

文章编号: 1000-4750(2013)08-0127-06

下限问题中基于四边形单元平衡方程的 边界积分法

李春光, 朱宇飞, 刘 丰, 邓 琴, 郑 宏

(中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北, 武汉 430071)

摘 要: 相对于三角形单元的下限分析, 基于四边形单元的下限分析具有更高的精度和求解效率。该文利用格林公式把平衡方程的弱形式化为边界积分, 从而得到简洁的线性方程, 取代了以往的数值积分方案, 克服了高斯积分中坐标变换等复杂的求解过程。此外还对应力连续性方程进行了简化。该积分方案不仅大大简化了计算, 而且更易于编程实现。算例表明该文方法具有较高的精度。

关键词: 下限分析; 四边形单元; 边界积分; 高斯积分; 应力连续条件

中图分类号: TU318 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.04.0279

BOUNDARY INTEGRAL METHOD FOR EQUILIBRIUM EQUATIONS OF LOWER BOUND PROBLEMS BASED ON QUADRILATERAL ELEMENTS

LI Chun-guang, ZHU Yu-fei, LIU Feng, DENG Qin, ZHENG Hong

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: For a lower bound analysis, a quadrilateral element is more efficient and accurate, compared with a triangle element. The regional integral resulted from the weak form of equilibrium equations is reduced into a boundary integral through Green's theorem, and linear equilibrium equations are greatly simplified. The numerical integral scheme and coordinate transform in Gaussian integral are avoided. Furthermore, the stress continuity equations are also reduced. The presented method not only simplifies the calculation, but also makes it easy to program. The examples show that the method has higher accuracy.

Key words: lower bound analysis; quadrilateral element; boundary integral; Gaussian integral; stress continuity condition

自从 Drucker 和 Prager^[1]将极限分析法提出后, 它在岩土领域得到了广泛应用。Chen^[2]在他发表的专著《极限分析和土体塑性》中进一步阐明了极限分析理论在土工问题中的应用。在大多数情况下, 人们关心的不是系统的失稳过程, 而是其安全系数及其破坏模式。而极限分析理论的最大优点就是回

避了工程中最不容易弄清楚的诸如流动法则等本构关系, 直接研究边坡的极限状态, 因而是一种合理而且可行的方法。

自从 20 世纪 60 年代、70 年代以来, 计算机的发展不仅使塑性力学得到了极大的发展, 而且也为极限分析提供了有力的工具。Lysmer^[3]最早利用有

收稿日期: 2012-04-20; 修改日期: 2012-07-27

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2011CB013505); 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室知识创新工程青年人才领域前沿项目(O713021Q01)

通讯作者: 李春光(1973—), 男, 河南商丘人, 副研究员, 博士, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: cgli@whrsm.ac.cn).

作者简介: 朱宇飞(1987—), 男, 浙江海宁人, 硕士, 主要从事岩土力学方面的研究(E-mail: j05230130@sina.com);

刘 丰(1987—), 男, 湖北黄冈人, 博士生, 主要从事计算岩石力学方面的研究(E-mail: liu-hb@sina.com);

邓 琴(1983—), 女, 安徽滁州人, 博士, 主要从事计算岩石力学方面的研究(E-mail: dengqin_x@163.com);

郑 宏(1964—), 男, 湖北襄阳人, 研究员, 博士, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作(E-mail: hzheng@whrsm.ac.cn).

限元和线性规划求解了下限问题,提出了用内接正多边形替代 Mohr-Coulomb 屈服面作为强度条件的概念,开始了对非线性问题线性化的尝试,限于当时计算机技术发展水平,求解的规模十分有限; Sloan^[4]基于活动集算法将极限分析下限原理与有限元法和线性规划法结合起来,可以在不事先假定静力模式的前提下高效地求得安全系数(或极限载荷)的全局最优解(下限解)。

