

一种考虑拉破坏的强度折减法研究

袁 维, 李小春, 白 冰, 石 露

(中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘要: 强度折减法广泛应用于边坡安全系数的计算, 在用强度折减法进行安全系数计算时应考虑张拉屈服形式。从实际工程出发, 并结合张拉-剪切屈服准则, 提出一种新的考虑岩体张拉破坏特性的强度折减法。指出在强度折减过程中, 岩土体的抗拉强度、内摩擦角和黏聚力不是任意的, 而应满足一个不等式。基于这一不等式, 指出当前考虑张拉破坏强度折减法的不足, 并且通过算例验证本文所提方法的合理性。

关键词: 边坡工程; 强度折减法; 张拉破坏; 边坡稳定性; 安全系数

中图分类号: P 642

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2014)增 1-3009-06

A STRENGTH REDUCTION METHOD CONSIDERING TENSILE FAILURE

YUAN Wei, LI Xiaochun, BAI Bing, SHI Lu

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: Strength reduction method(SRM) is widely used for calculating the safety factor of the slope. In realistic slope engineering, shear failure is not the only mode in rock masses, the tensile failure may also occur in certain areas, which means that the tensile failure should also be taken into consideration in SRM. In this paper, a strength reduction method considering tensile failure is proposed, indicating that the tensile strength, internal friction angle and cohesion should satisfy an inequality during strength reduction process. Based on this inequality, the drawback of the current SRM considering the tensile failure is pointed out. At last, the validity of the proposed method is verified through a case study.

Key words: slope engineering; strength reduction method(SRM); tensile failure; slope stability; safety factor

1 引 言

O. C. Zienkiewicz 等^[1]于 1975 年最早提出用强度折减法计算边坡的安全系数, 其定义安全系数为岩土体的实际抗剪强度与临界状态抗剪强度的比值。1999 年, D. V. Griffith 和 P. A. Lane^[2]采用有限元强度折减法计算的安全系数与传统极限平衡法得到的安全系数极为接近, 从而推动了对强度折减法

的研究热潮。在以往的研究中, 一般只考虑岩土体的剪切破坏而不考虑张拉破坏^[3-5], 即使在计算过程中考虑了岩体的张拉破坏, 对抗拉强度参数的处理往往采用以下 2 种方法: (1) 只折减抗剪强度参数而不折减抗拉强度参数^[6-7]; (2) 抗剪强度参数和抗拉强度参数采用相同的折减系数^[8-9]。这 2 种折减方式皆未考虑抗拉强度对临界滑动面的影响。在实际工程中, 无论是自然边坡还是开挖形成的人工边坡, 张拉裂缝大多以竖直或近竖直态从顶部延伸至一定

收稿日期: 2013-08-13; **修回日期:** 2013-09-02

基金项目: 中国科学院事业费专项重大重要方向性项目(KZCX2-YW-T12)

作者简介: 袁 维(1986-), 男, 2009 年毕业于中南大学土木工程专业, 现为博士研究生, 主要从事 CO₂ 地质封存力学稳定性评价方面的研究工作。E-mail: yuanweisuper001@126.com。通讯作者: 李小春(1964-), 男, 博士, 现任研究员、博士生导师。E-mail: xcli@whrsm.ac.cn

深度，特别是当边坡处于临界状态时，张拉裂缝的深度更大，分布范围更广^[10-12]。因此，利用强度折减法计算安全系数时应考虑这一实际工程现象。

首先从实际工程出发，分析边坡临界状态时潜在滑动面上的应力分布，根据剪切-张拉复合破坏准则，拟建立抗剪强度参数与抗拉强度参数在折减计算过程中应满足的关系，探讨当前考虑张拉破坏的强度折减法可能存在的弊端，最后用算例说明本文所提方法的可行性。

2 考虑张拉破坏的强度折减法

Mohr-Coulomb 准则广泛应用于岩土工程中，但是，该准则只能描述剪切破坏模式，而在真实的工程中，剪切破坏和张拉破坏往往同时存在，因此，B. Paul^[13]为了弥补 Mohr-Coulomb 准则的缺陷，提出一种简便易行的剪切-张拉复合破坏准则，即破坏面上法向应力为压时采用 Mohr-Coulomb 准则，破坏面上法向应力为拉时采用最大拉应力准则，如图 1 所示。在主应力空间表示为

