

文章编号 0559-9350(2014)04-0440-07

## 描述黏粒含量对土-水特征曲线影响规律的分形模型

陶高梁<sup>1,2</sup>, 张季如<sup>3</sup>, 庄心善<sup>2</sup>, 杨琳<sup>3</sup>

(1. 中国科学院 武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071;

2. 湖北工业大学 土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430068; 3. 武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070)

摘要: 土体黏粒含量对土-水特征曲线有重要影响。为了建立描述黏粒含量对土-水特征曲线影响规律的理论模型, 本文基于分形理论, 建立了质量分维数与黏粒含量的关系式, 利用已有试验数据验证了该式的合理性, 并从理论上解释了质量分维数随黏粒含量增大的基本规律。在此基础上, 结合已有的研究成果, 建立了分形模型描述土体黏粒含量对土-水特征曲线影响规律, 该模型预测的土-水特征曲线与已有不同土类样本的试验数据吻合较好, 从而证明了该模型的有效性。最后, 利用该模型同时预测了不同黏粒含量典型土体的土-水特征曲线, 阐明了黏粒含量对土-水特征曲线影响的基本规律, 即相同吸力条件下, 黏粒含量越高, 则体积含水率越高。

关键词: 土壤; 黏粒含量; 土-水特征曲线; 分形模型

中图分类号: S152.7

文献标识码: A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.2014.04.015

## 1 研究背景

土-水特征曲线是用来表示非饱和土的基质吸力和体积含水率之间的关系曲线, 利用土-水特征曲线可以确定非饱和土的结构强度、渗透系数等。因此, 土-水特征曲线在非饱和土特性的研究中扮演了重要的角色<sup>[1-2]</sup>。土-水特征曲线本质由土体结构决定, 研究土体结构与土-水特征曲线之间的关系已成为热门课题之一。研究方法包括经验公式方法<sup>[3]</sup>、土壤转换函数方法(PTF)<sup>[4]</sup>、神经网络方法<sup>[5]</sup>、分形方法等<sup>[2,6-12]</sup>, 其中分形方法将所确定的土-水特征曲线中的参数与土壤结构性直接联系起来, 具有明确的物理意义, 是更为理想、具有潜力的方法。

近年来, 已有许多学者证明了土体孔隙和颗粒具有分形特性<sup>[13-24]</sup>。其中, 杨培岭等<sup>[16]</sup>、李德成等<sup>[17]</sup>、黄冠华等<sup>[18]</sup>、苏里坦等<sup>[19]</sup>、赵来等<sup>[20]</sup>均发现土体质量分维数随黏粒含量增加而增加, Su等<sup>[21]</sup>认为质量分维数可以表征土壤沙漠化程度, 从侧面证明了这一现象, 但很少有学者能解释其本质原因。在为数不多的研究中, Huang等<sup>[22]</sup>建立了黏粒含量与质量分维数的统计关系式, 但未给出理论基础。本文拟依据分形理论建立黏粒含量与质量分维数的关系式, 从理论上解释质量分维数随其黏粒含量增加而增加的本质原因。值得说明的是, 目前求解质量分维数常用的方法是线性拟合分析法<sup>[16]</sup>, 其方法是称量每个筛孔区间颗粒的质量, 计算筛孔区间平均孔径, 绘制累计颗粒质量(对数)与粒径(对数)的散点图, 并作线性拟合, 求其斜率, 然后再求得土壤颗粒分维数。本文拟简化线性拟合分析法, 即直接通过黏粒含量求解质量分维数。

目前, 已有学者利用分形理论建立了基于土壤微观孔隙或颗粒特性的土-水特征曲线模型, 取得了较好的效果<sup>[6-12]</sup>, 但罕见直接研究黏粒含量与土-水特征曲线之间的关系。实际上, 土体持水特性(特别在大于 100 kPa 的高压力水头时)与土体吸附特性有关<sup>[25]</sup>。土体中黏粒含量反映土体吸附能力,

收稿日期: 2013-08-08; 网络出版日期: 2014-02-21

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.1882.TV.20140221.1033.009.html>

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(51209084, 41072214); 湖北工业大学博士科研启动基金(BSQD12061)

