

文章编号: 1000-7598-(2013)08-2189-06

# 一个高饱和度非饱和土的本构模型

刘 艳<sup>1,2</sup>, 韦昌富<sup>1</sup>, 赵成刚<sup>2</sup>, 房 倩<sup>2</sup>

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2.北京交通大学 土建学院, 北京 100044)

**摘 要:** 高饱和度的非饱和土中由于气体处于封闭状态, 其内部气压的变化必将对土体的行为产生影响。首先, 对高饱和度非饱和土特性进行探讨和研究, 随后, 在已有非饱和土模型框架基础上, 采用广义有效应力原理, 建立一个适用于高饱和度条件下的非饱和土的弹塑性本构模型。模型中引入气相耗散的影响, 在硬化方程中考虑封闭气体压力改变的影响。最后, 利用已有的试验结果来对模型进行验证, 并将模型预测结果与前人模型进行对比, 表明模型预测可以很好地预测土体的行为, 尤其是在高饱和度条件下其结果比其他模型更加接近实际情况。

**关 键 词:** 高饱和度; 封闭气体; 本构模型; 非饱和土; 广义有效应力原理

**中图分类号:** TU 443

**文献标识码:** A

## A constitutive model of unsaturated soils with high saturation

LIU Yan<sup>1,2</sup>, WEI Chang-fu<sup>1</sup>, ZHAO Cheng-gang<sup>2</sup>, FANG Qian<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** In unsaturated soils with high saturation, gas phase is disconnected, and the occluded gas pressure may change and affect the soil behavior. The properties of unsaturated soils with high saturation are first discussed; and then a constitutive model is developed within an existing constitutive framework of unsaturated soils by using the principle of generalized effective stress. This model takes into account the effect of gas diffusion, with a hardening law accounting for the effect of occluded gas pressure change. To validate the new model, the modeling results are compared with the experimental results available in the literature and the simulated results of existing models. It is shown that this model performs better than existing models, especially for the unsaturated soils at high saturation.

**Key words:** high saturation; occluded gas; constitutive model; unsaturated soils; principle of generalized effective stress

## 1 引 言

饱和度是衡量土体特性的一个重要指标, 既反映了土体孔隙内部含水率的大小, 也反映了含气量的大小, 是土体分类的一个重要因素。一般情况下随着土中饱和土  $S_r$  的增加, 土体可分为干土 ( $S_r = 0$ ), 非饱和土 ( $0 < S_r < 1$ ) 和饱和土 ( $S_r = 1$ ) 三大类, 而高饱和度通常是指饱和度大于 0.8 的土体。高饱和度时, 由于土体内部的气体处于封闭状态, 气体压力变化、气体的溶解、吸附和逸出以及温度都会对土层特性产生不同程度的影响。这类高饱和度的非饱和土在陆地和海洋当中都很常见, 如港口

平台、海底管道等工程中所遇到的海相沉积含气土, 地下水面附近的高饱和土体以及一些储气砂、污染土等。这一类土的存在可能会引发一些工程问题, 如高压气体的释放可能会引起土体失稳、地层塌陷、建筑物变形破坏、诱发管涌、流土等工程灾害<sup>[1]</sup>。

为了更好地解决这些工程问题, 国内外很多学者对高饱和度非饱和土进行了研究, 主要有以下几方面内容: (1) 固结特性。对于高饱和度土体, 很多研究将其简化为具有可压缩混合流体的饱和土来研究, 得到的固结方程与饱和土形式类似, 区别在于固结系数取值不同<sup>[2-6]</sup>。(2) 强度特性。大量研究表明, 封闭气体的存在会影响土体的抗剪强度,

收稿日期: 2012-07-30

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (No. 2012JBM081); 国家自然科学基金资助 (No. 51108022, No. 11072255)。

第一作者简介: 刘艳, 女, 1983 年, 博士后, 主要从事非饱和土的研究。E-mail: 05115257@bjtu.edu.cn

通讯作者: 韦昌富, 男, 1966 年, 研究员, 博导, 主要从事多孔介质理论及其工程应用研究。E-mail: cfwei@whrsm.ac.cn

而这种强度的改变也受到多种因素的影响,如 Wheeler<sup>[7-8]</sup>对土的剪切强度进行了研究,指出大气泡的存在可能提高也可能降低土体的不排水抗剪强度,主要与土体的围压和初始孔压有关;孔令伟等<sup>[9-10]</sup>对储气砂土进行了不同应力路径的试验研究,指出应力路径对抗剪强度有重要影响。(3) 渗透特性。孔隙气的存在大大降低了土体的渗透性,尤其当气相封闭时,降雨入渗导致气压增加,将对土体行为有显著影响。大量理论和试验研究都表明,在渗流模型中需要考虑气相的影响<sup>[11-13]</sup>。