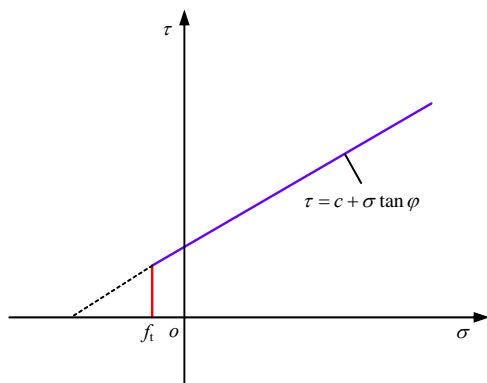


图 1 剪切-张拉复合破坏准则

Fig.1 Shear-tensile compound failure criterion

$$\left. \begin{aligned} F^t &= \sigma_3 - f_t = 0 \\ F^s &= \sigma_1 - \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 - \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： σ_1 ， σ_3 分别为最大、最小主应力； f_t ， c ， φ 分别为岩体的抗拉强度、黏聚力和内摩擦角。

假设某个处于临界状态边坡的潜在滑动面由张拉屈服段(AB段)和剪切屈服段(BC段)组成，张拉屈服段呈竖直状态，张拉屈服段与剪切屈服段的拐点为点B，其深度为 Z_0 ，如图2所示。

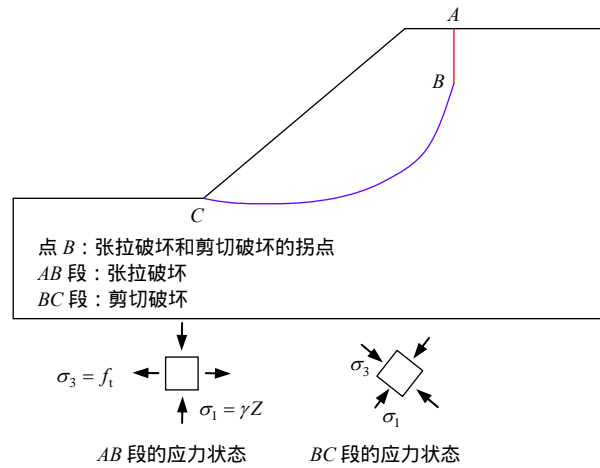


图 2 潜在滑动面示意图

Fig.2 Schematic diagram of potential sliding surface

假设该边坡岩体黏聚力为 c ，内摩擦角为 φ ，抗拉强度为 f_t ，重度为 γ ，AB段某点的竖直深度为 Z 。同时，假设主应力以拉应力为负，压应力为正，由于AB段为张拉屈服临界状态，因此，最大主应力方向为竖直方向，其大小为岩体的自重；最小主应力方向为水平方向，其大小为岩体的抗拉强度，AB段各点的主应力可由下式表示，方向见图2：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \gamma Z \\ \sigma_3 &= -f_t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

显然，随着深度的增加，AB段的最大主应力逐渐增大，而最小主应力恒等于 $-f_t$ ，但是此时应力圆尚未与斜直线相切；当深度增大到点B时，应力圆同时与竖直线和斜直线相切；BC段各点属于剪切屈服，其应力圆与斜直线相切，主应力方向随位置的变化而变化。整个潜在滑面的应力状态在 σ - τ 坐标轴上表示如图3所示。

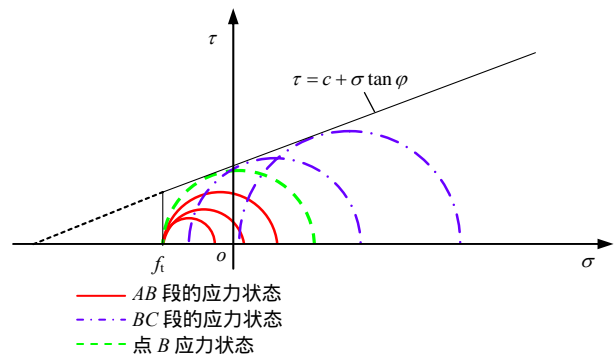


图 3 潜在滑动面应力状态

Fig.3 Stress states of potential sliding surface

把点B的应力状态代入式(1)可得

$$Z_0 = \left(-\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} f_t + \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) / \gamma \quad (3)$$

显然，点 B 的深度大于 0，令 $Z_0 > 0$ 得到

$$f_t < \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (4)$$

因此，在符合张拉-剪切复合准则的条件下，要满足在边坡顶部出现一定深度的张拉裂缝，岩体的 f_t ， c 和 φ 必然存在关系(式(4))。笔者查阅上百种不同类型岩石的抗拉、抗剪强度参数，皆满足式(4)。故在用强度折减法计算安全系数时，若要体现张拉裂缝的存在，则抗拉、抗剪强度参数在任一步折减计算都必须满足式(4)。