作者简介: 陶高梁(1979-), 男, 湖北黄冈人, 讲师, 博士后, 主要从事土体孔隙结构及非饱和土研究。E-mail: tgl1979@126.com

通讯作者: 张季如(1964-), 男, 湖北武汉人, 博士, 教授, 主要从事岩土工程研究。E-mail: zhangjr@whut.edu.cn

黏粒含量越高，土体颗粒比表面积越大，则土体吸附性越强。因此，土-水特征曲线与土体黏粒含量之间理论上具有某一特定关系。本文从这种思路出发，寻求建立黏粒含量与土-水特征曲线之间的关系式，揭示黏粒含量对土-水特征曲线影响的内在机理，形成一种基于黏粒含量的土-水特征曲线的预测新方法。

## 2 模型的推导

文献[15]根据 Sierpinski 地毯和 Menger 海绵分形模型(图1)推导出一种颗粒粒径分布密度函数，即：

$$f(R) = CR^{-1-D} \quad (1)$$

式中： $D$ 为土体质量分维数； $R$ 为颗粒粒径； $C$ 为常数。值得说明的是，式(1)成立的条件是颗粒分布具有分形特性。

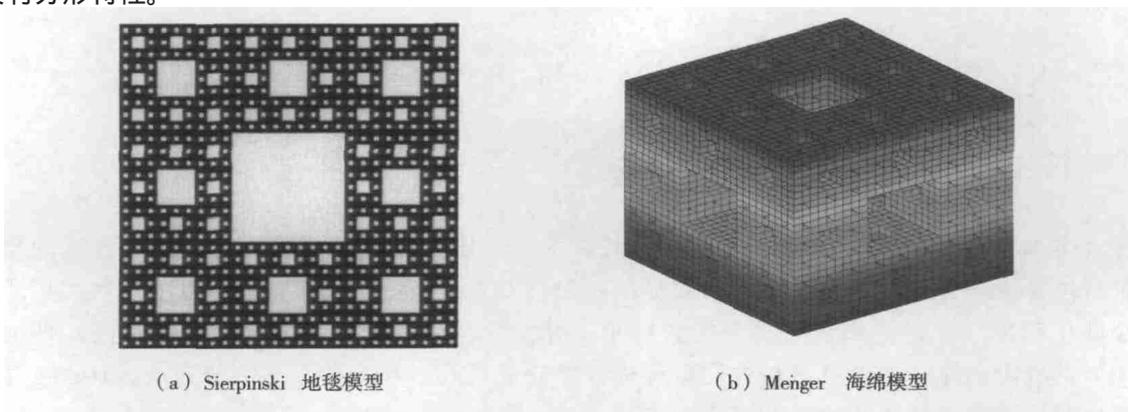


图1 Sierpinski地毯模型和Menger海绵模型

假设颗粒的体积形状因子 $K_V$ 为恒定值，颗粒密度用 $\rho$ 表示，颗粒质量分维数为 $D$ ，则粒径区间 $R_1 \sim R_2$  ( $R_1 < R_2$ )上的颗粒质量可表示为：

$$M = \int_{R_1}^{R_2} \rho f(R) K_V R^3 dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho K_V C R^{2-D} dR = C^* [R_2^{3-D} - R_1^{3-D}] \quad (2)$$

式中： $C^* = \rho K_V C / (3-D)$ 。

假设土体样本的总质量为 $M_T$ ，最大粒径是 $R_{max}$ ，最小粒径是0，则可令 $R_1=0$ ， $R_2=R_{max}$ ，根据式(2)有， $M_T = C^* R_{max}^{3-D}$ ，故 $C^* = M_T / R_{max}^{3-D}$ ，再代入式(2)有：

$$M = \frac{M_T}{R_{max}^{3-D}} [R_2^{3-D} - R_1^{3-D}] \quad (3)$$

定义粒径小于 $R$ 的颗粒为黏粒(粒径上限为0.002 mm)，则黏粒质量含量可用 $K_M = M/M_T$ 表示，其中 $M$ 为黏粒质量。如果认为最小粒径能取为0，则黏粒质量 $M$ 可认为是粒径区间0~ $R$ 的颗粒总质量，由式(3)可得：