以上对于含气土的研究主要集中在其固结变形、渗透性和强度特性等方面,而关于本构模型方面的研究则比较少。Pietruszczak 等<sup>[14]</sup>通过对孔压进行修正,将气体的影响考虑进来,给出了含封闭气泡的两种不同类型的高饱和度土体的本构关系。Grozic 等<sup>[15]</sup>利用剑桥模型,结合气体方程,建立了高饱和度黏土的本构方程。但以上模型采用的应力变量仍然是基于太沙基有效应力,是对饱和土模型的一个修正,无法考虑固-液-气三相的耦合效应。本文首先对高饱和度含气土特性进行探讨和研究,随后将基于非饱和土的广义有效应力原理,给出一个适用于高饱和度条件下的非饱和土的弹塑性本构模型,最后利用已有的试验结果对模型进行验证。

## 2 高饱和度土体特性

高饱和度时土中气体处于封闭状态,与外界不连通。包承纲<sup>[16]</sup>指出,气体是否封闭对非饱和土的性质会有很大的影响。他对土体的水气形态进行了描述,认为土体在高饱和度状态时封闭气体可能以两种形式存在:内部连通状态即土体孔隙外部通道被水封闭,但内部通道,或是孤立的完全封闭状态。当土体处于内部连通状态时气体对土的影响不可忽略。而对于处于完全封闭状态的气体,如果气泡尺寸较小,可以简化为饱和土来处理,但如果气泡尺寸大于土体颗粒,则气体对土体的影响也无法忽略。

由此可见,对于以上两种情形,不论是气相内部连通状态,或是包含大气泡的完全封闭状态,气体与外界不连通,此时气体的存在不仅会增加土的压缩性,同时气压的变化也可能会导致土骨架结构发生破坏。研究表明,高饱和度土体压缩时封闭气体存在可以提高土体的不排水剪强度。反之,高饱和度土体卸载时土体膨胀或气体逸出也可能对土体带来负面影响<sup>[15]</sup>。Wheeler<sup>[8]</sup>对含有大气泡的黏性土的工程特性进行了详尽的试验和理论研究,指出在

三轴压缩试验,气泡的收缩会在土中产生功硬化效应,从而改变土体的屈服应力。因此,建立高饱和度土体的非饱和土本构方程时需要考虑气相硬化的影响。

## 3 本构方程

### 3.1 应力变量

根据赵成刚等<sup>[17]</sup>提出的非饱和土的广义有效应力原理,选择土骨架有效应力、吸力和气压作 3 个应力变量来建立本构模型,其表达式为

$$\sigma^\alpha = \begin{cases} \bar{\sigma} = (\sigma - u_g \delta) + S_r (u_g - u_w) \delta, & (\alpha = s) \\ \tilde{s} = n(u_g - u_w), & (\alpha = w) \\ u_g, & (\alpha = g) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\sigma$  为总应力;  $u_g$ 、 $u_w$  分别为孔隙水压和孔隙气压;  $n$  为孔隙率;  $S_r$  为饱和度。

相对应的应变增量表达式为

$$d\varepsilon^\alpha = \begin{cases} d\varepsilon, & (\alpha = s) \\ dS_r, & (\alpha = w) \\ d\varepsilon_g, & (\alpha = g) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\varepsilon$  为土骨架的应变;  $\varepsilon_g$  为气体的变形,可以表示为  $d\varepsilon_g = n(1 - S_r) d\rho_g / \rho_g = -dV_g / V$ ,  $\rho_g$  为气体的密度,  $V_g$ 、 $V$  分别为气体体积和总体积。

由于广义有效应力原理可以考虑土中所有三相的影响,考虑的因素更加全面,建立的模型可以反映更多的实际现象,因此可以用来建立高饱和度非饱和土的本构模型。基于这 3 个应力变量,赵成刚等<sup>[18]</sup>利用热力学方法,并结合混合物和内变量理论,提出了一个固-液-气三相耦合的非饱和土本构模型的理论框架。刘艳<sup>[19-20]</sup>以此框架为基础,通过适当的简化,建立了三轴应力下的本构模型,考虑了气相压力变化影响,可以用来描述高饱和度即气体封闭时,尤其是气体压力变化较大时非饱和土的行为特性。