在折减计算过程中，为了保证式(4)恒成立，可假定在每一步折减过程中下式恒成立：

$$\frac{2c_i \cos \varphi_i}{1 + \sin \varphi_i} = \beta f_{ti} \quad (5)$$

式中： f_{ti} ， c_i 和 φ_i 对应于第 i 步折减后的抗拉强度、黏聚力和内摩擦角； β 为常数，且有

$$\beta = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{1}{f_t} \quad (6)$$

式中： f_t ， c 和 φ 为岩体真实的强度参数。

当折减系数趋于无穷大时，必有 $c_i \rightarrow 0$ ， $\varphi_i \rightarrow 0$ 。由式(5)可知， $f_{ti} \rightarrow 0$ ，此时岩石的性质类似于既无抗剪强度又无抗拉强度的水，由此可见式(5)在此意义上的合理性。事实上，式(5)建立的是岩体抗拉和抗剪强度之间的关系，但是尚缺乏必要的试验和力学基础，因此，式(5)在此处仅为了使强度折减法所找到的临界状态更为接近工程实际。从另一个角度来看，式(4)虽然是从一个特定的工程现象推导得到的，但是却符合岩体的普遍力学性质。

3 对考虑张拉屈服强度折减法的探讨

边坡临界状态的屈服形态可以通过强度折减法找到，若要保证在边坡顶部出现张拉屈服单元，则临界状态时的岩体强度参数必然要满足式(4)。下面考察 2 种不同的考虑张拉破坏的强度折减法。

(1) 只折减抗剪切强度参数而不折减抗拉强度参数

首先令

$$f(c, \varphi) = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{2c}{\frac{1}{\cos \varphi} + \tan \varphi} \quad (7)$$

对式(7)的 c 和 $\tan \varphi$ 同时除以折减系数 k ($k > 1$)，可得

$$F(c, \varphi) = \frac{2c}{\frac{k}{\cos \varphi'} + \tan \varphi} \quad (8)$$

式中： φ' 为折减后的内摩擦角。

通过相除比较计算，可得

$$\frac{1}{\cos \varphi} < \frac{k}{\cos \varphi'} \quad (9)$$

因此，有 $f(c, \varphi) > F(c, \varphi)$ 成立。这表明，随着折减系数的增大， $f(c, \varphi)$ 是逐渐减小的。由于不对 f_t 进行折减计算， f_t 始终保持不变，故当 k 增大到某个值时，并不能保证式(4)成立。所以，此折减方法并不能保证临界状态的边坡顶部出现张拉破坏区。

(2) 抗剪强度参数和抗拉强度参数采用相同的折减系数

此折减方法可表示为

$$k = \frac{c}{c'} = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi'} = \frac{f_t}{f'_t} \quad (10)$$

式中： c' ， φ' ， f'_t 分别表示折减后的黏聚力、内摩擦角和抗拉强度。

假设强度参数折减后亦满足式(4)，则有

$$\frac{f'_t}{2c'} < \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \quad (11)$$

显然，黏聚力、内摩擦角和抗拉强度除以一个相同的折减系数后，式(11)的左边项是个定值，恒等于强度折减前的 $f_t/(2c)$ ，而右边项则随着折减系数变化而变化。

假设式(11)右边项是一个关于 φ 的函数，即

$$f(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (12)$$

其导函数为

$$f'(\varphi) = -\frac{1}{1 + \sin \varphi} \quad (13)$$

由式(13)可得， $f'(\varphi)$ 恒小于 0，因此， $f(\varphi)$ 是一个关于 φ 的递减函数。随着折减系数的增大， φ 不断减小， $f(\varphi)$ 不断增大。若边坡实际安全系数 $k_0 > 1.0$ ，则式(11)恒成立；若边坡实际安全系数 $k_0 < 1.0$ 时，并不能保证式(11)恒成立。

特别地，假设折减系数取某个值时，式(11)的

左边项与右边项相等，即

$$\frac{f'_t}{2c'} = \frac{f_t}{2c} = \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \quad (14)$$

