

文章编号: 1000-7598 (2014) 02-0365-07

非饱和土水-力本构模型及其隐式积分算法

刘 艳^{1,2}, 韦昌富¹, 房 倩², 陈 盼¹

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2.北京交通大学 土建学院, 北京 100044)

摘 要: 在已有工作基础上建立了水力-力学耦合的非饱和土本构模型, 在硬化方程中考虑饱和度的影响, 同时在土水特征曲线中考虑了塑性体变的影响, 从而使模型可以反映非饱和土中的毛细现象与土中弹塑性变形现象的耦合行为。采用隐式积分方法, 建立了非饱和土耦合模型的数值模型, 并推导了得到了水力-力学耦合的非饱和土的一致切线模量。利用该算法编制了本构模型计算的子程序, 使其能向外输出切线刚度矩阵, 用于有限元计算。为了验证该算法和程序的正确性, 用所编制程序对不同路径下的土体行为进行了预测。通过预测结果与试验结果相对比, 表明程序预测结果与试验数据相吻合, 模型可以较好地模拟土体的水力-力学耦合行为特性。

关 键 词: 非饱和土; 本构模型; 隐式积分算法

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

Implicit integration algorithm of a hydro-mechanical coupling constitutive model for unsaturated soils

LIU Yan^{1,2}, WEI Chang-fu¹, FANG Qian², CHEN Pan¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A constitutive model for unsaturated soils' coupling of the mechanical behavior and hydraulic hysteresis is proposed. The degree of saturation is introduced into the hardening equation to reflect the hydraulic effect. Meanwhile, the plastic strain is introduced into the soil water characteristic curve to reflect the mechanical effect. Therefore, the model could well reproduce the influence of hydraulic behavior on the stress-strain behavior and vice versa. An implicit integration algorithm for integration of the nonlinear constitutive model is introduced. Consistent tangent matrix that describes the relationship between stress and strain and the one that describes the relationship between stress and suction are both derived. A corresponding program code is developed, which can be then embedded into existing finite element code for numerical simulation. In order to verify the correctness of the code, it is used to simulate existing test data under different loading paths including drying-wetting cycle test and triaxial shear test. Results indicate that the model accurately predicts the coupling effect of mechanical and hydraulic behaviors of unsaturated soils.

Key words: unsaturated soils; constitutive model; implicit integration algorithm

1 引 言

自然界中真实存在的土多处于非饱和状态, 非饱和土的行为不仅在受到外力作用下时会发生变化, 土中含水率的改变也会使非饱和土的变形和强度发生较大的改变。为了描述非饱和土的复杂的耦合特性, 很多学者都提出了水力-力学相互耦合的非饱和土本构模型。Vaunat 等^[1]在 BBM 模型基础上建立了一个水力-力学耦合的本构模型; Wheeler 等^[2]

提出了等向应力状态下非饱和土的应力-应变行为与液相滞后相耦合的弹塑性模型, Sheng 等^[3]提出了一个完整的耦合模型, 并首次从热力学角度对模型进行了探讨; Tamagnini^[4]通过扩展剑桥模型, 在其中引入液相滞后效应影响, 建立了非饱和土的弹塑性本构模型; 缪林昌^[5]推导出非饱和土的刚度参数随吸力变化而变化的关系式, 得到用平均土骨架应力表述的非饱和土 LC 屈服面函数以及硬化规律。Sun 等^[6]提出了在三轴应力条件下非饱和土水

收稿日期: 2012-11-28

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (No. 2014JBM090); 国家自然科学基金资助项目 (No. 51108022, No. 51208443)。