### 3.2 弹性关系

固相弹性关系可以表示为

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^e &= \frac{\kappa}{v\bar{p}} d\bar{p} = \frac{1}{K} d\bar{p} \\ d\varepsilon_s^e &= \frac{2\kappa(1+u)}{9v\bar{p}(1-2u)} dq = \frac{1}{3G} dq \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\bar{p}$ 、 $q$  为三轴应力条件下固相的应力变量,

$\tilde{p} = (\tilde{\sigma}_a + 2\tilde{\sigma}_r)/3$ ,  $q = \tilde{\sigma}_a - \tilde{\sigma}_r$ ,  $\tilde{\sigma}_a$ 、 $\tilde{\sigma}_r$  分别为竖向和横向非饱和土有效应力;  $d\varepsilon_v^e$ 、 $d\varepsilon_s^e$  为与  $\tilde{p}$ 、 $q$  相对应的体应变和剪应变;  $K$ 、 $G$  分别为弹性的体积模量和剪切模量;  $v$  为比体积;  $\kappa$  为弹性常数;  $u$  为泊松比。

液相土-水特征曲线采用双线性形式<sup>[21]</sup>, 假设扫描线上只有弹性变形, 可以表示为

$$dS_r^e = -\frac{\kappa_w d\tilde{s}}{\tilde{s}} \quad (4)$$

式中:  $\kappa_w$  为土-水特征曲线扫描线的斜率。

与液相的饱和度的变化类似, 也可以将气相的体积变化分解为弹性变形和塑性变形两部分, 假设气相弹性变形可以表示为

$$d\varepsilon_g^e = \frac{\kappa_g du_g}{u_g} \quad (5)$$

式中:  $\kappa_g$  为气相的弹性常数。

### 3.3 气体方程

通常气体的体变可分为气体压缩、气体溶解和气体流动三部分。如果气体封闭, 土体内的气体与外界隔离, 此时, 气体的变形则由气体压缩和气体溶解共同引起。因此, 利用式气体 Boley 定律和 Henry 定律可以推导得到

$$d\varepsilon_g = n[(1 - S_r) + HS_r] \frac{du_g}{u_g} \quad (6)$$

式中:  $H$  为溶解系数, 如果不考虑溶解性的话, 则  $H = 0$ 。空气的溶解系数一般为 0.02, 一般情况下,  $H$  会随着压力的变化而增大。

利用式 (6) 减去式 (5) 可以得到气相塑性变形的表达式为

$$d\varepsilon_g^p = (\lambda_g - \kappa_g) \frac{du_g}{u_g} \quad (7)$$

式中:  $\lambda_g = n[(1 - S_r) + HS_r]$ 。

### 3.4 硬化定律

硬化规律主要反映屈服面的变化规律, 反映非饱和土的固-液-气三相之间相互影响。固相屈服面的演化不仅与其塑性变形有关系, 而且还与液相饱和度和气相体积的变化有关。为了反映这些因素, 除了选择塑性体应变  $d\varepsilon_g^p$  作为硬化参数之外, 还选择能够反映液相饱和度变化历史的塑性饱和度  $dS_r^p$  以及气相体积变化历史的气体塑性体积应变  $d\varepsilon_g^p$  作为硬化参数。因此, 假设三相的硬化定律可以表示为

$$\frac{d\tilde{p}_c}{\tilde{p}_c} = K_s^p d\varepsilon_v^p - k_{sw} K_w^p dS_r^p + \eta k_{sg} K_g^p d\varepsilon_g^p \quad (8)$$

$$\frac{d\tilde{s}_y}{\tilde{s}_y} = -K_w^p dS_r^p + k_{ws} K_s^p d\varepsilon_v^p \quad (9)$$

$$\frac{du_{gy}}{u_{gy}} = K_g^p d\varepsilon_g^p + \eta k_{gs} K_s^p d\varepsilon_v^p \quad (10)$$

