

文章编号: 1000 - 7598 (2014) 09 - 2443 - 05

土-水特征曲线的分形特性及其分析拟合

陶高粱^{1,2}, 孔令伟¹, 肖衡林², 马 强², 朱志政²

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2.湖北工业大学 土木工程与建筑学院, 武汉 430068)

摘 要: 为了建立一种参数有明确物理意义的土-水特征曲线拟合方法, 基于分形理论, 给出了一种直接通过土-水特征曲线实测数据求解分维数的计算方法, 建议了一种土-水特征曲线拟合分析的分形模型。为验证所建议拟合方法的合理性, 采用液压千斤顶制作了 7 个不同干密度黏性土试样, 利用压力板仪测量了土-水特征曲线。基于土-水特征曲线实测值计算了分维数, 在此基础上对土-水特征曲线实测数据进行分析拟合。结果表明: 分维数计算及拟合分析时, 7 个试样相关系数都集中在 0.97 ~ 0.99 之间, 从而证明了土-水特征曲线具有良好的分形特性, 建议的拟合方法效果较好。此外, 研究发现, 分维数、进气值随干密度几乎呈线性增加, 据此建议了一种不同压实度下的土-水特征曲线预测方法, 其预测结果与实测值吻合较好。

关 键 词: 土-水特征曲线; 拟合分析; 分形维数; 分形模型

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

Fractal characteristics and fitting analysis of soil-water characteristic curves

TAO Gao-liang^{1,2}, KONG Ling-wei¹, XIAO Heng-lin², MA Qiang², ZHU Zhi-zheng²

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Civil Engineering and Architecture, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China)

Abstract: In order to establish a fitting approach for soil-water characteristic curves (SWCC) with clear physical meanings, a method is presented to directly calculate the fractal dimensions through the SWCC data based on the fractal theory, and a fractal model of SWCC is proposed. To verify the proposed fitting method, seven clay samples with different dry densities are prepared using hydraulic jacks, and the soil-water characteristic curves are measured by using the pressure plate apparatus. Based on the experimental results of SWCC, the fractal dimensions are calculated. On this basis, fitting analysis of the SWCC data is performed by using the presented method. The results show that, all the correlation coefficients of the seven samples range from 0.97 to 0.99, which indicates good fractal characteristics of SWCC as well as good fitting performance of the proposed method. In addition, it is found that the fractal dimensions and the air entry values increase almost linearly with the dry density. On this basis, a prediction method of SWCC at different compaction degrees is also proposed and tested. The prediction results are in good agreement with the measured values.

Key words: soil-water characteristic curve; fitting analysis; fractal dimension; fractal model

1 引 言

土-水特征曲线表征的是基质吸力与含水率(体积含水率、饱和度、质量含水率)之间的关系, 它在非饱和土工程性质研究中扮演着很重要的角色。

土-水特征曲线试验测量获得的试验数据较离散, 一般通过数学模型进行拟合。常用的数学模型有 Campbell 模型、van Genuchten 模型等, 但这些模型中的参数物理意义不明确, 且难以准确获得。因此, 寻求具有明确物理意义参数的数学模型是很

多学者关注的问题。研究表明, 土-水特征曲线本质主要由土壤结构所决定, 土壤结构与土-水特征曲线关系的研究有望解决这一问题。分形方法所确定的土-水特征曲线中的参数与土壤结构性直接联系起来, 具有明确的物理意义, 是较为理想的方法。该类方法采用分形理论研究土体颗粒^[1-4]、团聚体^[5-6]、孔隙^[7-12]的分布特性, 然后通过土壤结构与土-水特征曲线之间的关系建立土-水特征曲线数学模型。迄今为止, 这种方法取得了一些可喜的成果, 已成为土-水特征曲线研究的重要分支。

收稿日期: 2014-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(No. 51209084); 教育部重点项目(No. 2010133); 湖北省建设科技项目(鄂建文[2012]78号-48)

第一作者简介: 陶高粱, 男, 1979年生, 博士后, 副教授, 主要从事土体微观结构及相关特性等方面的研究工作。E-mail: tgl1979@126.com