第一作者简介: 刘艳, 女, 1983 年生, 博士后, 主要从事非饱和土的研究工作。E-mail: 05115257@bjtu.edu.cn

通讯作者: 韦昌富, 男, 1966 年生, 研究员, 博导, 主要从事多孔介质理论及其工程应用研究。E-mail: cfwei@whrsm.ac.cn

力和力学性状耦合的弹塑性模型，并应用变换应力方法将其推广到了三维应力状态。

非饱和土的水力-力学耦合模型可以较好地描述非饱和土基本的行为特性，但却增加了非饱和土本构模型数值实施的复杂性。非饱和土本构积分算法直接影响到整体非线性数值分析的精度和收敛性，本构方程的积分算法一般可分为隐式积分和显式积分两类。显式算法利用增量步起始点的应力来计算屈服面和塑性势梯度，通常显示算法需要将增量步划分为更小的子步，并采用适当的误差控制技术以确保误差在允许范围内。Sheng等^[7-8]，Solowski等^[9-10]等均采用了显式算法对非饱和土进行分析。隐式算法利用当前步未知的应力来计算屈服面和塑性势梯度，其本构矩阵也是未知的，因此，需要进行数值迭代来求解本构方程。Vaunat等^[11]，Zhang等^[12]，Borja^[13]，Hoyos等^[14]，Tamagnini等^[15]，周雷等^[16]都采用了隐式算法来对非饱和土进行分析。Gonzalez等^[17]，Solowski等^[18]用以上两种不同算法对非饱和土进行了分析与对比。总体上，在小应变条件下，两种算法均有较好的收敛性，并能获得较好的精度。显示积分算法的代码相对更易编写，而隐式算法具有更快的收敛速度。

本文将首先给出一个可以描述非饱和土的水力-力学耦合行为的本构模型，随后应用隐式积分算法对本构方程进行数值分析，并给出非饱和土耦合问题的一致切线模量表达式，最后用已有的试验数据来验证该模型和算法的合理性。

2 非饱和土本构方程

Zhao等^[19]以多孔介质理论为基础，在非饱和土功的表达式基础上，提出了非饱和土的广义有效应力原理。根据该原理，刘艳等^[20]采用非饱和土有效应力、修正吸力和气压3个量作为基本的应力状态变量，建立了三轴应力下非饱和土三相耦合的本构模型。本节将以该模型为基础，进行适当简化给出水力-力学耦合的本构方程，用于数值求解。

屈服面方程和塑性势方程采用Collions等^[21]提出的模型，即

$$f_s(\tilde{p}, q, p_c) = M^2 \Pi^2 \tilde{p}(\tilde{p} - p_c) + q^2 = 0 \quad (1)$$

式中： \tilde{p} 为有效应力； q 为剪应力； p_c 为非饱和土屈服应力； $\Pi = 2(1-\alpha)\tilde{p}/\tilde{p}_c + \alpha$ ， α 为材料参数。该模型流动法则在耗散应力空间中为相关联，真实应力空间非关联。

吸力影响着土的屈服应力，这种作用可以通过

加载湿陷屈服面（LC屈服面）来反映，非饱和土的初始LC屈服面可以表示为

$$p_c = \begin{cases} p_{c0} & s \leq s_{se} \\ p_{c0} \left\{ 1 + k_m \left[\left(\frac{s}{s_{se}} \right)^\ell - 1 \right] \right\} & s > s_{se} \end{cases} \quad (2)$$

式中： p_{c0} 为饱和土的先期固结压力； s 为基质吸力， s_{se} 为进气值； k_m 、 ℓ 为材料参数。

由于吸力对土体的作用受到了饱和度的影响，因此，仅仅根据LC屈服面并不能完全反映液相对固相的影响。Jommi^[22]指出，如果不考虑滞后效应，则饱和度和吸力存在惟一的关系，那么使用饱和度或是吸力都是等价的，但如果考虑滞后的话，土体的行为将依赖于交界面的位置，而交界面的分布情况是由饱和度而不是吸力反映的。LC屈服面给出的吸力对屈服应力的影响，无法考虑干湿循环出现的滞后效应。Wheeler等^[2]同样也指出塑性饱和度可以直接反映孔隙中流体的变化情况，它对弯液面的影响比吸力更加重要。因此，可以将固相的硬化方程表示为

$$dp_c = \mathcal{G} p_c d\varepsilon_v^p - k_{sw} p_c dS_r \quad (3)$$

式中： $\mathcal{G} = v/(\lambda - \kappa)$ ； v 为比体积； λ 和 κ 是剑桥模型参数； S_r 为饱和度； k_{sw} 为耦合系数，反映了饱和度改变引起的屈服应力变化，可以通过不同饱和度和条件下土样等向固结试验时初始屈服应力随饱和度的变化情况进行标定。

为了描述非饱和土的液相行为，需要引入土-水特征曲线（SWCC）方程。Sun等^[6]指出，孔隙结构对SWCC有很大影响，为了反映这种影响，可以将SWCC表示为

$$dS_r = -\omega \frac{ds}{s} + k_{ws} \mathcal{G} d\varepsilon_v^p \quad (4)$$

式中： ε_v 为体积应变，上标 p 表示变形为塑性部分； ω 为土水特征曲线的斜率，扫描线上 $\omega = \kappa_w$ ，边界线上 $\omega = \lambda_w$ ； k_{ws} 为耦合系数，反映了固相变形对饱和度的影响，可以利用固相屈服后不同体变条件下的土水特征曲线来进行标定。