式中:  $\tilde{p}_c$ 、 $\tilde{s}_y$ 、 $u_{gy}$  分别为固、液、气三相的屈服应力;  $k_{sw}$ 、 $k_{sg}$ 、 $k_{ws}$ 、 $k_{gs}$  为耦合系数;  $k_{\alpha\beta}$  反映了  $\beta$  相发生屈服时  $\alpha$  相屈服面移动的幅度, 这些参数控制着应力空间中屈服面的交点位置, 通常假定为常数, 通过试验或经验确定<sup>[21]</sup>。  $K_s^p$ 、 $K_w^p$ 、 $K_g^p$  分别为固、液、气三相的塑性模量, 可以表示为  $K_s^p = v/(\lambda - \kappa)$ ,  $K_w^p = 1/(\lambda_w - \kappa_w)$ ,  $K_g^p = 1/(\lambda_g - \kappa_g)$ 。  $\eta$  为气相影响系数, 其取值必须满足以下条件:

(1) 当饱和度低于某一临界值  $S_{rc}$  时 (通常这个临界值可以取 0.85<sup>[9]</sup>), 土中水气均处于连通状态, 此时由于与大气相通, 气压保持不变, 气压变化的影响可以忽略。(2) 当饱和度等于 1, 土体完全饱和时, 不再考虑气相影响。(3) 当饱和度大于临界值  $S_{rc}$  而小于 1 时, 土体存在封闭气体或气体处于局部内部联通状态, 需要考虑气体耗散对硬化的影响。因此有

$$\eta = \begin{cases} 0, & (S_r < S_{rc} \text{ 或 } S_r = 1) \\ 1, & (S_{rc} \leq S_r < 1) \end{cases} \quad (11)$$

### 3.5 屈服面方程

固相的屈服面方程可采用热力学方法推导<sup>[22]</sup>, 其耗散空间屈服面方程  $g$  和真实应力空间中屈服方程  $f$  的表达式分别为

$$g(\tilde{\tau}, \tau) = \frac{B^2}{A^2} \tilde{\tau}^2 + \tau^2 - B^2 = 0 \quad (12)$$

$$f(\tilde{p}, q, \tilde{p}_c) = \frac{B^2}{A^2} \left( \tilde{p} - \frac{\gamma \tilde{p}_c}{2} \right)^2 + q^2 - B^2 = 0 \quad (13)$$

式中:  $\tilde{p}_c$  为先期固结压力; 参数  $A$ 、 $B$  与应力是同一个量纲, 可以表示为  $A = \frac{1}{2} \tilde{p}_c$ ,  $B = M \left[ (1 - \alpha) \tilde{p} + \frac{1}{2} \alpha \tilde{p}_c \right]$ , 其中  $\alpha$  是 0~1 之间的参数<sup>[22]</sup>。

$LC$  屈服面反映了吸力对屈服应力的影响, 根据 Loret 和 Khalili<sup>[23]</sup>的描述, 可以采用耦合形式将吸力的影响考虑进来, 即在原本的硬化函数基础上乘以一个受吸力影响的系数。因此, 初始  $LC$  屈服

面可以表示为

$$\tilde{p}_c = \begin{cases} \tilde{p}_{c0}, & (\tilde{s} < s_{sc}) \\ \tilde{p}_{c0} \left\{ 1 + k_m \left[ \left( \frac{\tilde{s}}{s_{sc}} \right)^\theta - 1 \right] \right\}, & (\tilde{s} > s_{sc}) \end{cases} \quad (14)$$

式中： $\tilde{p}_{c0}$ 为饱和土的先期固结压力压力； $s_{sc}$ 为进气值； $k_m$ 、 $\theta$ 为材料参数。

### 4 模型验证

模型中共有 15 个参数，包括传统剑桥模型参数 ( $\lambda$ 、 $\kappa$ 、 $M$ 、 $\nu$ 、 $\alpha$ )， $LC$  屈服面参数 ( $k_m$ 、 $\theta$ )，耦合系数 ( $k_{sw}$ 、 $k_{sa}$ 、 $k_{ws}$ 、 $k_{as}$ 、 $\eta$ )，流体的弹塑性参数 ( $\lambda_w$ 、 $\kappa_w$ 、 $\kappa_a$ )。剑桥模型的相关参数可通过饱和土的常规三轴试验确定。 $LC$  屈服参数和耦合系数可利用不同应力路径的非饱和土的等向固结试验确定。流体的弹塑性参数需要通过干、湿循环试验确定。