基于分形理论的研究关键工作之一就是求解分形维数。孔隙分维数一般以测量技术获得的孔隙分布数据为基础进行计算。值得指出的是，尽管直接测量孔隙分布的技术手段很多，但从测量精度来讲，这些技术并非完全令人满意。比如，扫描电子显微镜 (SEM) 技术就存在图像处理时产生的误差，同一张照片不同人处理结果可能不同，此外，试样准备阶段也可能造成孔隙结构失真；压汞技术也存在缺点，试样之前要冷冻处理，孔隙结构可能受到影响，试验时汞可能对孔隙结构造成破坏；CT 技术虽然无损伤，但其分辨率较低；核磁共振技术是另外一种无损伤测试手段，但弛豫时间与孔径的对应关系很难求得，且不同孔径转化系数可能不一样；土壤切片技术仅适合大孔隙的研究，且试样固化时孔隙结构可能发生改变，此外，同样存在图像处理产生的误差。可见，孔隙分布的直接测量结果存在一定误差，以此为基础求解的分维数的准确性必定受到影响。

土-水特征曲线试验数据给出水的体积可以理解为孔隙的体积，而基质吸力与等效孔径成反比，土-水特征曲线本质上反映了孔隙分布的规律。本文尝试直接通过土-水特征曲线试验数据求解反映孔隙体积-孔径分布特性的分维数，然后基于建议的土-水特征曲线模型，对不同压实度黏性土土-水特征曲线试验数据进行拟合，期望形成参数具有明确物理意义的一种拟合方法。

2 理论推导

2.1 基于土-水特征曲线直接求解分维数

文献[13]给出的三维空间内孔隙体积的分形模型可以用下式表示：

$$V(>r) = V_a \left[1 - \left(\frac{r}{L_2} \right)^{3-D} \right] \quad (1)$$

式中： $V(>r)$ 为孔径大于 r 的孔隙累计体积； V_a 为土体总体积； L_2 为研究区域尺度； D 为分维数。

基质吸力 ψ 与有效孔径 r 之间的关系可以表示为^[14]

$$\psi = 2T_s \cos \alpha / r \quad (2)$$

式中： T_s 为表面张力； α 为接触角；温度一定时， $2T_s \cos \alpha$ 为常数。将式 (2) 代入式 (1) 消除 r 后，式 (1) 变为

$$\frac{V_a - V(>r)}{V_a} = A\psi^{D-3} \quad (3)$$

式中： $A = (2T_s \cos \alpha / L_2)^{3-D}$ 为常数。

假设水的密度 $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$ 不变，若考虑相应于 1g 颗粒的土体，则有质量含水率 $w = V(>r)$ ，其中 $V(>r)$ 为孔径小于等于 r 的孔隙累计体积，此处假设孔径小于等于 r 的孔隙充满水。用 V_s 表示颗粒体积， ρ_d 表示干密度， G_s 表示土粒相对密度，则式 (3) 变为

$$\frac{V_a - V(>r)}{V_a} = \frac{V_s + V(>r)}{V_a} = \frac{1/G_s + w}{1/\rho_d} = A\psi^{D-3} \quad (4)$$

式 (4) 进一步化简得

$$1/G_s + w = B\psi^{D-3} \quad (5)$$

式中： $B = A/\rho_d$ ，为常数。式 (5) 两边同时取对数，变为

$$\ln(1/G_s + w) = -(3-D)\ln\psi + \ln B \quad (6)$$

根据式 (6)，若已知土体质量含水率表示的土-水特征曲线，则以 $-\ln\psi$ 为横坐标、以 $\ln(1/G_s + w)$ 为纵坐标作散点图，如果这些点满足直线关系，假设斜率为 k ，则分维数 $D = 3 - k$ ，就可以证明孔隙分布具有分形特性。

将最大孔径 r_{\max} 对应的基质吸力定义为进气值 ψ_a ，式 (1) 中孔径应满足 $r \leq r_{\max}$ ，故利用式 (6) 求解分维数时只能采用 $\psi < \psi_a$ 的数据点。值得说明的是，在进气值未知的情况下，近似舍去含水率未发生改变阶段的低吸力阶段数据（可保留该阶段最后一级数据）。