由式(14)可得

$$\tan \varphi' = \frac{4c^2 - f_t^2}{4cf_t} \quad (15)$$

联立式(10)，(15)可得此时的临界折减系数 k ：

$$k = \frac{4cf_t \tan \varphi}{4c^2 - f_t^2} \quad (16)$$

故若边坡真实的安全系数 $k_0 > k$ 时，式(11)能够满足；若边坡的安全系数 $k_0 < k$ 时，则折减到临界状态时，式(11)不能满足。

综上所述，以上 2 种考虑张拉破坏的强度折减法并不能一定保证式(4)的成立。因此，采用式(5)，(6)的方法，对黏聚力、内摩擦角和抗拉强度进行配套折减，可保证式(4)的恒成立。

4 算例分析

4.1 算例 1

此算例的目的是为了说明考虑张拉强度但只折减剪切强度参数的方法不能真实反映临界状态的滑动面形态。边坡网格模型及尺寸如图 4 所示，岩体重度 $\gamma = 2\ 500\ \text{kN/m}^3$ ，弹性模量 $E = 12.5\ \text{MPa}$ ，泊松比 $\nu = 0.25$ ，黏聚力 $c = 62\ \text{kPa}$ ，内摩擦角 $\varphi = 42^\circ$ ，抗拉强度 $f_t = 50\ \text{kPa}$ (当不考虑张拉破坏时， $f_t = 1 \times 10^9\ \text{kPa}$)。采用 3 种折减方法进行安全系数计算：(1) 不考虑张拉破坏；(2) 考虑张拉强度，但只折减剪切强度参数；(3) 采用本文的折减方法。失稳判据为塑性区贯通+计算不收敛复合判据。3 种计算方法得到的安全系数如表 1 所示，塑性区分布如图 5 所示。

