

# 以 $e-p$ 曲线为基础的塑性力学新方法的物理解释及应用实例

## Physical explanation and application example for the new method of plasticity based on $e-p$ curve

李 铀<sup>1</sup>, 白世伟<sup>1</sup>, 李 颢<sup>2</sup>, Matthew Mauldon<sup>3</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071; 2. 岳阳师范学院, 湖南 岳阳 414000; 3. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Tennessee, Knoxville TN 37916, USA)

摘 要: 以  $e-p$  曲线为基础的塑性力学新方法具有求解过程简洁明了等优点, 并且可以求解许多经典理论难以得到解析解的问题。为了展示新方法的合理性, 进一步从物理机制上对新方法的正确性进行了论证。

关键词: 塑性理论; 物理解释;  $e-p$  曲线

中图分类号: O 344 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2001)06-0704-04

作者简介: 李 铀, 男, 1961 年生, 副研究员, 在职博士生, 主要从事岩土力学与工程方面的研究工作。

LI You<sup>1</sup>, BAI Shi-wei<sup>1</sup>, LI Si<sup>2</sup>, Matthew Mauldon<sup>3</sup>

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. Yueyang Normal Institute, Yueyang 414000, China; 3. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Tennessee, Knoxville TN37916, USA)

Abstract: The new method of plasticity based on  $e-p$  curve has obvious advantage over the current method. For example, its solving procedure is more concise than that of the classical theory method. Analytical solutions to many problems can be obtained by the use of the new method, while they can not be gotten with the classical theory method. Some important progresses have been made based on the new method. To show its reasonableness, physical explanation of the new method is given in this paper.

Key words: plasticity; physical explanation;  $e-p$  curve

### 1 以 $e-p$ 曲线为基础的塑性力学新方法简介

以  $e-p$  曲线为基础建立的塑性力学新方法在应用中已取得了一些重要成果, 现简述如下<sup>[1-4]</sup>:

在塑性力学范围里, 弹性力学建立的平衡方程、几何方程仍适用, 这样塑性力学有方程:

$$\sigma_{\bar{j}, j} + F_i = 0 \quad (1)$$

$$\epsilon_{\bar{j}}^e + \epsilon_{\bar{j}}^p = \frac{1}{2}(u_{i, j} + u_{j, i}) \quad (2)$$

另大家知道, 应变  $\epsilon_{ij}$  可表示为弹性应变  $\epsilon_{ij}^e$  与塑性应变  $\epsilon_{ij}^p$  之和, 即  $\epsilon_{\bar{j}} = \epsilon_{\bar{j}}^e + \epsilon_{\bar{j}}^p$ , 且弹性应变  $\epsilon_{ij}^e$  与应力状态  $\sigma_{ij}$  满足广义虎克定律, 即有

$$\epsilon_{\bar{j}}^e = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{E}\sigma_{\bar{j}} \delta_{ij} \quad (3)$$

式(1)~(3)共有 15 个方程, 未知数却有 21 个 ( $\epsilon_{ij}^e$ ,  $\epsilon_{ij}^p$  及  $\sigma_{ij}$  各有 6 个分量,  $u_i$  有 3 个分量), 方程组暂不可解。

新方法引入了应变的弹性应变部分  $\epsilon_{ij}^e$  与塑性应变部分  $\epsilon_{ij}^p$  的关系, 即

$$\epsilon_{\bar{j}}^p = F(\epsilon_{ij}^e, \alpha) \quad (4)$$

式中  $\alpha$  为表征加载历史和路径的综合参数, 引进  $\alpha$

的目的是使  $\epsilon_{ij}^p$  与  $\epsilon_{ij}^e$  之间可能有的非一一对应性得到较好的描述。

从客观上讲, 式(4)的关系是显然存在的。下面先利用式(4)的存在性作进一步讨论, 其研究概况留待稍后介绍。(这里值得说明一下的是: 实际上, 用现在流行的应力应变关系  $\sigma_{ij} = F(\epsilon_{ij}) = F(\epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p)$  代替式(4)也可起同样的功效。)

方程组(1)~(4)的方程数和未知数相等, 加上边界条件, 方程组可解了, 也即方程组(1)~(4)联立后对求解塑性力学问题已是完备的了。联立方程组(1)~(4)的求解过程为:

由于式(2)中的位移  $u_i$  可分解成对应  $\epsilon_{ij}^e$  的弹性位移  $u_i^e$  和对应  $\epsilon_{ij}^p$  的塑性位移  $u_i^p$  两部分之和, 即有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{2}(u_{i, j}^e + u_{j, i}^e) \\ \epsilon_{ij}^p &= \frac{1}{2}(u_{i, j}^p + u_{j, i}^p) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

所以联立方程组(1)~(4)可改写为

\* 基金项目: 非教育系统留学回国人员科技活动择优项目(1999-13); 中国科学院“九五”基础性研究重点项目(KJ952-J1-256)

收稿日期: 2001-03-28

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + F_i &= 0 \\ \epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^e + u_{j,i}^e) \\ \epsilon_{ij}^e &= \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{3\mu}{E}\sigma_{ij} \\ \epsilon_{ij}^p &= F(\epsilon_{ij}^e, \alpha) \\ \epsilon_{ij}^p &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^p + u_{j,i}^p) \text{ 或 } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \right\} (6)$$

观察式(6)可看出, 其前3个式子是弹性力学求解问题的基本方程组, 由于前3个式子的求解可以独立于后2个式子进行, 因此, 求解塑性力学问题, 可以先把问题按弹性力学问题求解, 求得弹性解后, 再求解式(6)的后二式, 如得解并满足边界条件, 则所得解便为塑性力学问题的正确解。