利用一致性条件可以推导出增量本构关系为

$$d\sigma = D^{ep} : d\varepsilon + W^{ep} ds \quad (5)$$

式中： σ 为应力张量； ε 为应变张量； D^{ep} 和 W^{ep} 为塑性矩阵，可以表示为

$$D^{ep} = D^e - \frac{D^e g_{,\tilde{\sigma}_d} \otimes f_{,\tilde{\sigma}}^T D^e}{f_{,\tilde{\sigma}}^T D^e g_{,\tilde{\sigma}_d} - f_{,p_c} g_{,\tilde{p}_d} \mathcal{G} p_c (1 - k_{sw} k_{ws})}$$

$$W^{ep} = -\frac{D^c g_{,\dot{\sigma}_d} f_{,p_c} k_{sw} p_c \omega / s}{f_{,\dot{\sigma}}^T D^c g_{,\dot{\sigma}_d} - f_{,p_c} g_{,\dot{p}_d} \mathcal{G} p_c (1 - k_{sw} k_{ws})}$$

其中, $D^c = K \delta \otimes \delta + 2G \left(I - \frac{1}{3} \delta \otimes \delta \right)$ 为弹性模量; δ 为 Kronecker 符号; I 为单位张量; $K = \nu \bar{p} / \kappa$ 为弹性体积模量; $G = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} K$ 为弹性剪切模量; μ 为孔隙比; g 为耗散空间屈服面; $f_{,\dot{\sigma}}$, $g_{,\dot{\sigma}_d}$, $f_{,p_c}$, $g_{,\dot{p}_d}$ 为屈服面或塑性势对应力的导数, 即 $f_{,\dot{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}}$, $g_{,\dot{\sigma}_d} = \frac{\partial g}{\partial \dot{\sigma}_d}$, $f_{,p_c} = \frac{\partial f}{\partial p_c}$, $g_{,\dot{p}_d} = \frac{\partial g}{\partial \dot{p}_d}$, 其中具体求导过程可参考文献[23]。

3 本构积分算法

非饱和土的有限元分析中, 通常需利用已知的应变和吸力增量来计算每个高斯点的应力增量, 因此需要对非饱和土本构关系进行数值积分, 使其可以用于求解边值问题。对于一个非线性问题, 在迭代计算中, 需要对应力进行更新, 利用增量应力-应变关系, 应力积分可以表示为

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^k = \tilde{\sigma}_n + \int_0^{\Delta \varepsilon_n^k} D^{ep} d\varepsilon + \int_0^{\Delta s_n^k} W^{ep} ds \quad (6)$$

式中: $\tilde{\sigma}$ 为有效应力张量; 下标 n 或 $n+1$ 表示当前计算的时间步, 上标 k 表示迭代次数。可以采用隐式算法对式(6)进行积分, 在每一次迭代 k , 应力增量可以按下式计算:

$$\Delta \tilde{\sigma}_{n+1}^k = \left[(1-\theta) D_n^* + \theta D_{n+1}^{*k} \right] : \Delta \varepsilon_{n+1}^k + \left[(1-\theta) W_n^* + \theta W_{n+1}^{*k} \right] \Delta s_{n+1}^k \quad (7)$$

式中: D_n^* 、 W_n^* 为在时间步开始时的切线刚度矩阵; D_{n+1}^{*k} 、 W_{n+1}^{*k} 为在时间步结束时的当前估算值。求解过程中可以取 $\theta = 1$, 即采用向后 Euler 算法。由于刚度矩阵与当前的应力有关, 因此需要通过迭代才能求解。

应力更新算法主要通过弹性预测和塑性修正两个步骤来实现, 计算过程如下:

(1) 弹性预测

已知当前的应变增量 $\Delta \varepsilon_{n+1}^k$ 和吸力增量 Δs_{n+1}^k , 可计算当前应变和吸力

$$\varepsilon_{n+1}^k = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_{n+1}^k \quad (8)$$

$$s_{n+1}^k = s_n + \Delta s_{n+1}^k \quad (9)$$

首先可以对式(4)积分求出此时的饱和度增量

$$\Delta S_{r,n+1}^k = -\omega \ln(s_{n+1}^k / s_n) \quad (10)$$

利用已知增量计算弹性试应力和屈服应力

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^{tr} = \tilde{\sigma}_n + \bar{D}_{n+1}^k : \Delta \varepsilon_{n+1}^k \quad (11)$$