$$\frac{M}{M_T} = \left( \frac{R}{R_{max}} \right)^{3-D} \quad (4)$$

式(4)变换后，可得：

$$D = 3 - \frac{\ln K_M}{\ln K_R} \quad (5)$$

式中： $K_R = R/R_{max}$ 表示黏粒粒径上限 $R$ 与最大粒径之比。式(5)给出了颗粒质量分维数与黏粒含量之间的关系。

值得说明的是，式(3) 式(5)是基于最小粒径为0的假设给出，故实际计算时存在一定的误差。若最小颗粒粒径越接近0，则误差就越小。

Bird等根据孔隙-土体-分形集(PSF)模型建立了非饱和土的水分特征曲线模型<sup>[10]</sup>，其表达式为：

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_a} \right)^{D-3} \quad (6)$$

式中： $\theta$ 为非饱和土的体积含水率； $\theta_s$ 为饱和土的体积含水率(土壤总孔隙率)； $\varphi$ 、 $\varphi_a$ 分别为非饱和土的基质吸力和进气值。Bird等<sup>[10]</sup>证明了式(6)中的分维数 $D$ 可用下式求解：

$$M_s(i) = L^3 \zeta d_s \frac{s}{p+s} \left[ \frac{r_s(i)}{r_s(1)} \right]^{3-D} \quad (7)$$

式中： $L$ 、 $\zeta$ 、 $d_s$ 、 $s$ 、 $p$ 参数对于特定土体均为常数； $M_s(i)$ 为粒径小于等于 $r_s(i)$ 的累计颗粒质量； $r_s(1)$ 为最大颗粒粒径。很明显，式(7)定义的分维数即为质量分维数，与式(5)中分维数含义一致。

将式(5)代入式(6)可得：

$$\frac{\theta}{\theta_s} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_a} \right)^{-\frac{\ln K_M}{\ln K_R}} \quad (8)$$

应说明的是，式(8)适用条件为 $\varphi \geq \varphi_a$ ，当 $\varphi < \varphi_a$ 时， $\theta = \theta_s$ 。

### 3 土体黏粒含量与质量分维数之间的关系

已有众多学者在计算土体颗粒质量分维数时，发现土体颗粒质量分维数随其黏粒含量的增加而增加，即黏粒含量与分维数之间存在较为明显的相关性<sup>[16-20]</sup>。有学者认为颗粒质量分维数可以用以描述土壤沙漠化程度<sup>[21]</sup>，因为颗粒质量分维数越小，黏粒含量就越少，沙漠化程度便越高。然而，目前很少有学者给出土体黏粒含量与颗粒质量分维数准确关系式。在为数不多的研究中，Huang建立了黏粒含量与颗粒质量分维数的统计关系式如下<sup>[22]</sup>：