随后,下限原理有限元得到了快速的发展,李国英等^[5]详细介绍了下限原理有限元法并讨论了边坡稳定安全系数和超载系数的关系及其解法;殷建华等^[6]采用刚体有限元法与极限分析相结合引入非线性数学规划方法求解最小安全系数;杨洪杰等^[7]采用序列二次规划算法求解了矩形表面基础的承载力问题;黄齐武^[8]通过引入二阶锥形规划理论,利用原-对偶预测-校正算法有效地求解了极限分析问题;陈炜和王均星^[9]结合块体元和塑性极限分析,并利用数学规划的方法,针对节理岩体的力学特性提出了一种岩石边坡稳定分析的块体元塑性极限分析下限法;杨小礼^[10]基于非线性 Hoek-Brown 破坏准则建立岩石极限分析非线性理论,并进行了上下限的分析。

但上述工作均采用了三角形单元,本文作者把四边形单元引入了下限分析^[11],但其中的平衡方程是通过高斯积分得到的,求解过程需要坐标变换,计算较为复杂。为此,本文在上述工作的基础上,利用格林公式把弱形式的平衡方程简化为边界积分,从而得到简洁的线性方程,为基于四边形单元下限法的推广提供了理论基础。

1 极限分析的下限原理

极限分析的下限原理可以表述为:与静力容许场对应的外载荷不大于真实的极限载荷。所谓静力容许场是指在所求区域 V 内满足静力平衡条件和屈服条件,并在其应力边界 S_T 上满足应力边界条件的应力场 σ_{ij} 。

下限定理提出了结构不破坏的必要条件,用它可计算结构承载能力的下限,这样的下限有无穷多个。为了便于比较,可以设极限荷载 T_i 为真实荷载 \bar{T}_i 的 η 倍, η 称为极限荷载因子。这样,下限法的求解实际上可以归结为如下的数学规划问题:在所有与极限荷载 $\eta\bar{T}_i$ 平衡的静力许可应力场中,寻找最大的极限荷载因子 η 。也即:

$$\begin{aligned} \max : & \eta \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sigma_{ij,j} + \eta F_i = 0 & (V\text{内}) \\ f(\sigma_{ij}) \leq 0 & (V\text{内}) \\ \sigma_{ij} n_j = \eta \bar{T}_i & (S_T\text{上}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

将式(1)中的平衡方程、强度条件、应力边界条件及应力连续性条件组合在一起,再借助于有限元的区域离散和应力插值,则求解下限的非线性规划问题就变成了线性规划问题。

2 下限原理有限元法

下限求解的难点在于如何构造静力许可场,尽管可以采用边界元法^[12]、无网格^[13]等构造应力场,但有限元法仍是目前最主要的方法,本文仍基于 Lysmer^[3]的节点应力插值的思想进行下限分析,基本方程包括平衡方程、屈服条件、应力边界条件及应力连续性方程,下面分别对这些基本方程进行讨论。

2.1 基于四边形单元的平衡方程

式(1)中的第一个约束方程即为平衡方程,对于岩土工程平面问题可表达为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

式中, γ 为岩土体的重度。

本文计算区域采用四边形单元进行离散,利用四边形单元的插值函数可得单元内的应力场:

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_x^i, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_y^i, \quad \tau_{xy} = \sum_{i=1}^4 N_i \tau_{xy}^i \quad (3)$$

式中, σ_x^i 、 σ_y^i 、 τ_{xy}^i 为节点 i 的应力分量。将其代入平衡方程式(2)可得:

$$[B^e] \{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (4)$$

这里:

$$\begin{aligned} [B^e] &= [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \\ B_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i=1 \cdots 4 \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\} &= [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}.$$

因为插值函数 N_i 包含了二次项, 也即 $\xi\eta$ 项,

可见 $\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\}^T$ 是线性的, 但 $[J]^{-1}$ 为非线性,