$$p_{c,n+1}^{tr} = p_{c,n} \exp[-k_{sw} \Delta S_{r,n+1}^k] \quad (12)$$

式中: 上标 tr 表示计算值为弹性试算结果。从以上两式可以看到液相对土体弹性变形没有直接影响, 只会引起屈服应力改变。式(11)中 \bar{D} 为切线弹性模量, 根据 Broja^[24], 其中切线体积弹性模量可以按下式计算

$$\bar{K}_{n+1}^k = \frac{\tilde{p}_n}{\Delta \varepsilon_v^c} \left[\exp\left(\frac{\nu}{\kappa} \Delta \varepsilon_v^c\right) - 1 \right] \quad (13)$$

式中: $\Delta \varepsilon_v^c$ 表示弹性体变增量, 在弹性预测的步骤中假定 $\Delta \varepsilon_v^c = \Delta \varepsilon_v$ 。

(2) 塑性修正

将计算出的试应力代入屈服面方程中,

$$f_{n+1}^{tr} = f(\tilde{p}_{n+1}^{tr}, q_{n+1}^{tr}, p_{c,n+1}^{tr}) \begin{cases} \leq 0, & \text{弹性} \\ > 0, & \text{塑性} \end{cases} \quad (14)$$

如果计算表明处于弹性状态, 则直接用试应力更新为当前步的应力值。如果计算表明土体发生屈服, 则需要对应力进行修正, 修正应力可按下式计算:

$$\Delta \tilde{\sigma}_{n+1}^k = \tilde{\sigma}_{n+1}^k - \tilde{\sigma}_{n+1}^{tr} = -\bar{D}_{n+1}^k : \Delta \varepsilon_{n+1}^{p,k} \quad (15)$$

利用图形返回算法, 可以计算出塑性修正量。首先根据流动法则, 积分可以得到塑性应变

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{p,k} = \Delta \phi_{n+1}^k (\bar{g}_{,\dot{\sigma}})_{n+1}^k \quad (16)$$

式中: $(\bar{g}_{,\dot{\sigma}})_{n+1}^k = (1-\theta)(g_{,\dot{\sigma}})_n + \theta(g_{,\dot{\sigma}})_{n+1}^k$, 此时饱和度需重新计算, 即

$$\Delta S_{r,n+1}^k = -\omega \ln(s_{n+1}^k / s_n) + k_{ws} \mathcal{G}^k \Delta \phi_{n+1}^k (\bar{g}_{,\dot{\sigma}})_{n+1}^k \quad (17)$$

此外根据硬化法则, 积分可以得到屈服应力的增量

$$p_{c,n+1}^k = p_{c,n+1}^{tr} \exp\left[\mathcal{G}^k \Delta \phi_{n+1}^k (\bar{g}_{,\dot{p}})_{n+1}^k\right] \quad (18)$$

修正后必须满足约束条件, 即屈服面等于 0

$$f_{n+1}^k = f(\tilde{p}_{n+1}^k, q_{n+1}^k, p_{c,n+1}^k) = 0 \quad (19)$$

因此需要对式(16), (18)、(19)联立求解, 为了书写方便, 以下将下标 $n+1$ 省略, 因此可以得到如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} r_1^k &= [\bar{\mathbf{D}}^k]^{-1} : \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k + \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\sigma_d}^k = 0 \\ r_2^k &= -p_c^k + p_c^{\text{tr}} \exp[(1 - k_{\text{ws}} k_{\text{sw}}) \mathcal{G}^k \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p}}^k] = 0 \\ f^k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将式 (20) 线性化, 整理前两式可以得到

$$\begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k \\ \Delta p_c^k \end{Bmatrix} = -[A^k]^{-1} \begin{Bmatrix} r_1^k \\ r_2^k \end{Bmatrix} - \delta \phi^k [A^k]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_{,\sigma_d}^k \\ \chi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p}}^k \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式中: $\chi^k = \mathcal{G} p_c^{\text{tr}} (1 - k_{\text{ws}} k_{\text{sw}}) \exp(\mathcal{G}^k \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p}}^k)$,

$$A^k = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{D}}^k]^{-1} + \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\sigma_d \sigma}^k & \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\sigma_d p_c}^k \\ \chi^k \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p} \sigma}^k & -I + \chi^k \Delta \phi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p} p_c}^k \end{bmatrix}.$$