$$D = 2.2712 + 0.1669 \ln(100K_M + 1) \quad (9)$$

基于已有文献的试验数据，图2将式(5)、式(9)的计算结果与传统的线性拟合分析方法的计算结

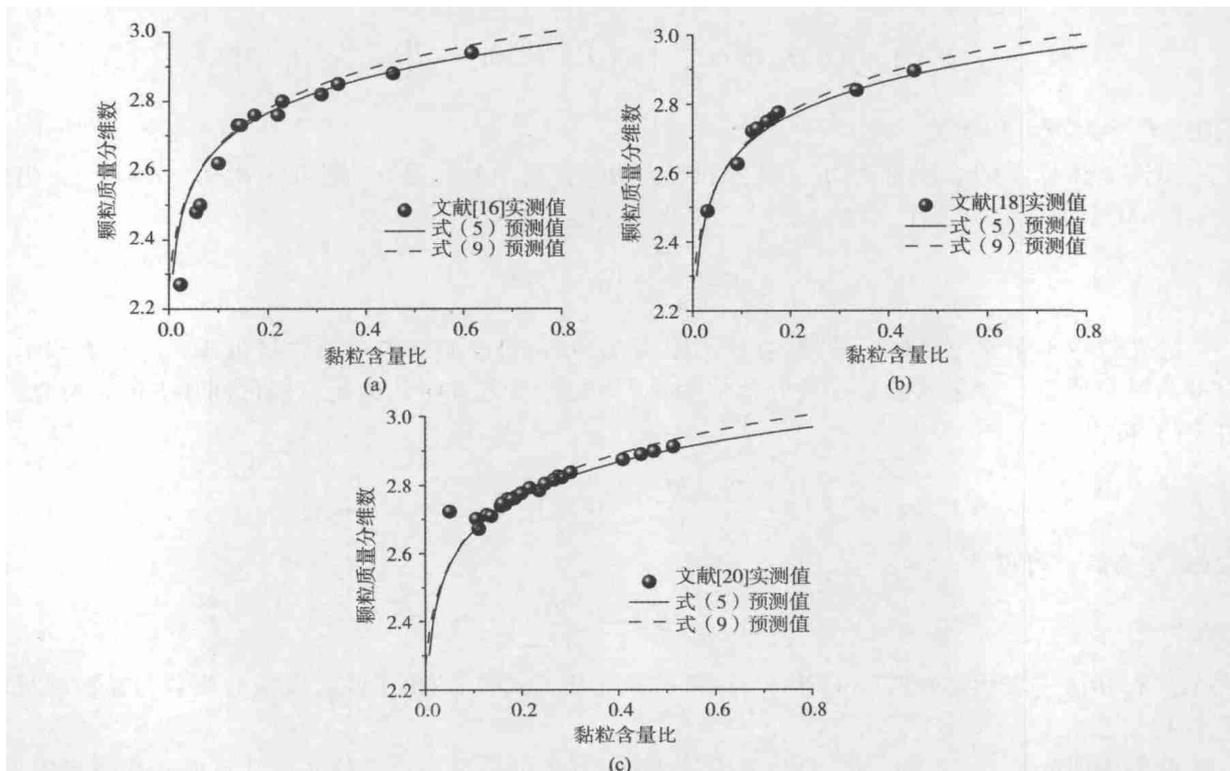


图2 基于黏粒含量的分维数预测

果进行了比较,结果显示了无论黏土、粉土,还是砂土,式(5)显示了良好的适用性,相对误差约为1%。在黏粒含量较小时,式(9)预测值和式(5)预测值几乎一致,黏粒含量较大时,式(9)预测值比式(5)预测值和实测值都要偏大,式(9)预测误差要大于式(5)。

更重要的是,式(9)只是建立在试验数据基础之上的统计关系式,参数无明显的物理意义。式(5)基于分形理论,推导出了黏粒含量与颗粒质量分维数之间的数学关系,为已有研究发现的规律奠定了理论基础。与式(9)相比,式(5)中参数有明确的物理意义,适用范围更广。比如,文献[23]研究了侧限压缩下石英砂砾的颗粒破碎。若以颗粒破碎后产生的粉粒为研究对象,并将 $K_M$ 定义为粒径 $<0.074\text{ mm}$ 粉粒含量比,图3给出了基于粉粒含量的预测结果,式(5)仍然显示了良好的预测效果,但是式(9)预测结果误差较大。