由此导致了 $[B^e]$ 是坐标的非线性函数。

2.1.1 平衡方程的弱形式

由于式(4)是非线性的, 也就是说, 对于四边形, 不可能像三角形那样要求满足点点平衡。不过, 我们可以借鉴常规有限元的思路, 使其在积分意义满足平衡条件, 对式(4)两边进行积分并除以单元面积 A , 可得其弱形式:

$$[\bar{B}^e] \{\sigma^e\} = \{b^e\} \quad (5)$$

其中:

$$[\bar{B}^e] = [\bar{B}_1 \quad \bar{B}_2 \quad \bar{B}_3 \quad \bar{B}_4] \quad (6)$$

$$\bar{B}_i = \frac{1}{A} \int \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} dA, \quad i=1 \dots 4 \quad (7)$$

显然, $[\bar{B}^e]$ 是常矩阵。

这样, 结合下面的屈服条件、边界条件等就可以得到基于四边形网格下有限元的数学规划问题。

2.1.2 平衡方程的等价边界积分

显然, 式(6)可采用高斯积分方案^[1], 由于该方案涉及到雅克比矩阵及其求逆等, 计算较为繁琐。借助于格林公式, 可以把式(7)的二维积分为一维积分:

$$\bar{B}_i = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} \oint N_i dy & 0 & -\oint N_i dx \\ 0 & -\oint N_i dx & \oint N_i dy \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于四边形单元插值函数具有双线性特性, 则在边界上表现为线性函数, 如图 1 所示, 对于节点的插值函数 N_i , 其值在相邻两边上是线性变化的, 而在另外两条边上值为 0。如设节点 i 的前后节点号分别为 $i+1$ 和 $i-1$, 则:

$$\begin{cases} \oint N_i dy = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ \oint N_i dx = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) \end{cases} \quad (9)$$

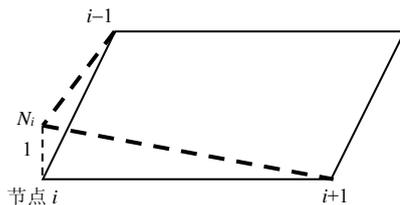


图 1 节点 i 的插值函数在单元边界上的特征

Fig.1 The feature of the interpolation function of node i on element boundary

将式(9)代入式(8), 就可得到线性化的平衡方程, 这样大大简化了计算, 不仅避免了高斯积分中的坐标变换及雅克比矩阵的求逆运算, 且得到的矩阵简洁优美。

2.2 应力连续方程

计算区域内必须保证相邻单元在公共边两侧的正应力 σ_n 与剪应力 τ 分别相等, 如图 2 所示, 也即:

$$\begin{cases} \sigma_n^a = \sigma_n^b \\ \tau^a = \tau^b \end{cases} \quad (10)$$

其中, a 与 b 代表相邻单元, 如图所示。

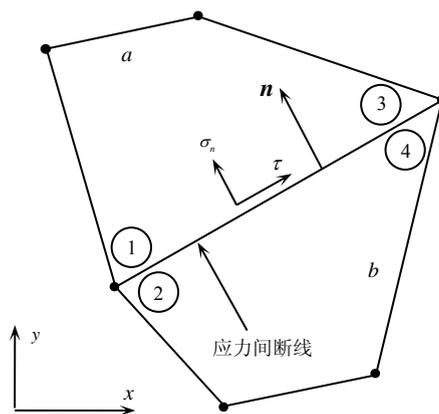


图 2 相邻单元应力连续条件

Fig.2 Stress continuous condition between adjacent elements

在每个单元边界上应力呈线性变化, 所以只需在相邻单元公共边两端处的应力分量满足 σ_n 与 τ 的连续性即可, 式(10)等价于:

$$\begin{cases} \sigma_n^1 = \sigma_n^2 \\ \tau^1 = \tau^2 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \sigma_n^3 = \sigma_n^4 \\ \tau^3 = \tau^4 \end{cases} \quad (11)$$

这里上标 1~4 代表节点, 设单元边界的单位法向量为 $\{n_x, n_y\}$, 则:

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad (12)$$

以节点对(1,2)为例, 应力连续性条件:

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^1 & \tau_{xy}^1 \\ \tau_{xy}^1 & \sigma_y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \tau_{xy}^2 \\ \tau_{xy}^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

显然, $\begin{vmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{vmatrix} = -1$, 式(13)两边左乘 $\begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix}^{-1}$,