将式 (21) 代入式 (20) 中的第 3 式, 可以求出 $\delta \phi^k$

$$\delta \phi^k = \frac{f^k - [f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}, f_{,p_c}] [A^k]^{-1} \begin{Bmatrix} r_1^k \\ r_2^k \end{Bmatrix}}{[f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}, f_{,p_c}] [A^k]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{g}}_{,\sigma}^k \\ \chi^k \bar{\mathbf{g}}_{,\bar{p}}^k \end{Bmatrix}} \quad (22)$$

把式 (22) 代入式 (21) 可以求出应力和屈服应力增量, 然后可对应力、屈服应力和饱和度进行更新

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi^{k+1} &= \Delta \phi^k + \delta \phi^k, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k \\ p_c^{k+1} &= p_c^k + \Delta p_c^k, \quad S_r^{k+1} = S_r^k + \Delta S_r^k \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

将更新后的值代入方程进行下一步迭代计算, 直至屈服函数小于容许误差后, 计算结束。

4 一致切线模量

在隐式算法中, 需要给出一致切线模量来代替式 (5) 的连续弹塑性模量。这一方面可以避免材料在刚刚发生屈服由弹性行为转为塑性行为时, 连续弹塑性模量引起的伪加载和卸载, 另一方面也使得计算具有二阶收敛性。对与非饱和土, 其一致切线模量定义为

$$\mathbf{D}^{\text{con}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{W}^{\text{con}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial s} \quad (24)$$

塑性应变增量可以表示为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \delta \phi \mathbf{g}_{,\sigma_d} + \Delta \phi \mathbf{g}_{,\sigma_d \sigma} : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \phi \mathbf{g}_{,\sigma_d p_c} dp_c \quad (25)$$

根据应力应变关系有

$$d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (26)$$

将式 (4) 代入式 (3) 中, 硬化法则重新表示为

$$dp_c = \mathcal{G} p_c (1 - k_{\text{ws}} k_{\text{sw}}) d\boldsymbol{\varepsilon}_v^p + k_{\text{sw}} p_c \omega \frac{ds}{s} \quad (27)$$

将式 (25) 代入式 (26) 和式 (27), 整理后有

$$\begin{Bmatrix} d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ dp_c \end{Bmatrix} = A^{-1} \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ (k_{\text{sw}} p_c \omega / s) ds \end{Bmatrix} - \delta \phi A^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{,\sigma_d} \\ \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

将式 (28) 代入一致性条件 $f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + f_{,p_c} dp_c = 0$, 可以求出

$$\delta \phi = \frac{[f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}, f_{,p_c}] A^{-1} \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ (k_{\text{sw}} p_c \omega / s) ds \end{Bmatrix}}{[f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}, f_{,p_c}] A^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{,\sigma_d} \\ \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} \end{Bmatrix}} \quad (29)$$

将式 (29) 代入式 (28), 可以给出一致切线模量表达式为

$$\mathbf{D}^{\text{con}} = A_{11} - \frac{B_1 C_1}{\Lambda} \quad (30)$$

$$\mathbf{W}^{\text{con}} = \left(A_{12} - \frac{B_1 C_2}{\Lambda} \right) k_{\text{sw}} p_c \frac{\omega}{s} \quad (31)$$

式 (30)、(31) 中各系数的表达式为

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = A^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{,\sigma_d} \\ \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} \mathbf{g}_{,\sigma_d} + A_{12} \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} \\ A_{21} \mathbf{g}_{,\sigma_d} + A_{22} \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \\ f_{,p_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + A_{12} f_{,p_c} \\ A_{12} f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + A_{22} f_{,p_c} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = A_{11} f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{g}_{,\sigma_d} + A_{21} f_{,p_c} \mathbf{g}_{,\sigma_d} + A_{12} f_{,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d} + A_{22} f_{,p_c} \chi \mathbf{g}_{,\bar{p}_d}$$

5 算例验证

为了使模型可以用于有限元计算, 需要按本构积分算法编制本构模型的子程序, 使其能向外输出刚度矩阵。非饱和土本构积分算法的精度将直接影响到整体非线性数值分析的精度和收敛性, 因此在进行有限元分析之前, 首先需对本构积分程序有效性和准确性进行验证。本节将选用择 Sun 等^[6, 25]对非饱和土三轴仪对珍珠黏土 (Pearl clay) 试验数据来验证模型和算法的合理性。

Sun 等^[6]对珍珠黏土进行了干湿循环试验, 试验中控制净应力为 20 kPa, 初始孔隙比分别为 1.78。表 1 给出了该试验的应力路径。模型主要参数见表 2。