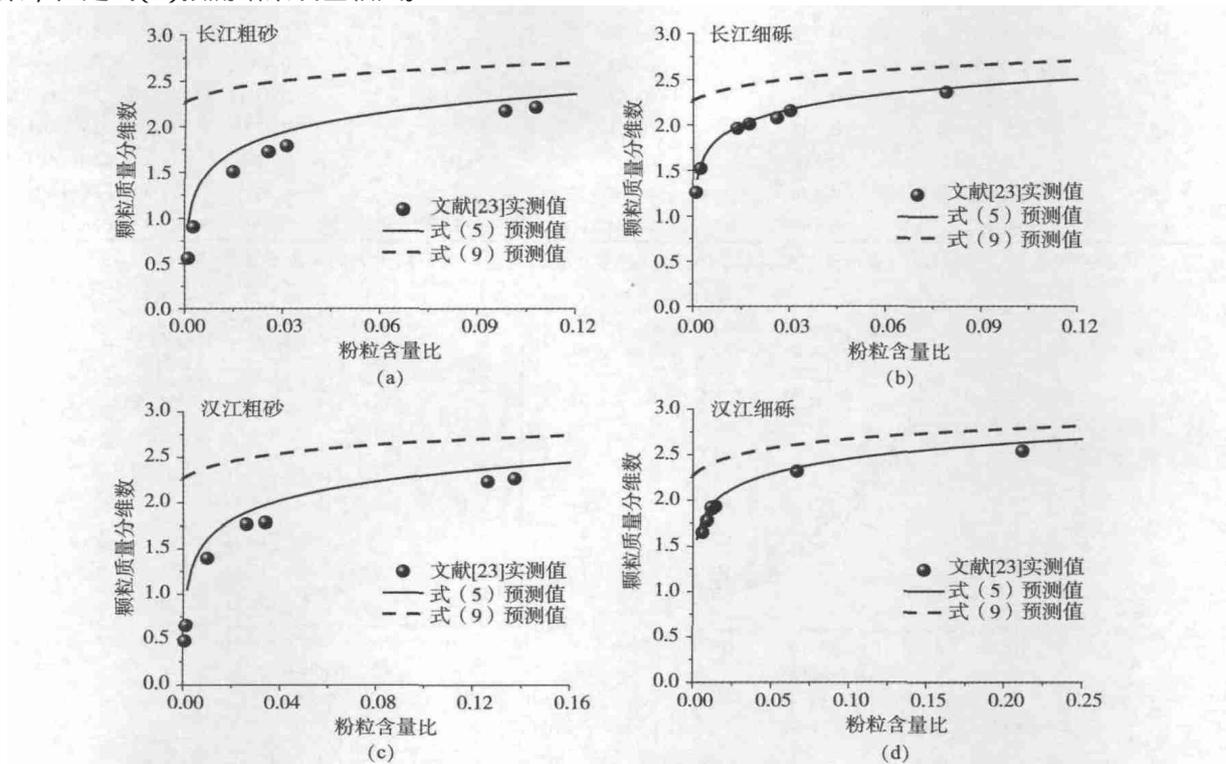


图3 基于粉粒含量的分维数预测

#### 4 土体黏粒含量与土-水特征曲线之间的关系

式(8)给出了黏粒含量与土-水特征曲线之间的关系,为验证其合理性,以文献[10, 24和26]中部分代表样本的试验数据为基础,将式(8)预测结果和试验结果进行对比分析。表1给出了计算中的参数取值。

从图4可以看出,无论 $K_M$ 值最小为0.003的13号砂土,还是最高为0.49的12号黏土,式(8)预测结果与实测结果总体吻合较好。在进气值有实测数据的前11号样本,式(8)预测结果显示了更好的效果,其中3号、6号、以及11号的样本的实测数据与预测曲线基本重合。总之,式(8)可以作为一种基于黏粒含量的土-水特征曲线预测模型,它较为准确的表示了黏粒含量与土-水特征曲线之间的关系,阐释了黏粒含量对土-水特征曲线的影响机制。

为更为形象的比较黏粒含量的高低对土-水特征曲线的影响,在假设 $\theta_s$ 均为0.46的条件下,利用式(8)分别计算了 $K_M=0.02、0.13、0.25、0.5$ 四类土体(可分别代表砂土、砂壤土、粉砂壤土和黏土)的土-水特征曲线,计算结果见图5。计算时进气值参照文献[27]的建议,对不同土类的典型取值分别取7.25、14.71、20.83、37.04 cm  $\text{H}_2\text{O}$ 。图5表明土体黏粒含量越高,在相同的基质吸力的条件下含水率越高。这是因为黏粒含量越高,则土体颗粒比表面积越大,吸附能力越强。

