock Mechanics. Denver , Colorado : Geotechnical Special Publication , 2000 : 65 – 77.
- [5] LECHMAN J B ,GRIFFITHS D V. Analysis of the progression of failure of earth slopes by finite elements[C]// Proceedings of Slope Stability 2000. Denver , Colorado : Geotechnical Special Publication , 2000 : 250 – 265.
- [6] 徐干成,郑颖人. 岩石工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2) : 93 – 99.(XU Gancheng , ZHENG Yingren. The research of yield criterion in the rock engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 1990 , 12(2) : 93 – 99.(in Chinese))
- [7] 张鲁渝,郑颖人,赵尚毅,等. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. 水利学报, 2003, 1(1) : 21 – 27.(ZHANG Luyu , ZHENG Yingren , ZHAO Shangyi , et al. The feasibility study of strength reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability[J]. Journal of Hydraulic Engineering , 2003 , 1(1) : 21 – 27.(in Chinese))
- [8] 赵尚毅,郑颖人,邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2) : 254 – 260.(ZHAO Shangyi , ZHENG Yingren , DENG Weidong. Stability analysis on jointed rock slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2003 , 22(2) : 254 – 260.(in Chinese))
- [9] 郑 宏,田 斌,刘德福,等. 关于有限元边坡稳定性分析中安全系数的定义问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(13) : 2 225 – 2 230.(ZHENG Hong , TIAN Bin , LIU Defu , et al. On definitions of safety factor of slope stability analysis with finite element method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2005 , 24(13) : 2 225 – 2 230.(in Chinese))
- [10] 郑 宏,李春光,李焯芬,等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5) : 626 – 628.(ZHENG Hong , LI Chunguang , LI Zhuofen , et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 2002 , 24(5) : 626 – 628.(in Chinese))
- [11] 陈卫兵,郑颖人,冯夏庭,等. 考虑岩土体流变特性的强度折减法研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(1) : 101 – 105.(CHEN Weibing , ZHENG Yingren , FENG Xiating , et al. Study on strength reduction technique considering rheological property of rock and soil medium[J]. Rock and Soil Mechanics , 2008 , 29(1) : 101 – 105.(in Chinese))
- [12] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2) : 1 – 7.(SONG Erxiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 1997 , 19(2) : 1 – 7.(in Chinese))
- [13] 迟世春,关立军. 基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1) : 42 – 46.(CHI Shichun , GUAN Lijun. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 2004 , 26(1) : 42 – 46.(in Chinese))
- [14] 张 冲,侯艳丽,金 峰,等. 拱坝 – 坝肩三维可变形离散元整体稳定分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(6) : 1 226 – 1 232.(ZHANG Chong , HOU Yanli , JIN Feng , et al. Analysis of arch dam-abutment stability by 3D deformable distinct elements[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2006 , 25(6) : 1 226 – 1 232.(in Chinese))
- [15] 郑 宏,葛修润,李焯芬. 脆塑性岩体的分析原理及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(1) : 8 – 21.(ZHENG Hong , GE Xiurun , LI Zhuofen. Analysis principle for rock mass with brittle-plasticity and its applications[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 1997 , 16(1) : 8 – 21.(in Chinese))
- [16] 赵尚毅,郑颖人,时卫民,等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3) : 343 – 346.(ZHAO Shangyi , ZHENG Yingren , SHI Weiming , et al. Slope safety factor analysis by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 2002 , 24(3) : 343 – 346.(in Chinese))
- [17] 连镇营,韩国城,孔宪京. 强度折减有限元研究开挖边坡的稳定性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4) : 406 – 411.(LIAN Zhenying , HAN Guocheng , KONG Xianjing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering , 2001 , 23(4) : 406 – 411.(in Chinese))
- [18] 周翠英,刘祚秋,董立国,等. 边坡变形破坏过程的大变形有限元分析[J]. 岩土力学, 2003, 24(4) : 644 – 652.(ZHOU Cuiying , LIU Zuoqiu , DONG Liguang , et al. Large deformation FEM analysis of slopes failure[J]. Rock and Soil Mechanics , 2003 , 24(4) : 644 – 652.(in Chinese))
- [19] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2003 : 365 – 376.(CHEN Zuyu. Stability analysis for soil slope——theory , method and program[M]. Beijing : China Water Power Press , 2003 : 365 – 376.(in Chinese))
- [20] 郑颖人,赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19) : 3 381 – 3 388.(ZHENG Yingren , ZHAO Shangyi. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 2004 , 23(19) : 3 381 – 3 388.(in Chinese))