表 1 干湿循环试验应力路径
Table 1 Loading path for drying-wetting cycle test

路径	吸力变化范围/kPa
A→B 干燥	98→490
B→C 湿化	490→5
C→D 干燥	5→490
D→E 湿化	490→7

表 2 干湿循环试验参数取值
Table 2 Parameters for drying-wetting cycle test

传统参数	SWCC 参数	耦合系数
$\lambda = 0.12, \kappa = 0.02,$ $\mu = 0.4, \alpha = 1.1, M = 1.15$	$\lambda_w = 0.18,$ $\kappa_w = 0.04$	$k_{sw} = 5,$ $k_{ws} = 0.1$

图 1、2 分别给出了孔隙比和饱和度的预测结果，通过与试验结果对比，可以看到模型可以很好的预测土体在干湿循环条件水力-力学行为的耦合效应。图 1 模拟了孔隙比在干湿循环过程中的变化情况，在初始干燥 AB 只有弹性变形，随后湿化过程 (BC) 中出现明显的塑性湿陷，再干燥过程 (CD) 也表现明显的弹塑性变形。模型不仅可以反映液相变形对土骨架变形的影响，同时模型也可以反映土体变形对 SWCC 的影响。试验结果表明，土体越密实，在相同吸力处的饱和度会越大，即孔隙比减小会使 SWCC 曲线向右移动。

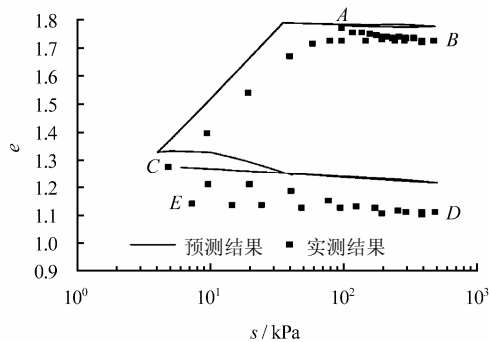


图 1 孔隙比与吸力关系

Fig.1 Relationship between void ratio and suction

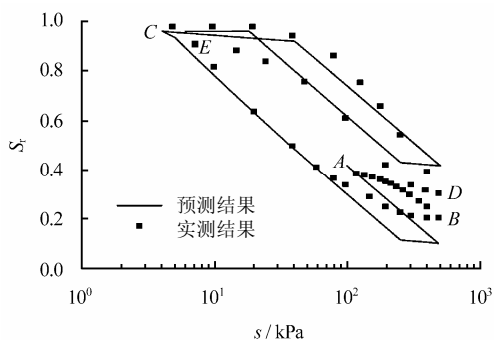


图 2 饱和度与吸力的关系

Fig.2 Relationship between degree of saturation and suction

图 2 中可以看到，当土体经过一次干湿循环 (ABC) 后，孔隙比有明显的下降，使得第二次干湿循环 (CDE) 土-水特征曲线向右移动，与试验结果吻合。

Sun 等^[25]利用三轴仪对非饱和土进行了三轴压缩 (CDEFG) 的剪切试验。试验应力路径见图 3，首先将土样在常吸力 147 kPa 条件下等向固结直至平均净应力 196 kPa (CD)；随后控制平均净应力 196 kPa 和吸力 147 kPa 不变，进行三轴剪切试验 (DE)；剪切至 E 点后，净应力和剪应力不变，进行湿化试验，吸力从 147 kPa 降至 0 (EF)；最后在饱和阶段进行剪切试验 (FG)。主要材料参数取值见表 3。

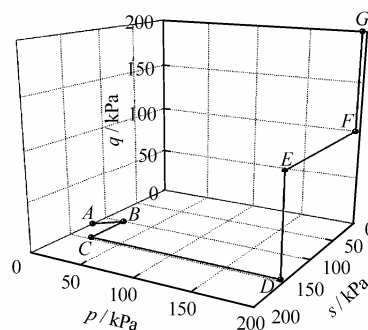


图 3 三轴剪切试验应力路径

Fig.3 Loading path for triaxial shear test

表 3 剪切试验参数取值
Table 3 Parameters for shear test

传统参数	SWCC 参数	耦合系数
$\lambda = 0.14, \kappa = 0.03,$ $\mu = 0.4, \alpha = 1.1, M = 1.15$	$\lambda_w = 0.12,$ $\kappa_w = 0.03$	$k_{sw} = 3,$ $k_{ws} = 0.8$