表1 计算参数取值及计算数据来源

样本编号	土体种类	$K_{th}$	$K_{th}$	$\varphi_s/cmH_2O$	$\theta/m^3m^{-3}$	数据来源
1	轻壤土	0.122	0.001	28.62	0.44	文献[24]
2	中粉质壤土	0.176	0.001	34.91	0.43	文献[24]
3	轻粉质壤土	0.164	0.001	35.27	0.42	文献[24]
4	轻壤土	0.131	0.001	27.24	0.49	文献[24]
5	轻粉质壤土	0.159	0.001	19.88	0.50	文献[24]
6	轻粉质壤土	0.152	0.001	17.55	0.50	文献[24]
7	黏土	0.452	0.002	31.75	0.53	文献[24]
8	壤质砂土	0.030	0.002	26.09	0.29	文献[24]
9	壤质黏土	0.335	0.001	34.53	0.52	文献[24]
10	砂质壤土	0.092	0.002	9.01	0.27	文献[24]
11	砂质黏壤土	0.153	0.001	1.95 <sup>1)</sup>	0.46	文献[10]
12	黏土	0.490	0.001	37.04 <sup>2)</sup>	0.41	文献[26]1162号
13	砂土	0.003	0.001	7.25 <sup>2)</sup>	0.373	文献[26]1461号
14	壤土	0.240	0.001	11.11 <sup>2)</sup>	0.708	文献[26]14801号
15	粉砂黏壤土	0.320	0.001	32.26 <sup>2)</sup>	0.52	文献[26]1420号
16	黏土	0.480	0.001	37.04 <sup>2)</sup>	0.456	文献[26]1181号