2.2 质量含水率表示的土-水特征曲线分形模型

文献[15]给出了表征孔隙孔径分布特性的累计孔隙率模型，并通过实测数据证明了其有效性，其表达式为

$$\phi(>r) = 1 - (r/r_{\max})^{3-D} \quad (7)$$

式中： $\phi(>r)$ 为孔径大于 r 的孔隙累计孔隙率。

假设非饱和土中孔径小于等于 r 的孔隙充满了水，其体积含水率为 θ ，总孔隙率为 ϕ ，那么有 $\phi = \theta + \phi(>r)$ 。结合式 (7)，有

$$\theta = \phi - 1 + (r/r_{\max})^{3-D} \quad (8)$$

结合 Young-Laplace 方程，则式 (8) 可变为

$$\theta = \phi - 1 + (\psi_a/\psi)^{3-D} \quad (9)$$

式 (9) 与 Rieu 等^[5]以假想的团聚体模型建立的表达式是一致的，但二者建立方法不一样，分维数定义也不同。

根据质量含水率与体积含水率的关系，质量含

水率表征的土-水特征曲线模型可表示为

$$w = \frac{(1+e)(\psi_a / \psi)^{3-D} - 1}{G_s} \quad (10)$$

式中： e 为孔隙比。值得说明的时，式 (10) 适用条件为 $\psi > \psi_a$ 。当 $\psi = \psi_a$ 时，令 $\psi = \psi_a$ 代入式 (10)， $w = e / G_s$ 。

3 试验验证

3.1 土-水特征曲线试验

3.1.1 试样制作

取自武汉某工程基坑底部的非饱和黏土，试验测得土粒相对密度为 2.75，液限为 38.9%，塑限为 20.4%。土样风干后，过 2 mm 筛，采用液压千斤顶静压试验方法制备重塑试样 7 个，干密度 ρ_d 分别为 1.30、1.35、1.40、1.45、1.50、1.60、1.71 g/cm³。图 1 给出了不同干密度试样的高分辨率数码照片，可以清楚地看到，随着干密度的增加，图中大孔隙尺寸变小。

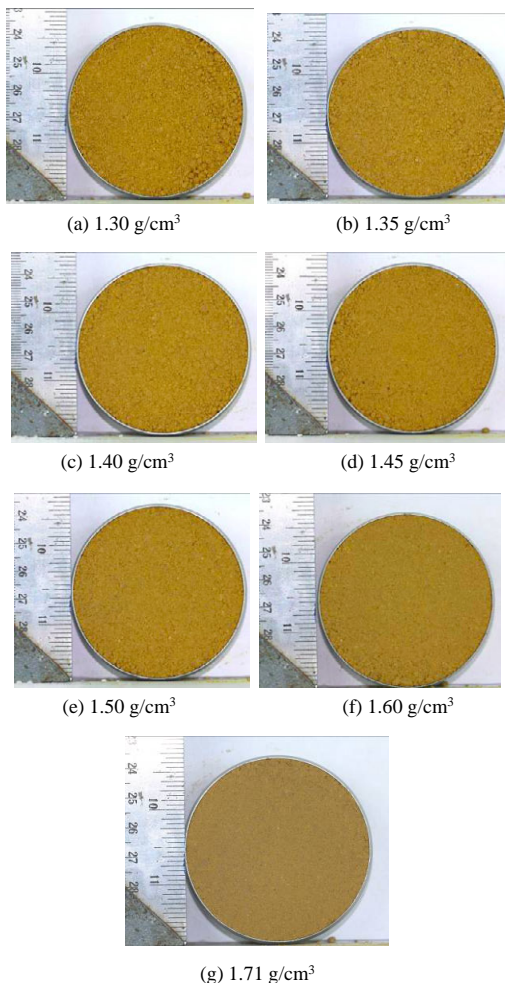


图 1 不同干密度黏性土高分辨率数码照片
Fig.1 High resolution digital photos of clay samples with different dry densities

3.1.2 试验仪器及过程

试验在中国科学院武汉岩土力学研究所完成，试验所采用的压力板仪如图 2 所示。试验步骤如下：将不同干密度试样及试验所采用的陶土板进行饱和；将陶土板放置于压力器中，连接好排水管；将压力器盖盖好，施加预定气压；称量试样排出水的质量，若出水质量恒定，表明该级吸力条件已经平衡；气压调零，称量各试样质量；重复以上步骤，直至完成试验。