图 4、5 给出了模型与试验结果进行对比。通过与试验结果进行对比，可以看到预测曲线与试验点基本吻合，模型计算得到的应力和体变在试验结束时均表现出了临界状态。说明该模型可以较好地反映三轴剪切的试验结果。

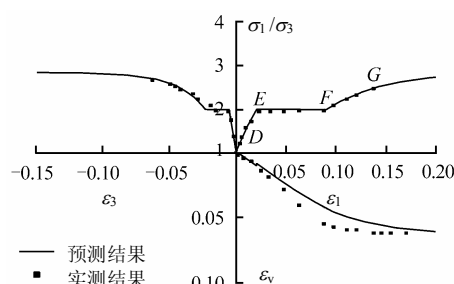


图 4 三轴压缩剪切试验应力应变关系

Fig.4 Stress-strain relationship in triaxial shear test

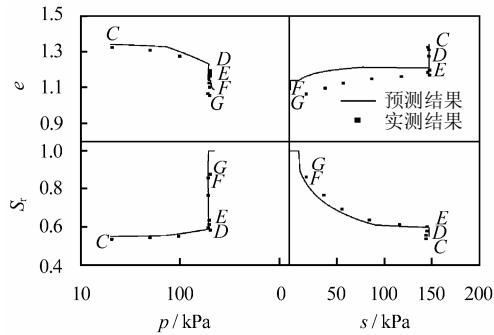


图5 三轴压缩剪切试验孔隙比和饱和度结果
Fig.5 Results of void ratio and degree of saturation in triaxial shear test

6 结 论

(1)对非饱和土本构的数值计算方法进行了研究,采用隐式积分方法,建立了水力-力学耦合的非饱和土耦合问题的数值模型。

(2)推导了得到了固液耦合的非饱和土的一致切线模量,不仅给出了应力-应变关系模量,同时还推导出了与饱和度相关的一致性切线模量。

(3)编制了计算程序,对各种不同路径下的土体行为进行了预测。将预测结果与已有试验数据进行了对比,表明模型可以较好地模拟在干湿循环,以及三轴剪切等不同路径下土体的水力-力学耦合行为特性,说明本文所采用非饱和土本构模型隐式积分算法是合理的。

(4)下一步的工作将是把模型法应用于已有的有限元程序 U_DYSAC2 中进行初边值问题数值分析计算,使模型可以应用于在实际工程的问题中。

参 考 文 献

- [1] VAUNAT J, ROMERO E, JOMMI C. An elastoplastic hydromechanical model for unsaturated soils[C]// Proceedings of an international workshop on unsaturated soils. Italy: Balkema, 2000: 121-138.
- [2] WHEELER S J, SHARMA R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. *Geotechnique*, 2003, 53(1): 41-54.
- [3] SHENG D, SLOAN S W, GENS A. A constitutive model for unsaturated soils: Thermomechanical and computational aspects[J]. *Computational Mechanics*, 2004, 33(6): 453-465.
- [4] TAMAGNINI R. An extended cam-clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis[J]. *Geotechnique*, 2004, 54(3): 223-228.
- [5] 缪林昌. 非饱和土的本构模型研究[J]. *岩土力学*, 2007, 28(5): 855-860.
- [6] MIAO Lin-chang. Research of constitutive model of unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(5): 855-860.
- [7] SUN D A, SHENG D C, CUI H B, et al. A density-dependent elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated compacted soils[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2007, 31(11): 1257-1279.
- [8] SHENG D, SLOAN S W, GENS A, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(9): 745-765.
- [9] SHENG D, SMITH D W, SLOAN S W, et al. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part II: Verification and application[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(9): 767-790.
- [10] SOŁOWSKI W T, GALLIPOLI D. Explicit stress integration with error control for the Barcelona basic model. Part I: Algorithms formulation[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, 37: 59-67.
- [11] SOŁOWSKI W T, GALLIPOLI D. Explicit stress integration with error control for the Barcelona basic model. Part II: Algorithms efficiency and accuracy[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, 37: 68-81.
- [12] VAUNAT J. A stress point algorithm for an elastoplastic model in unsaturated soils[J]. *International Journal of Plasticity*, 2000, 16: 121-141.
- [13] ZHANG H W. Implicit integration of a generalized plasticity constitutive model for partially saturated soil[J]. *Engineering Computations*, 2001, 18(1/2): 314-336.
- [14] BORJA R I. Cam-clay plasticity, Part V: A mathematical framework for three phase deformation and strain localization analysis of partially saturated porous media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 5301-5338.
- [15] HOYOS L R, ARDUINO P. Implicit algorithms in modeling unsaturated soil response in three-invariant stress space[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2008, 8: 266-273.
- [16] TAMAGNINI R, MAVROULIDOU M, GUNN M J. Implicit integration of a constitutive model for partly saturated structured porous materials[D]. London: CRC Press, 2011: 1087-1092.