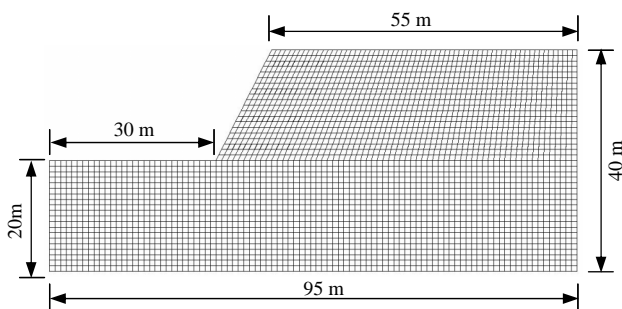


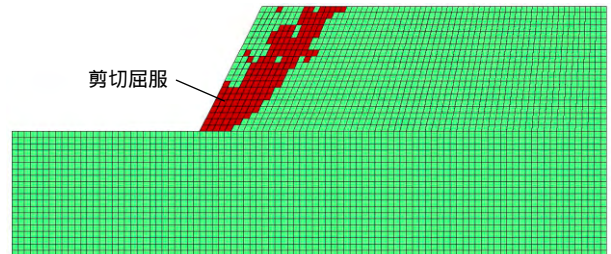
图 4 边坡网格模型图

Fig.4 Slope model

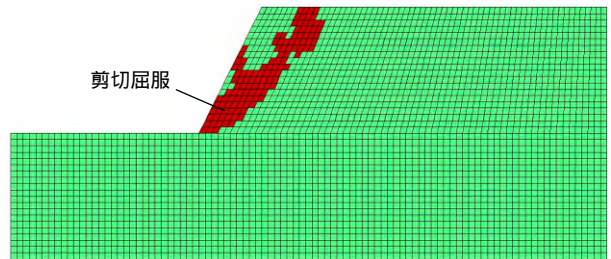
表 1 算例 1 三种方法的安全系数

Table 1 Factors of safety for three methods in case 1

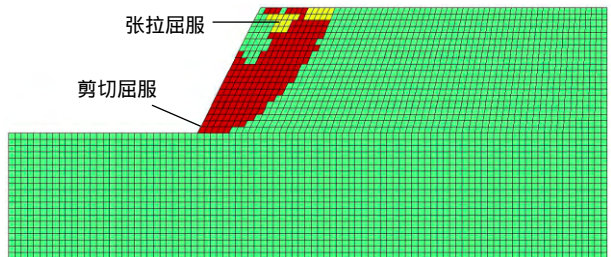
方法编号	安全系数
1	1.633
2	1.632
3	1.619



(a) 第 1 种方法



(b) 第 2 种方法



(c) 第 3 种方法

图 5 算例 1 三种方法塑性区

Fig.5 Distribution of plastic zones for three methods in case 1

当采用第 2 方法使边坡达到临界状态时，折减后黏聚力 $c' = 38\ \text{kPa}$ ，折减后内摩擦角为 $\varphi' = 28.89^\circ$ ， $(2c' \cos \varphi') / (1 + \sin \varphi') = 44.86\ \text{kPa} < f_t$ ，不满足不等式(4)，临界状态未出现张拉屈服，因此所得的安全系数(1.632)与不考虑张拉破坏时的安全系数(1.633)大致相等，且塑性区分布图大致相同(如图 5(a),(b)所示)。第 3 种方法在折减过程中始终满足不等式(4)，因此，当边坡处于临界状态时，顶部出现了张拉屈服区，此方法所得的安全系数(1.619)比前 2 种方法所得的安全系数要小。

4.2 算例 2

此算例的目的是为了说明考虑张拉强度、抗拉和抗剪强度参数采用相同的折减系数的方法不能真实反映临界状态的滑动面形态。边坡网格模型及尺寸与算例 1 相同，岩体重度 $\gamma=2500 \text{ kN/m}^3$ ，弹性模量 $E=12.5 \text{ MPa}$ ，泊松比 $\nu=0.25$ ，黏聚力 $c=28 \text{ kPa}$ ，内摩擦角 $\varphi=26^\circ$ ，抗拉强度 $f_t=32 \text{ kPa}$ (当不考虑张拉破坏时， $f_t=1 \times 10^9 \text{ kPa}$)。采用 3 种折减方法进行安全系数计算：(1) 不考虑张拉破坏；(2) 考虑张拉强度，抗拉、抗剪强度参数采用相同的折减系数；(3) 采用本文的折减方法。失稳判据为塑性区贯通+计算不收敛复合判据。3 种计算方法得到的安全系数如表 2 所示，塑性区分布图如图 6 所示。

表 2 算例 2 三种方法安全系数

Table 2 Factors of safety for three methods in case 2

方法编号	安全系数
1	0.819
2	0.818
3	0.812

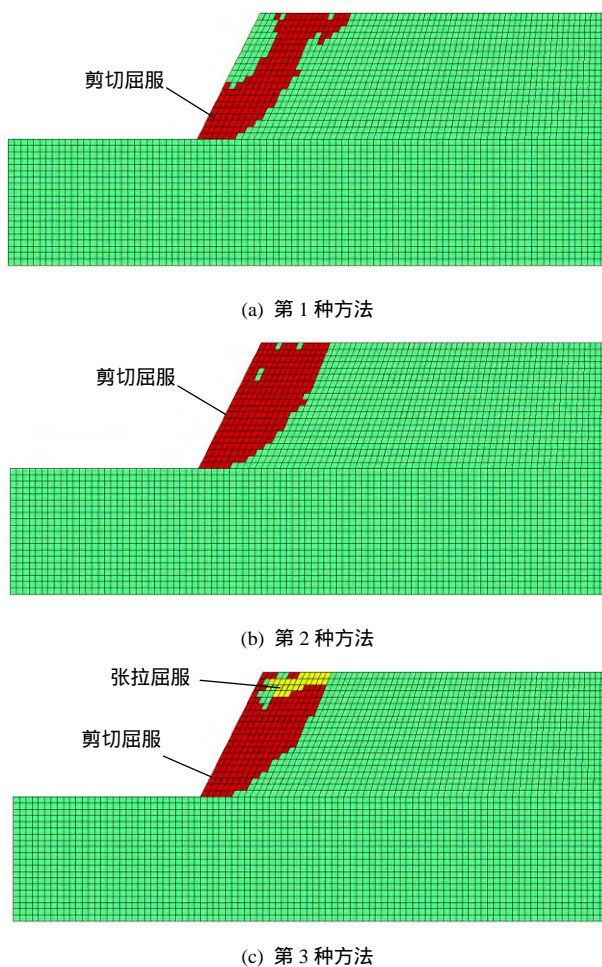


图 6 算例 2 三种方法塑性区

Fig.6 Distribution of plastic zones for three methods in case 2

当采用第 2 方法使边坡达到临界状态时，折减后的黏聚力 $c'=34.3 \text{ kPa}$ ，折减后的内摩擦角 $\varphi'=30.84^\circ$ ，折减后的抗拉强度 $f_t'=39.2 \text{ kPa}$ ， $(2c' \cos \varphi') / (1 + \sin \varphi') = 38.91 \text{ kPa} < f_t'$ ，不满足式(4)，临界状态未出现张拉屈服区，此所得的安全系数(0.818)与不考虑张拉破坏时的安全系数(0.819)大致相等，但是，其塑性区比第 1 种方法所得的塑性区稍大。第 3 种方法在折减过程中始终满足不等式(4)，因此，当边坡处于临界状态时，顶部出现了张拉屈服区，此方法所得的安全系数(0.812)比前 2 种方法所得的安全系数要小。