说明：<sup>1)</sup>表示进气值单位为kPa；<sup>2)</sup>表示进气值无实测数据，参考文献[27]建议的不同土类的典型取值。

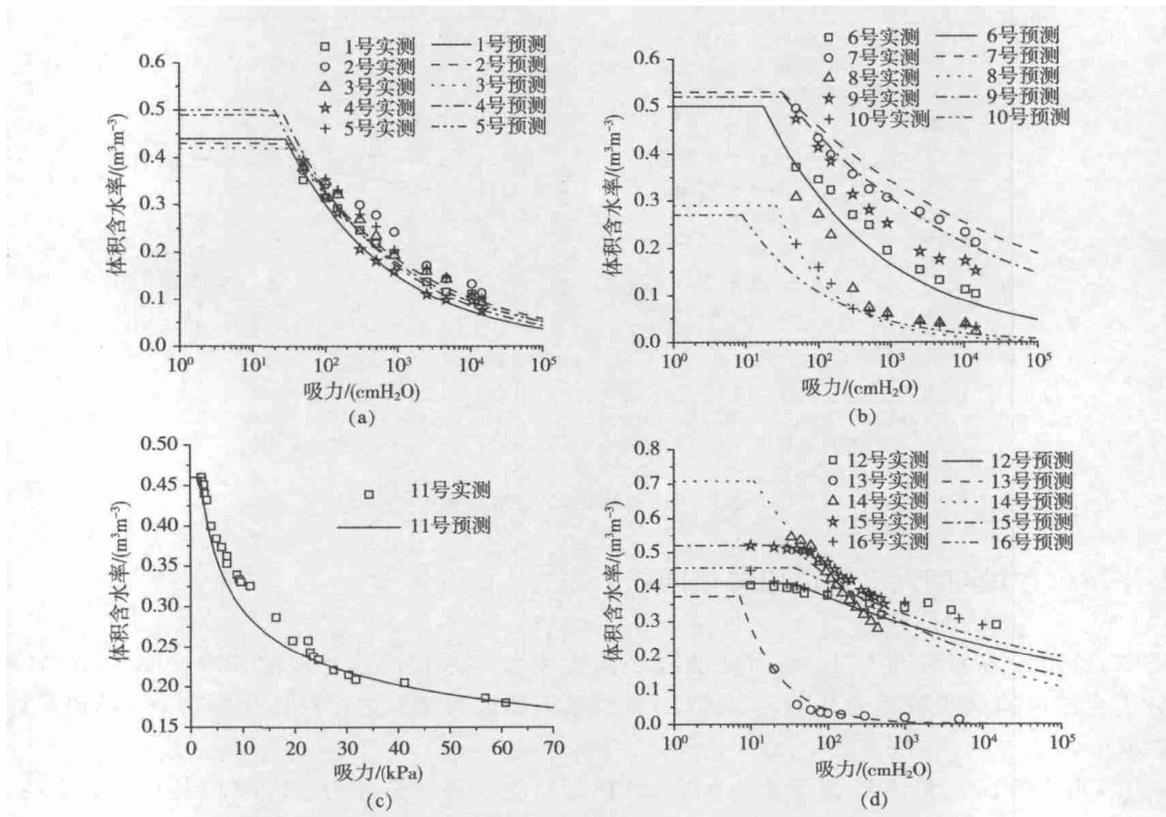


图4 土-水特征曲线实测值及式(8)预测曲线

## 5 结论

本文基于分形理论推导出土体黏粒含量与土体质量分维数之间的关系式，利用已有试验成果，验证了该关系式的合理性。较统计方法给出的已有关系式，该关系式参数有明确的物理意义，适用范围广、预测效果好，并解释了质量分维数随黏粒含量增加而增加的根本原因。结合 Bird 等<sup>[10]</sup>的研究成果，建立了土体黏粒含量对土-水特征曲线影响的分形模型，揭示了黏粒含量对土-水特征曲线影响的机理。利用国内外 16 种不同土类样本的实验结果，验证了该模型的合理性。最后，利用

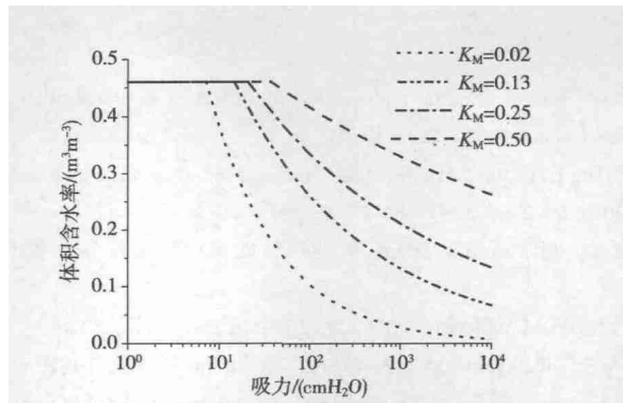


图5 不同黏粒含量的土-水特征曲线比较

所建立的黏粒含量对土-水特征曲线影响的分形模型，预测了不同黏粒含量土体的土-水特征曲线。结果表明：相同吸力条件下，黏粒含量越高，则体积含水率越高，这与已有研究成果吻合较好。

### 参 考 文 献：

- [ 1 ] 叶为民,钱丽鑫,白云,等.由土-水特征曲线预测上海非饱和软土渗透系数[J].岩土工程学报,2005,27(11):1262-1265.
- [ 2 ] 徐永福,黄寅春.分形理论在研究非饱和土力学性质中的应用[J].岩土工程学报,2006,28(5):635-638.
- [ 3 ] Arya L M, Paris J F. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data [J]. Soil Science Society of America Journal, 1981, 45: 1023-1030.
- [ 4 ] Wosten J H M, Pachepsky Y A, Rawls W J. Pedotransfer functions: bridging the gap between available basic soil data and missing soil hydraulic characteristics[J]. Journal of Hydrology, 2001, 251: 123-150.
- [ 5 ] Minasny B, Mcbratney A B, Bristow K L. Comparison of different approaches to the development of pedotransfer functions for water-retention curves[J]. Geoderma, 1999, 93: 225-253.
- [ 6 ] 徐永福,董平.非饱和土的水分特征曲线的分形模型[J].岩土力学,2002,23(4):400-405.
- [ 7 ] Perrier E, Rieu M, Sposito G, et al. Models of the water retention curve for soils with a fractal pore size distribution[J]. Water Resour Res, 1996, 32: 3025-3031.
- [ 8 ] 张季如,陶高梁,黄丽,等.表征孔隙孔径分布的岩土体孔隙率模型及其应用[J].科学通报,2010,55(27-28):2761-2770.
- [ 9 ] Perfect E, Kenst A B, Diaz-Zorita M, et al. Fractal analysis of soil water desorption data collected on disturbed samples with water activity meters[J]. Soil Sci. Soc. Am. J., 2004, 68: 1177-1184.
- [ 10 ] Bird N R A, Perrier E, Rieu M. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions[J]. Eur. J. Soil Sci., 2000, 51: 55-63.
- [ 11 ] 王康,张仁铎,王富庆.基于不完全分形理论的土壤水分特征曲线模型[J].水利学报,2004(5):1-6,13.
- [ 12 ] 刘建立,徐绍辉,刘慧.估计土壤水分特征曲线的间接方法研究进展[J].水利学报,2004(2):68-74.
- [ 13 ] 张季如,祝杰,黄丽,等.固结条件下软黏土微观孔隙结构的演化及其分形描述[J].水利学报,2008,39(4):394-400.
- [ 14 ] 张季如,朱瑞康,祝文化.用粒径的数量分布表征的土壤分形特征[J].水利学报,2004(4):67-71,79.
- [ 15 ] 陶高梁,张季如.表征孔隙及颗粒体积与尺度分布的两类岩土体分形模型[J].科学通报,2009,54(6):838-846.
- [ 16 ] 杨培岭,罗远培,石元春.用粒径的重量分布表征的土壤分形特征[J].科学通报,1993,38(20):1896-1899.
- [ 17 ] 李德成,张桃林.中国土壤颗粒组成的分形特征研究[J].土壤与环境,2000,9(4):263-265.
- [ 18 ] 黄冠华,詹卫华.土壤颗粒的分形特征及其应用[J].土壤学报,2002,39(4):490-497.
- [ 19 ] 苏里坦,宋郁东,陶辉.不同风沙土壤颗粒的分形特征[J].土壤通报,2008,39(2):244-248.
- [ 20 ] 赵来,吕成文.土壤分形特征与土壤肥力关系研究——以皖南地区水稻土为例[J].土壤肥料,2005(6):7-