则式(13)等价于:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^1 & \tau_{xy}^1 \\ \tau_{xy}^1 & \sigma_y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \tau_{xy}^2 \\ \tau_{xy}^2 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (14)$$

式(13)与式(14)等价说明了: 公共边两侧的正应力 σ_n 和剪应力 τ 分别相等与 σ_x 和 σ_y 分别相等是等价的。但采用式(14)更加简单。为方便编程, 式(14)还可写成:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \tau_{xy}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \tau_{xy}^2 \end{bmatrix} = 0$$

2.3 应力边界条件

如应力边界的单位外法向量为 $\{n_x, n_y\}$, 则应力边界条件为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ n_y & -n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_n \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} \quad (15)$$

这里 $\bar{\sigma}_n$ 和 $\bar{\tau}$ 分别是给定的法向和切向应力分量。

2.4 屈服条件

对平面问题, 假设拉正压负, 则 Mohr-Coulomb 屈服准则可表示为:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 \leq 0 \quad (16)$$

其中: c 为粘聚力; φ 为内摩擦角。

采用内接正 p 多边形来逼近半径为 R 的屈服圆, 如图 3 所示, 则每个节点的屈服条件均可用 p 个线性方程代替, 则正多边形第 k 条边表示的限制条件为:

$$A_k \sigma_k + B_k \sigma_k + C_k \tau_{xy} \leq D, k=1, 2, \dots, p \quad (17)$$

$$\begin{cases} A_k = \cos \frac{\pi}{p} \sin \varphi + \cos \frac{2\pi k}{p} \\ B_k = \cos \frac{\pi}{p} \sin \varphi - \cos \frac{2\pi k}{p} \\ C_k = 2 \sin \frac{2\pi k}{p} \\ D = 2c \cos \frac{\pi}{p} \cos \varphi \end{cases}$$

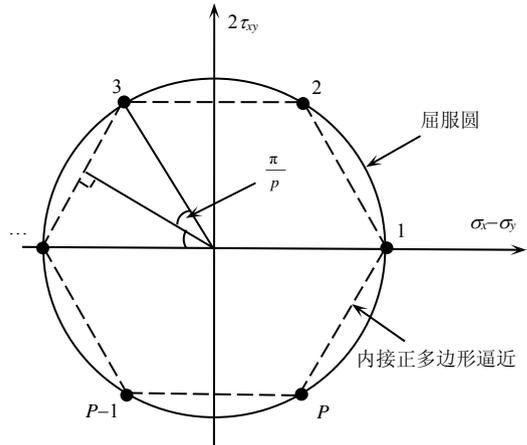


图 3 线性化的 Mohr-Coulomb 屈服函数

Fig.3 Linearized Mohr-Coulomb yield function

把式(5)、式(14)、式(15)和式(17)代入式(1), 即构成了下限原理有限元的线性规划模型。

3 数值算例

本文的算例均采用 Lingo 进行计算。

3.1 算例 1

该算例选自文献[14], 一边坡模型, 尺寸如图 5 所示, 坡体粘聚力 $c = 58.86\text{kPa}$, 摩擦角 $\varphi = 11.31^\circ$, 重度 $\gamma = 19.62\text{kN/m}^3$ 。边界条件为底部固定, 两侧法向约束, 模型共划分 369 个四边形单元, 见图 6。