图 2 压力板仪
Fig.2 Pressure plate apparatus

3.1.3 试验结果及分析

图 3 将试验结果以质量含水率的形式给出。从图中可以看出，低吸力条件下，不同干密度试样质量含水率差别较大。干密度为 1.30 g/cm³，饱和和质量含水率为 41%；而干密度为 1.71 g/cm³，饱和和质量含水率为 22%，相差近一半。随着吸力增加，这种差别逐渐减小。高吸力条件下，不同干密度试样质量含水率几乎一致，图中 100 kPa 以上的试验数据尤为明显。

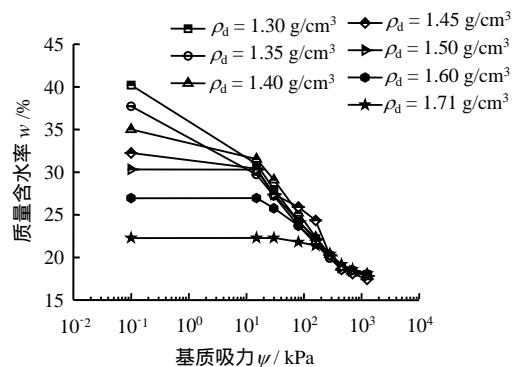


图 3 不同干密度黏性土土-水特征曲线试验结果
Fig.3 SWCC experimental results of clay samples with different dry densities

3.2 方法验证

基于前文不同压实度黏性土土-水特征曲线试验获得的试验数据，按照 2.1 节方法作散点图，并进行线性拟合，如图 4 所示，表 1 给出了相应的拟合表达式、相关系数 R 及计算所得的分维数 D 。7

个样本的相关系数都非常高，除干密度为 1.71、1.45 g/cm³，其 R 分别为 0.97、0.98 外，其余 5 个 R 均为 0.99，说明了 2.1 节提出的分维数计算方法是合理的。这也就证明了土-水特征曲线中质量含水率与基质吸力展现出良好的分形行为，本质上反映了土体孔隙分布具有很强的分形特性。计算获得的分维数随干密度增加，整体上呈增加的趋势，如图 5 所示，其原因是孔隙被压缩、孔隙结构发生了改变。

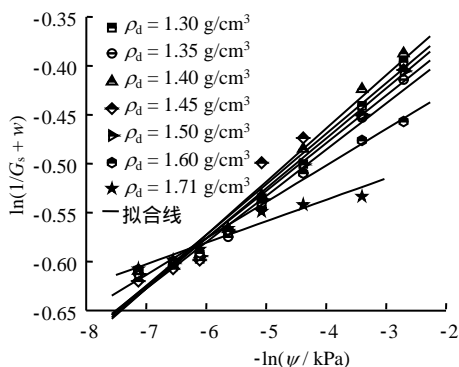


图 4 不同干密度黏性土质量含水率-基质吸力关系曲线
Fig.4 Relationships of mass water content and matric suction of clay samples with different dry densities

表 1 参数取值
Table 1 Values of some parameters

干密度/(g/cm ³)	孔隙比	拟合直线表达式	R	D	ψ_a /kPa
1.30	1.115	$y = 0.051x - 0.270$	0.99	2.949	0.75
1.35	1.037	$y = 0.047x - 0.297$	0.99	2.953	0.96
1.40	0.964	$y = 0.054x - 0.246$	0.99	2.946	4.67
1.45	0.897	$y = 0.052x - 0.262$	0.98	2.948	7.72
1.50	0.833	$y = 0.049x - 0.284$	0.99	2.951	11.14
1.60	0.719	$y = 0.037x - 0.353$	0.99	2.963	20.60
1.71	0.613	$y = 0.022x - 0.449$	0.97	2.978	38.40

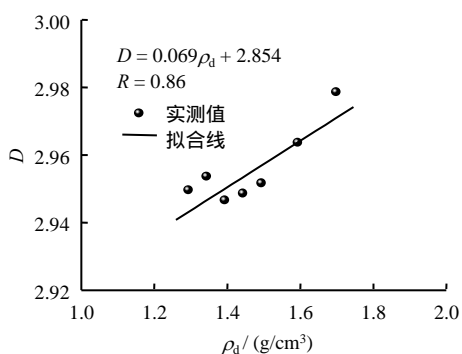


图 5 分维数与干密度的关系
Fig.5 Relation between fractal dimension and dry density

通过干密度便很容易计算相应孔隙比（见表 1），基于前文土-水特征曲线试验结果及所计算获得的分维数，利用式（10）可计算进气值 ψ_a （见表 1）。采用表 1 中的参数值，利用式（10）对前文土-水特征曲线试验数据进行拟合。值得说明的是，当