11.

- [ 21 ] Su Y Z , Zhao H , Zhao W , et al . Fractal features of soil particle size distribution and the implication for indicating desertification[J] . Geoderma , 2004 , 122 : 43-49 .
- [ 22 ] Huang Guan-hua , Zhang Ren-duo , Huang Quan-zhong . Modeling soil water retention curve with a fractal method [J] . Pedosphere , 2006 , 16(2) : 137-146 .
- [ 23 ] 张季如 , 祝杰 , 黄文竞 . 侧限压缩下石英砂砾的颗粒破碎特性及其分形描述[J] . 岩土工程学报 , 2008 , 30 (6) : 783-789 .
- [ 24 ] 詹卫华 . 土壤水力特性分形特征的研究[D] . 北京 : 中国农业大学 , 2000 .
- [ 25 ] Hillel D . Environmental Soil Physics[M] . San Diego : Academic Press , 1998 .
- [ 26 ] Leij F J , Alves W J , Van Genuchten M Th , et al . Unsaturated soil hydraulic database , UNSODA 1. 0 User manual[R] . USEPA . Report 600/R-96/095 . U . S . Environmental Protection Agency , Cincinnati , OH . 1996 .
- [ 27 ] Rawls W J , Brakensiek D L , Saxton K E . Estimation of soil water properties[J] . Trans . ASAE , 1982 , 25 : 1316-1320 .

### A fractal model describing the relation between clay content and soil-water characteristic curve

TAO Gao-liang<sup>1, 2</sup> , ZHANG Ji-ru<sup>3</sup> , ZHUANG Xin-shan<sup>2</sup> , YANG Lin<sup>3</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering , Institute of  
Rock and Soil Mechanics , Chinese Academy of Sciences , Wuhan 430071 , China ;

2. School of Civil Engineering and Architecture , Hubei University of Technology , Wuhan 430068 , China ;

3. School of Civil Engineering and Architecture , Wuhan University of Technology , Wuhan 430070 , China)

**Abstract** : Clay content of soil has an important influence on soil-water characteristic curve. To establish a theoretical model describing the influence of clay content on soil-water characteristic curve , the relation between the clay content and fractal dimension in terms of mass has been established by means of a fractal theory. This relation was verified by test data and used to explain the basic rule that the fractal dimension increases with the increase of clay content. On this basis , a fractal model which reflects the influence of clay content on soil-water characteristic curve was suggested based on the previous results. The results show that the soil-water characteristic curves predicted by the model are in good agreement with several tests data. The model was applied to predict the soil-water characteristic curves of some soils with different clay content and shows the influence of clay content on the soil-water characteristic curve , i.e. , large clay content corresponds to large water content of volume in the case of same soil suction.

**Key words** : soil ; clay content ; soil-water characteristic curve ; fractal model

(责任编辑 : 李 琳)