为了验证模型，选择 Raveendirara<sup>[24]</sup>给出的高饱和度条件下的试验 A12 的结果来验证模型。此时土样的初始饱和度为 0.904 3，初始比体积为 2.243，模型参数取值见表 1<sup>[25]</sup>。试验的应力路径见图 1，土样首先在高饱和度条件下控制吸力加载后卸载 ( $A-B-C$ )，然后控制净应力进行干、湿循环试验 ( $C-D-E$ )，随后再干燥 ( $E-F$ ) 使吸力达到 200 kPa，再控制吸力进行加载卸载试验 ( $F-G-H$ )。

表 1 模型参数  
Table 1 Model parameters

参数类型	参数取值
初始条件	$v_0 = 2.243, S_{r0} = 0.9043$
剑桥模型参数	$\lambda = 0.12, \kappa = 0.02, \nu = 0.4, \alpha = 0.5, M = 0.6$
耦合系数	$k_{sw} = 0.3, k_{ws} = 0.5, k_{sa} = 0.3, k_{as} = 0.1$
流体参数	$\lambda_w = 0.1, \kappa_w = 0.004, \kappa_a = 0.01$
$LC$ 参数	$k_m = 0.25, \theta = 0.8$

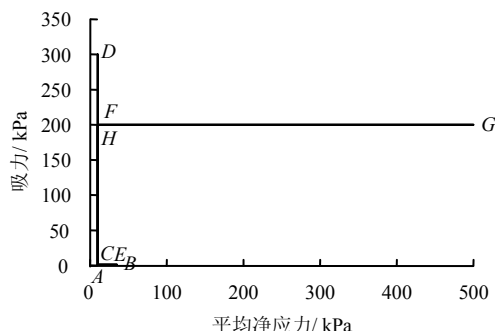


图 1 应力路径  
Fig.1 Stress path

图 2 为本文模型与试验结果的对比。此外，图中还给出了 Raveendirara<sup>[24]</sup>用 Wheeler<sup>[21]</sup>模型进行预测的结果。该图表明，在  $A-B-C$  高饱和度阶段，本文模型可以很好地拟合试验曲线，而 Wheeler<sup>[21]</sup>模型无法很好地预测此时饱和度的变化情况。图 2(b)中，Wheeler 模型在高饱和阶段预测出的饱和度等于 1，即位于饱和阶段，与试验结果不符。这是因为他们的模型没有考虑气体影响的缘故，无气相影响的模型预测出的饱和度变化较大，土体较快就达到饱和<sup>[19]</sup>。

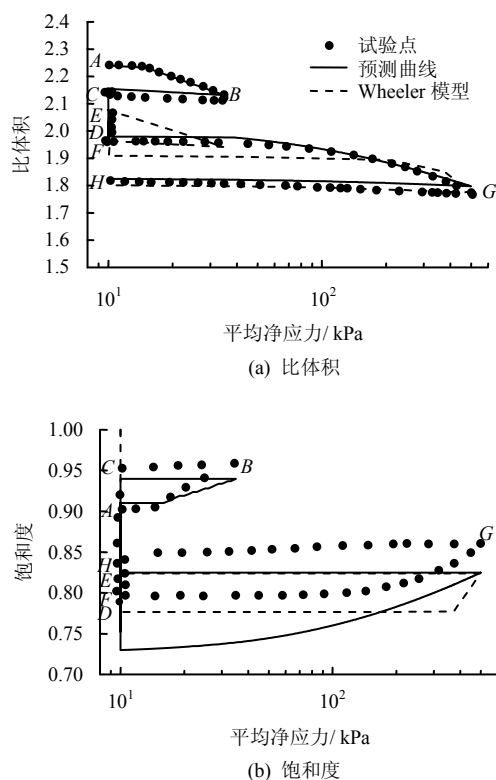


图 2 控制吸力等向加载卸载试验结果  
Fig.2 Isotropic loading at constant suction

在  $C-D-E-F$  阶段，土样进行了一系列干湿循环试验，图 3 将预测结果与试验结果进行了对比。图 3(a)的体变预测结果与试验曲线基本吻合，模型可以很好地反映土体在干燥阶段出现的塑性体变。模型预测的土-水特征曲线时表现出了明显的滞后效应，如图 3(b)所示。饱和度的预测结果在干燥阶段与试验结果相符，湿化阶段预测结果出现了部分塑性变形，但主要趋势仍与试验结果吻合。干湿循环化之后的加载、卸载阶段 ( $F-G-H$ ) 的试验结果见图 2，本文模型预测结果与试验曲线比较吻合。而从图 3 也能看到，Wheeler 模型在干湿循环 ( $C-D-E-F$ ) 阶段的体变预测结果只有发生弹性变形，且其饱和度预测结果也与试验相差较大，说明本文考