$\psi < \psi_a$ 时，质量含水率取饱和含水率，即 $w = e / G_s$ ；当 $\psi > \psi_a$ 时按式（10）进行计算。图 6 给出了质量含水率表示的土-水特征曲线实测值以及按上述方法拟合的曲线。不难发现，上述方法的拟合效果较好，相关系数都非常高。干密度分别为 1.45、1.71 g/cm³， R 分别为 0.98、0.97，其余 5 个试样的 R 均为 0.99，这也就证明了式（10）的有效性。

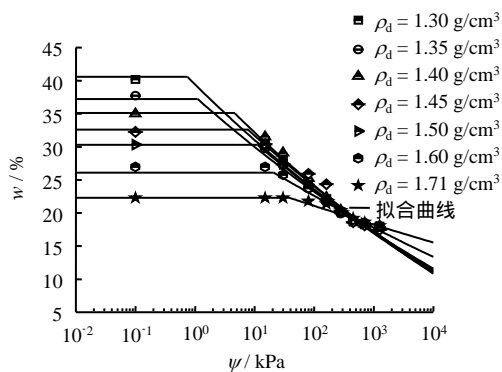


图 6 不同干密度黏性土土-水特征曲线分形拟合
Fig.6 Fractal fitting of SWCC of clay samples with different dry densities

此外，图 7 给出了计算的进气值与干密度之间的关系，随干密度 ρ_d 增大，进气值 ψ_a 几乎呈线性增大。这是因为，随着压实度增加，试样中最大孔隙孔径总体呈明显减小的趋势。图 1 给出的试样高分辨率数码照片显示，随着干密度增加大，孔隙孔径减小，为这一结论提供了佐证。

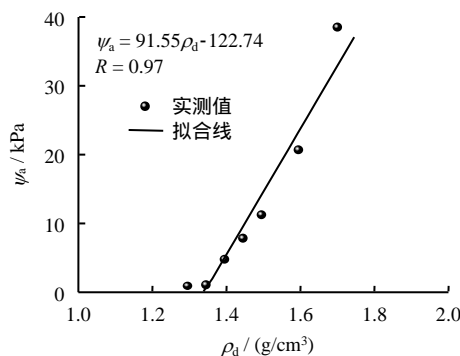


图 7 进气值与干密度的关系
Fig.7 Relation between air entry value and dry density

图 5 与图 7 分别给出了 $D - \rho_d$ 、 $\psi_a - \rho_d$ 相关关系，通过该关系式理论上可预测不同干密度下的 D 与 ψ_a ，结合式（10），理论上便可预测任意干密度下的土-水特征曲线。为进一步验证该思想的正确性，假设在已知相应于 ρ_d 分别为 1.30、1.35、1.40、1.50、1.60、1.71 g/cm³ 条件下的土-水特征曲线，对 $D - \rho_d$ 、 $\psi_a - \rho_d$ 相关关系重新进行直线拟合，拟合直线表达式分别为

$$D = 0.067\rho_d + 2.857 \quad (11)$$

$$\psi_a = 91.06\rho_d - 121.64 \quad (12)$$

利用上述两式预测干密度 $\rho_d = 1.45 \text{ g/cm}^3$ 的 $D = 2.954$ 、 $\psi_a = 10.40 \text{ kPa}$ ，利用式(10)便可计算相应的土-水特征曲线。图8给出了 $\rho_d = 1.45 \text{ g/cm}^3$ 条件下的土-水特征曲线预测曲线与实测值，发现相关系数为 0.99，说明预测效果较好。

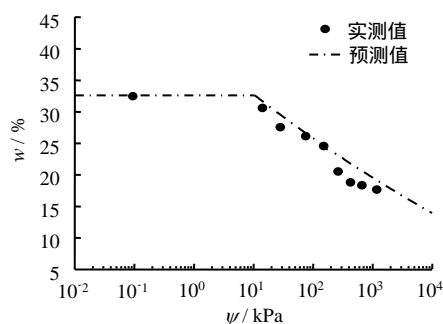


图8 土-水特征曲线实测值与预测曲线 ($\rho_d = 1.45 \text{ g/cm}^3$)
Fig.8 Experimental results and predicted curve of SWCC ($\rho_d = 1.45 \text{ g/cm}^3$)