- 263—268.
- [18] SIMMS P H, YANFUL E K. Predicting soil-water characteristic curves of compacted plastic soils from measured pore-size distributions[J]. **Geotechnique**, 2002, 52(4): 269—278.
- [19] ALONSO E E, LLORET A, GENS A. Experimental behaviour of highly expansive double-structure clay[C]// Proceedings of 1st International Conference on Unsaturated Soils. Paris: [s. n.], 1995: 11—16.
- [20] SHARMA R S. Mechanical behaviour of unsaturated highly expansive clays[D]. UK: University of Oxford, 1998.
- [21] WHEELER S J, SHARMA R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(1): 41—54.
- [22] HANKS R J. Water vapour transfer in dry soil[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1958, 22(3): 392—394.
- [23] RYU J, ETEY L J. Water vapour movement in soil: Reconciliation of theory and experiment[J]. **Soil Science Society of America Journal**, 1979, 43(5): 823—827.
- [24] BOCKING K A, FREDLUND D G. Limitations of the axis translations technique[C]// Proceedings of 4th International Conference on Expansive Soils. Denver: ASCE, 1980: 117—135.
- [25] TARANTINO A. Direct measurement of soil water tension[C]// Proceedings of 3rd International Conference on Unsaturated Soils. Recife: Taylor & Francis, 2004: 1005—1017.
- [26] 刘晓敏, 赵慧丽, 王连俊, 等. 非饱和粉质粘土的土水特性试验研究[J]. 地下空间, 2001, 21(5): 375—378.
LIU Xiao-min, ZHAO Hui-li, WANG Lian-jun, et al. Experimental study on soil-water character of unsaturated powdery clay[J]. **Underground Space**, 2001, 21(5): 375—378.
- [27] 陈伟, 孔令伟, 郭爱国, 等. 吸力对弱膨胀土强度贡献的试验研究与预测分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(7): 1783—1787.
CHEN Wei, KONG Ling-wei, GUO Ai-guo, et al. Experimental study and predictive analysis of contribution of matrix suction to shear strength of weak expansive soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(7): 1783—1787.
- 上接第 370 页
- [16] 周雷, 张洪武. 非饱和土化学-塑性耦合本构行为的数值模拟[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 2133—2140.
ZHOU Lei, ZHANG Hong-wu. Numerical simulation for chemo-plastic coupled constitutive behavior of partially saturated soils[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(7): 2133—2140.
- [17] GONZALEZ N A, GENS A. Evaluation of a constitutive model for unsaturated soils: Stress variable and numerical implementation[M]. London: CRC press, 2011: 829—836.
- [18] SOŁOWSKI W T, HOFMANN M, HOFSTETTER G et al. A comparative study of stress integration methods for the Barcelona basic model[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 44: 22—33.
- [19] ZHAO Cheng-gang, LIU Yan, GAO Fu-ping. Work and energy equations and the principle of generalized effective stress for unsaturated soils[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34(9): 920—936.
- [20] 刘艳, 赵成刚, 蔡国庆, 等. 考虑气相压力变化和偏应力影响的非饱和土本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(5): 754—761.
LIU Yan, ZHAO Cheng-Gang, CAI Guo-qing, et al. A new model for unsaturated soils considering variation of gas pressure and shear stress[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(5): 754—761.
- [21] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2002, 26(13): 1313—1347.
- [22] JOMMI C. Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils[C]// Proceedings of an International Workshop on Unsaturated Soils. Italy: Balkema, 2000. 139—154.
- [23] LI X S. Thermodynamics-based constitutive framework for unsaturated soils. 2: A basic triaxial model[J]. **Geotechnique**, 2007, 57(5): 423—435.
- [24] BORJA R I. Cam-clay plasticity, Part II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1991, 88(2): 225—240.
- [25] SUN D A, CUI H B, MATSUOKA H. A three-dimensional elastoplastic model for unsaturated compacted soils with hydraulic hysteresis[J]. **Soils and Foundations**, 2007, 47(2): 253—264.