虑气体影响后更加接近实际情况，可以较好地预测土体在高饱和度条件变形行为。

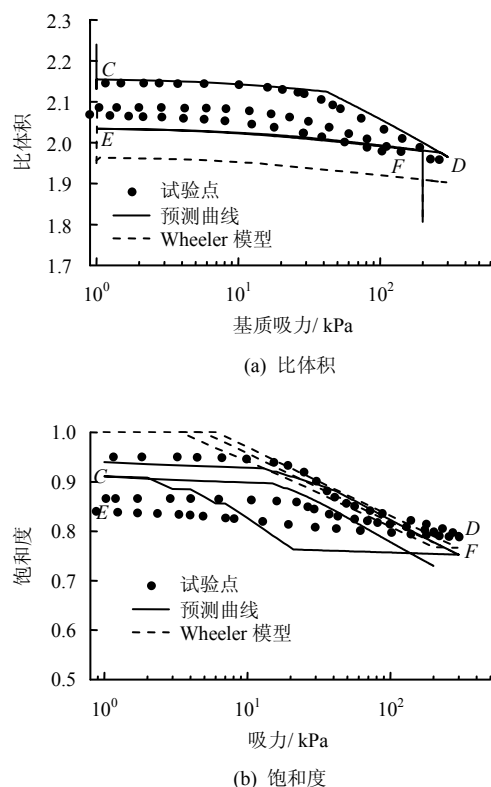


图 3 干湿循环试验结果

Fig.3 Cycles of wetting and drying

## 5 结 论

(1) 在已有工作的基础上提出了一个高饱和度非饱和土的本构模型。该模型采用广义有效应力原理，在硬化方程中引入了不可回复的气体相形作为硬化参数，给出了一个可以考虑气相耗散的弹塑性本构方程。由于考虑了气相硬化的影响，可以较好地描述土体在高饱和度阶段的行为。利用已有试验对模型进行了验证，结果表明，模型可以很好地预测高饱和度条件下非饱和土的体变和饱和度变化。

(2) 将本文模型预测结果与 Raveendirara<sup>[24]</sup>给出的 Wheeler 模型的预测结果进行了对比，表明模型在考虑气相硬化作用后，其结果更加符合实际情形。

## 参 考 文 献

[1] 唐益群, 吕少伟, 叶为民, 等. 浅气层高孔压非饱和土固结规律研究[J]. 土木工程学报, 2001, 34(6): 100—104.  
TANG Yi-qun, LÜ Shao-wei, YE Wei-min, et al. Experimental study on consolidation law of unsaturated

soil containing high-pressure gas[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2001, 34(6): 100—104.

- [2] 沈恺伦, 王立忠. 条形荷载下高饱和土地基的固结与沉降[J]. 岩土力学, 2004, 25(4): 609—613.  
SHEN Kai-lun, WANG Li-zhong. Consolidation behavior and settlement of highly saturated soil under uniform load[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(4): 609—613.
- [3] 魏海云, 詹良通, 陈云敏. 高饱和度土的压缩和固结特性及其应用[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(2): 264—269.  
WEI Hai-yun, ZHAN Liang-tong, CHEN Yun-min. Compressibility and consolidation of unsaturated soils with high degree of saturation and its application[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(2): 264—269.
- [4] 殷宗泽, 凌华. 非饱和土一维固结简化计算[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(5): 633—637.  
YIN Zong-ze, LING Hua. Simplified computation of 1D consolidation for partially saturated soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(5): 633—637.
- [5] 苏万鑫, 谢康和. 非饱和土一维固结混合流体方法的解析分析[J]. 岩土力学, 2010, 31(8): 2661—2665.  
SU Wan-xin, XIE Kang-he. Analytical solution of 1D consolidation of unsaturated soil by mixed fluid method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(8): 2661—2665.
- [6] 徐浩峰. 含生物气非饱和软土的固结理论研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2011.
- [7] WHEELER S J. The undrained shear strength of soils containing large gas bubbles[J]. *Geotechnique*, 1988, 38(3): 399—413.
- [8] WHEELER S J. A conceptual model for soils containing large gas bubbles[J]. *Geotechnique*, 1988, 38(3): 389—397.
- [9] 孔令伟, 钟方杰, 郭爱国, 等. 杭州湾浅层储气砂土应力路径试验研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(8): 2209—2214.  
KONG Ling-wei, ZHONG Fang-jie, GUO Ai-guo, et al. Experimental study of stress path of shallow gassy sand of Hangzhou Bay[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(8): 2209—2214.