实质上，若将干密度与变形联系起来，上述方法为不同变形条件下土-水特征曲线预测提供了一种新方法，可促进非饱和土本构关系研究。

4 结论

(1) 质量含水率-基质吸力具有良好的分形特性，本质反映了土体孔隙分布较强的分形行为。式(6)可直接通过土-水特征曲线实测数据计算分维数，随干密度增加，分形维数呈现增加的趋势。

(2) 式(10)对质量含水率表示的土-水特征曲线实测数据拟合效果较好，较传统的拟合方法，其参数具有明确的物理意义且便于应用。随干密度增加，不同压实度黏性土进气值呈现线性增加的趋势。

(3) 根据实测的 $D - \rho_d$ 、 $\psi_a - \rho_d$ 相关关系可预测不同干密度条件下的土-水特征曲线，这实质上为不同变形条件下的土-水特征曲线预测提供了新的思路，可促进非饱和土本构关系研究。

参考文献

- [1] ARYA L M, PARIS J F. A physico empirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1981, 45(6): 1023 - 1030.
- [2] TYLER S W, WHEATCRAFT S W. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1989, 53(4): 987 - 996.
- [3] HUANG G H, ZHANG R D, HUANG Q Z. Modeling

soil water retention curve with a fractal method[J]. *Pedosphere*, 2006, 16(2): 137 - 146.

- [4] GHANBARIAN-ALAVIJEH B, LIAGHAT A, HUANG G H, et al. Estimation of the van Genuchten soil water retention properties from soil textural data[J]. *Pedosphere*, 2010, 20(4): 456 - 465.
- [5] RIEU M, SPOSITO G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1991, 55(4): 1231 - 1238.
- [6] RIEU M, SPOSITO G. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1991, 55(4): 1239 - 1244.
- [7] PERRIER E, RIEU M, SPOSITO G, et al. Models of the water retention curve for soils with a fractal pore size distribution[J]. *Water Resources Research*, 1996, 32(10): 3025 - 3031.
- [8] 徐永福, 董平. 非饱和土的水分特征曲线的分形模型[J]. *岩土力学*, 2002, 23(4): 400 - 405.
XU Yong-fu, DONG Ping. Fractal models for the soil-water characteristics of unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2002, 23(4): 400 - 405.
- [9] XU Y F. Calculation of unsaturated hydraulic conductivity using a fractal model for the pore-size distribution[J]. *Computers and Geotechnics*, 2004, 31(7): 549 - 557.
- [10] BIRD N R A, PERRIER E, RIEU M. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions[J]. *European Journal of Soil Science*, 2000, 51(3): 55 - 63.
- [11] HUANG G H, ZHANG R D. Evaluation of soil water retention curve with the pore-solid fractal model[J]. *Geoderma*, 2005, 127(1 - 2): 52 - 61.
- [12] WANG K, ZHANG R D. Estimation of soil water retention curve: An asymmetrical pore-solid fractal model[J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2011, 16(2): 171 - 178.
- [13] 陶高梁, 张季如. 表征孔隙及颗粒体积与尺度分布的两类岩土体分形模型[J]. *科学通报*, 2009, 54(6): 838 - 846.
TAO Gao-liang, ZHANG Ji-ru. Two categories of fractal models of rock and soil expressing volume and size-distribution of pores and grains[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2009, 54(6): 4458 - 4467.
- [14] 弗雷德隆德 D G, 拉哈尔佐 H. 非饱和土土力学[M]. 陈仲颐, 张在明, 陈愈炯, 等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
- [15] 张季如, 陶高梁, 黄丽, 等. 表征孔隙孔径分布的岩土体孔隙率模型及其应用[J]. *科学通报*, 2010, 55(27 - 28): 2761 - 2770.
ZHANG Ji-ru, TAO Gao-liang, HUANG Li, et al. Porosity models for determining the pore-size distribution of rocks and soils and their applications[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2010, 55(27 - 28): 2761 - 2770.