5 结 论

本文从工程现象出发，提出了一种新的考虑张拉破坏的强度折减法，并通过算例验证了理论推导的正确性，其结论如下：

(1) 在强度折减计算过程中，黏聚力、内摩擦角和抗拉强度的折减不是任意的，三者应该满足一个不等式关系(式(4))。

(2) 不满足式(4)的强度折减法所得到的临界状态滑动面均不会在边坡顶部出现张拉屈服区，所得到的安全系数均大于本文所提方法得到的安全系数，因此，本文方法所得的安全系数偏保守，有利于边坡的稳定性评价。

(3) 上述不等式虽然是从工程现象推导而来，但反映了岩石的普遍性质。

虽然取得了以上有益观点，但是，文中式(5)所建立的抗剪、抗拉强度参数的关系仅仅是为了使折减法找到的临界状态尽可能地接近实际，尚缺乏相应的试验和力学基础， β 值的物理意义尚不明确。另外，文中采用的边坡模型较简单：均质岩体、坡顶为水平面、裂缝呈竖直状态，因此，较为复杂的边坡模型和裂缝形态值得进一步的研究。

参考文献(References)：

- [1] ZIENKIEWIEZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. Geotechnique, 1975, 25(4) : 671 - 689.

- [2] GRIFFITHS D V , LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique* , 1999 , 49(3) : 387 – 403.
- [3] MATSUI T , SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. *Soil and Foundations* , 1992 , 32(1) : 59 – 70.
- [4] WANG Dasheng , ZHANG Liaojun , XU Jianjun , et al. Seismic stability safety evaluation of gravity dam with shear strength reduction method[J]. *Water Science and Engineering* , 2009 , 2(2) : 52 – 60.
- [5] CHENG Y M , LANSIVAARA T , WEI W B. Two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods[J]. *Computers and Geotechnics* , 2007 , 34 : 137 – 150.
- [6] LIN Hang , CAO Ping , GONG Fengqiang , et al. Directly searching method for slip plane and its influential factors[J]. *Journal of Central South University of Technology* , 2009 , (16) : 131 – 135.
- [7] 戴自航 , 刘志伟 , 刘成禹 , 等. 考虑张拉与剪切破坏的土坡稳定数值分析[J]. *岩石力学与工程学报* , 2008 , 27(2) : 375 – 382.(DAI Zihang , LIU Zhiwei , LIU Chengyu , et al. Numerical analysis of soil slope stability considering tension and shear failures[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering* , 2008 , 27(2) : 375 – 382. (in Chinese))
- [8] ALEJANO L R , ALONSL E. Application of the shear and tensile strength reduction technique to obtain factors of safety of toppling and footwall rock slopes[J]. *Impact of Human Activity on the Geological Environment* , 2005 : 7 – 13.
- [9] 赖杰 , 方玉树. 专虑抗拉强度的含外倾结构面岩质边坡稳定性分析[J]. *后勤工程学院学报* , 2011 , 27(6) : 7 – 12.(LAI Jie , FANG Yushu. Stability analysis of rock slope with extorsion joint considering tensile strength[J]. *Journal of Logistical Engineering University* , 2011 , 27(6) : 7 – 12.(in Chinese))
- [10] KOGURE T , AOKI H , MAEKADLA , et al. Effect of the development of notches and tension crack on instability of limestone coastal cliffs in the Ryukyus , Japan[J]. *Geomorphology* , 2006 , 80 : 236 – 244.
- [11] BROWN I , HITTINGER M , GOODMAN R. Finite element study of the Nevis Bluff rock slope failure[J]. *Rock Mechanics* , 1980 , 12 : 231 – 245.
- [12] KROEGER E B. Analysis of plane failures in compound slopes[J]. *International Journal of Surface Mining , Reclamation and Environment* , 2000 , 14 : 215 – 222.
- [13] PAUL B. Modification of the Coulomb-Mohr theory of fracture[J]. *Journal of Applied Mechanics* , 1961 , 28 : 259 – 268.