- [10] 王勇, 孔令伟, 郭爱国, 等. 含浅层气砂土的赋存特征及其非饱和参数预测[J]. 岩土力学, 2011, 32(7): 1945—1950.  
WANG Yong, KONG Ling-wei, GUO Ai-guo, et al. Occurrence characteristics and unsaturated parameters prediction of shallow gassy sand[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(7): 1945—1950.
- [11] 梁爱民, 邵龙潭. 土壤中空气对土结构和入渗过程的影响[J]. 水利科学进展, 2009, 20(4): 502—506.  
LIANG Ai-ming, SHAO Long-tan. Experimental study of the air entrapment effects on soil structure and infiltration[J]. **Advance in Water Science**, 2009, 20(4): 502—506.
- [12] 唐海行, 苏逸深, 刘炳敖. 土壤包气带中气体对入渗水流运动影响的实验研究[J]. 水利科学进展, 1995, 6(4): 263—352.  
TANG Hai-xing, SU Yi-yuan, LIU Bing-ao. Laboratory study for influence of air on the infiltration flow in the soil unsaturated zone[J]. **Advance in Water Science**, 1995, 6(4): 263—352.
- [13] 孙冬梅, 朱岳明, 张明进, 等. 考虑气相影响的降雨入渗过程分析研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(9): 2307—2313.  
SUN Dong-mei, ZHU Yue-ming, ZHANG Ming-jin, et al. Analysis of rainfall infiltration process considering influence of pore air pressure[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(9): 2307—2313.
- [14] PIETRUSZCZAK S, PANDE GN. Constitutive relations for partially saturated soils containing gas inclusions[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(1): 50—59.
- [15] GROZIC JLH, NADIM F, KVALSTAD TJ. On the undrained shear strength of gassy clays[J]. **Computers and Geotechnics**, 2005, 32: 483—490.
- [16] 包承纲. 非饱和土的性状及膨胀土边坡稳定问题[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 1—15.  
BAO Cheng-Gang. Behaviour of unsaturated soil and stability of expansive soil slope[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(1): 1—15.
- [17] ZHAO Cheng-gang, LIU Yan, GAO Fu-ping. Work and energy equations and the principle of generalized effective stress for unsaturated soils[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2010, 34(9): 920—936.
- [18] 赵成刚, 刘艳. 连续孔隙介质土力学及其在非饱和土本构关系中的应用[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(9): 1324—1335.  
ZHAO Cheng-Gang, LIU Yan. Continuum porous medium soil mechanics and its application in constitutive relationship of unsaturated soils[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(9): 1324—1335.
- [19] LIU Yan, ZHAO Cheng-gang, CAI Guo-qing, et al. Constitutive modeling for unsaturated soils considering gas hardening effect[J]. **Chinese Science Bulletin**, 2011, 56(16): 1—7.
- [20] 刘艳, 赵成刚, 蔡国庆, 等. 考虑气相压力变化和偏应力影响的非饱和土本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(5): 754—761.  
LIU Yan, ZHAO Cheng-Gang, CAI Guo-qing, et al. A new model for unsaturated soils considering variation of gas pressure and shear stress[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(5): 754—761.
- [21] WHEELER S J, SHARMA R S, BUISSON M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils[J]. **Géotechnique**, 2003, 53(1): 41—54.
- [22] COLLINS I F, Hilder T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2002, 26(13): 1313—1347.
- [23] LORET B, KHALILI N. A three-phase model for unsaturated soils[J]. **Int. J. Numer. Anal Meth. Geomech.**, 2000, 24: 893—927.
- [24] RAVEENDIRARAJ A. Coupling of mechanical behaviour and water retention behaviour in unsaturated soils[D]. Glasgow, United Kingdom: University of Glasgow, 2009.
- [25] 刘艳. 非饱和土的广义有效应力原理及其本构模型研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2011.