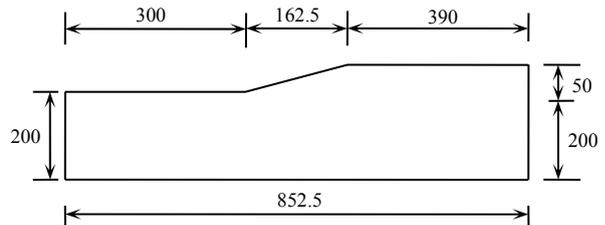


图 5 算例 1 的尺寸 /m

Fig.5 Size of example 1

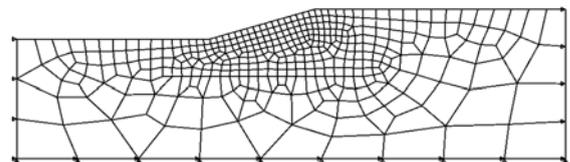


图 6 算例 1 的单元划分及边界条件

Fig.6 Numerical mesh and boundary constraint of example 1

屈服面采用内接 18 边形逼近, 计算得到的下限解为 1.336, 相对于同样密度的三角形得到 1.248 的安全系数更加接近于下限解。采用有限元强度折减法得到的安全系数为 1.32~1.35, 其中 1.32 是不调整泊松比时得到的, 而 1.35 是在计算过程调整泊松比得到的^[14], 与本文得到的下限解一致。值得注

意的是该算例采用极限平衡法得到的结果均偏大，其值为 1.360~1.365，见表 1，这可能是该算例取的计算区域较大，由于极限平衡法不能考虑潜在滑体以外的各种因素，诸如位移边界条件、滑体以外的隧道开挖等均会对应力场带来一定程度的影响，从而直接影响安全系数的大小，这一点极限平衡法是无法考虑的。

表 1 算例 1 的计算结果
Table 1 Results of example 1

计算方法	简化 Bishop	Spencer 法	Morgenstern-Price 法	文献[14]	下限法 (三角形)	本文方法
安全系数	1.362	1.365	1.360	1.32~1.35	1.248	1.336

3.2 算例 2

此算例选自文献[5]，某边坡坡高 60m，坡度为 1:2.5，由三层填土组成，各层填土的土料参数见表 2，模型只受重力荷载。计算尺寸如图 7 所示，网格划分及边界条件如图 8 所示，共划分 311 个四边形单元。

表 2 算例 2 中的土性参数
Table 1 Parameters of soils in example 2

土层	c/kPa	$\phi(^{\circ})$	$\gamma(\text{kN/m}^3)$
I	16	22	17.5
II	18	25	18.2
III	21	29	19.6

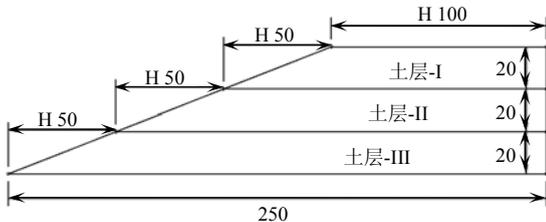


图 7 算例 2 的模型尺寸
Fig.7 Size of example 2

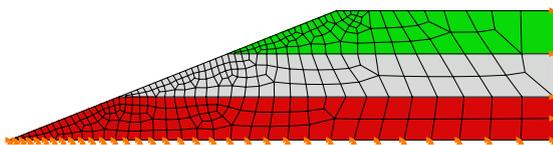


图 8 算例 2 单元划分及边界条件

Fig.8 Numerical mesh and boundary constraint of example 2

屈服面采用内接 18 边形逼近，四边形单元计算得到的下限解为 1.598，比三角形单元得到的 1.569 接近于实际的下限解，这与各种极限平衡法计算的结果(见表 3)都非常一致，而文献[5]采用下限有限元法得到的下限解为 1.36，这可能是限于早期的下限有限元法的计算能力有限，只能对少量的单元进行计算，而单元越少时下限解越小正

是下限有限元法的特点^[11]，因而文献[5]得到的下限解较小。

表 3 算例 2 的计算结果
Table 3 Results of example 2

计算方法	简化 Bishop	Spencer 法	Morgenstern-Price 法	文献[5]	下限法 (三角形)	本文方法
安全系数	1.595	1.599	1.599	1.36	1.569	1.598

4 结论

下限原理有限元法是用来求解土工极限平衡课题的一种非常实用的工具。本文是在以往的工作基础上，采用格林公式把其中基于四边形网格的平衡方程区域积分化为边界积分，得到的结果简洁而优美，避免了以往高斯积分中的坐标变换以及雅克比矩阵求逆等复杂的求解过程。另外还对应力连续性方程进行了简化。算例的计算结果表明本文的计算方法是合理的。

参考文献:

- [1] Drucker D C, Greenberg H J, Prager W. The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain [J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 1951, 18(4): 371—378.
- [2] Chen W F. Soil mechanics and theorems of limit analysis [J]. Journal of Soil Mechanics & Foundations Div, 1969: 493—518.
- [3] Lysmer J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics [J]. Journal of Soil Mechanics & Foundations Div, 1970: 1311—1334.
- [4] Sloan S W. lower bound limit analysis using finite-elements and linear-programming [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1988, 12(1): 61—77.
- [5] 李国英, 沈珠江. 下限原理有限单元法及其在土工问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(5): 84—89.
Li Guoying, Shen Zhujiang. Lower limit analysis using finite elements and its application to geotechnical problems [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(5): 84—89. (in Chinese)
- [6] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 岩土边坡稳定性的刚体有限元上限分析法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(6): 898—905.
Yin Jianhua, Chen Jian, Lee C F. Upper limit analysis of stability of rock and soil slopes using rigid finite elements [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(6): 898—905. (in Chinese)
- [7] 杨洪杰, 葛修润, 王建华, 等. 序列二次规划(SQP)算法在三维下限分析中的应用[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 992—995.
Yang Hongjie, Ge Xiurun, Wang Jianhua, et al.

- Application of SQP algorithm in 3D lower sequential quadratic programming limit analysis [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 992—995. (in Chinese)
- [8] 黄齐武, 黄茂松, 王贵和. 基于下限有限元法的条形浅基础极限承载力分析[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(4): 572—579.
Huang Qiwu, Huang Maosong, Wang Guihe. Calculation of bearing capacity of strip footings using lower bound limit method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(4): 572—579. (in Chinese)
- [9] 陈炜, 王均星. 节理岩质边坡的块体元塑性极限分析下限法[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(2): 272—277.
Chen Wei, Wang Junxing. Plastic lower bound limit analysis using block element method for jointed rock slope [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(2): 272—277. (in Chinese)
- [10] 杨小礼. 岩石极限分析非线性理论及其应用[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2009, 40(1): 225—229.
Yang Xiaoli. Limit analysis with nonlinear criterion in rock masses and its applications [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2009, 40(1): 225—229. (in Chinese)
- [11] 李春光, 朱宇飞, 刘丰, 等. 基于四边形网格的下限原理有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(3): 461—468.
Li Chunguang, Zhu Yufei, Liu Feng, et al. Lower bound limit analysis by quadrilateral finite element method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(3): 461—468. (in Chinese)
- [12] Zhang X F, Liu Y H, Cen Z Z. Boundary element methods for lower bound limit and shakedown analysis [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(8): 905—917.
- [13] Chen S S, Liu Y H, Cen Z Z. Lower-bound limit analysis by using the EFG method and non-linear programming [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 74(3): 391—415.
- [14] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626—628.
Zheng Hong, Li Chunguang, Lee C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 626—628. (in Chinese)

(上接第 118 页)

- [9] 李开禧, 须宛明. 关于“逆算单元长度法”的改进[J]. 重庆建筑工程学院学报, 1989, 11(3): 38—42.
Li Kaixi, Xu Wanming. An improvement on “the inverse calculation segment length method” [J]. Journal of Chongqing Institute of Architectural and Engineering, 1989, 11(3): 38—42. (in Chinese)
- [10] Chen W F, Ross D A. Test of fabricated tubular columns [J]. Journal of the Structural Division, 1977, 103(3): 619—634.
- [11] 王国周, 赵文蔚, 王珊. 残余应力对钢压杆承载力的影响及理论分析概况(一)[J]. 工业建筑, 1981, 11(9): 31—36.
Wang Guozhou, Zhao Wenwei, Wang Shan. Overview (a) of the impact and theoretical analysis of residual stress on the carrying capacity of steel struts [J]. Industrial Construction, 1981, 11(9): 31—36. (in Chinese)
- [12] GB 50017, 钢结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003.
GB 50017, Code for design of steel structures [S]. Beijing: China Architecture Industry Press, 2003. (in Chinese)