现在介绍式(4)的研究概况。文献[4]通过对大量应力应变曲线的分析及理论论证, 初步得出弹性应变和塑性应变遵循的规律:

(1)简单加载情形, 任意一条主应变的  $e-p$  曲线(即应变的弹性应变部分和塑性应变部分形成的曲线)总可以由其它主应变  $e-p$  曲线沿弹性应变  $\epsilon^e$  轴平移而得到。这也就是说, 屈服以后各种应力状态下弹性应变增量与塑性应变增量的关系遵循同一规律(参见图1)。

(2)若取简单加载情形下的一条主应变  $e-p$  曲线  $\epsilon^p = f(\epsilon^e)$  作基准, 则任意应力应变状态下应变  $\epsilon_j$  的弹性部分  $\epsilon_{ij}^e$  和塑性部分  $\epsilon_{ij}^p$  具有相关关系:

$$\epsilon_{ij}^p = f[\epsilon_{ij}^e + L_{ij}(\epsilon_{ij}^e, \alpha)] \quad (7)$$

式中  $\alpha$  的含义如前所述;  $L_{ij}$  的含义如图1所示。式(7)考虑的是应变的绝对值, 这一点在应用时应予注意。

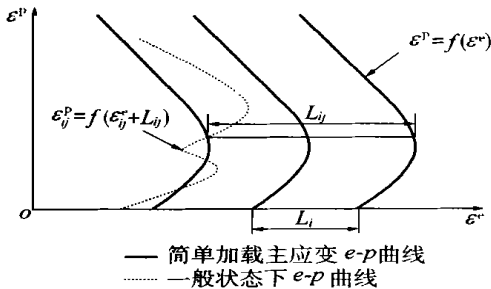


图1  $e-p$  曲线示意图

Fig. 1  $e-p$  curve

在简单加载下, 若以  $L_i$  表示  $i$  方向主应变  $e-p$  曲线与基准  $e-p$  曲线之间的距离, 由图1可看出有

$$L_i = \epsilon_L - \epsilon_i^e, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

式中  $\epsilon_i^e$  为所考虑加载情况下  $i$  方向的弹性极限应变,  $\epsilon_L$  为基准  $e-p$  曲线的弹性极限应变(下同)。利

用坐标变换公式, 可容易导出简单加载下式(7)中  $L_{ij}$  函数的表达式。

若将简单加载下的主应变  $e-p$  曲线作线性简化, 即取  $f$  函数为线性函数  $f'$  (等同于应力应变线性强化模型), 则式(7)可简化为

$$\epsilon_{ij}^p = f'(\epsilon_{ij}^e + L_{ij}), \quad L_{ij} = \epsilon_L - \epsilon_{ij}^e \quad (9)$$

式中  $\epsilon_{ij}^e$  为所考虑加载方式下的弹性极限应变;  $\epsilon_{ij}^p, \epsilon_{ij}^e, \epsilon_{ij}^e$  均为工程应变(文中其他未说明处, 可理解为张量)。

## 2 塑性力学新方法的物理解释

设所考虑的塑性问题应力应变状态处于点  $C$ , 如图2所示。对应加载过程经历的路径为  $OAC$ , 设想在点  $C$  卸载, 大家知道, 卸载路径是  $O'C$ ,  $O'C \parallel OA$  (点  $A$  为弹性极限点), 卸载后重新加到原有荷载时, 经历的路径仍将是  $O'C$  并最终位于点  $C$ 。

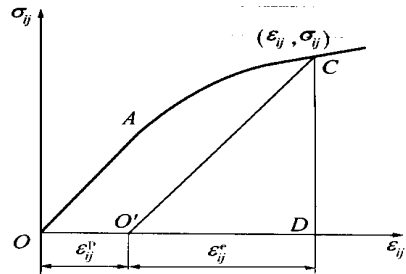


图2  $\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}$  曲线

Fig. 2  $\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}$  curve

用经典塑性理论方法求点  $C$  的应力应变解, 相当于按实际加载路径  $OAC$  求解, 求解过程中忽略了小变形  $OD$  对几何边界的影响(当然, 由于用经典理论求解时需引入尚不成熟的屈服准则, 使经典理论的求解结果偏离了  $OAC$ , 因此结果是不准确的<sup>[3]</sup>)。

上面介绍的塑性力学新方法则是这样求解的: 同样忽略小变形  $OD$  对几何边界的影响, 先按卸载后再加载的路径  $O'C$  求解, 由于  $O'C$  是平行于  $OA$  的弹性路径, 所以可用弹性力学方法求解, 这一过程对应的就是式(6)的前三式, 求解后可得出  $\epsilon_{ij}^e, \sigma_{ij}$ ; 然后再利用弹性应变与塑性应变的关系求  $OO'$ , 即塑性应变  $\epsilon_{ij}^p$ , 这就是式(6)的后二式做的事。最终便求得了塑性力学问题的解答  $\sigma_j, \epsilon_j (\epsilon_j^e + \epsilon_j^p)$ 。新方法的求解路径与经典方法不一样, 但结果是一样的。值得特别指出的是: 利用  $O'C \parallel OA$  仅是一种手段, 当实际卸载路径不平行于  $OA$  时, 仍可假定其平行; 当没有明显的弹性极限点  $A$  时, 可自行设定  $O'C$  的斜率, 这不会影响最终结果的正确性。这一特性使新方法的适用范围基本上没有限制。

### 3 应用实例

以图3所示的平面问题纯弯曲梁为例。问题的边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, \tau_{yx}|_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \\ \tau_{xy}|_{x=0} = 0, \tau_{xy}|_{x=l} = 0 \\ \sigma_x|_{x=0} = \sigma_x|_{x=l} = \begin{cases} B_2y + q & \frac{h}{2} \geq y > a \\ B_1y & a \geq y > -a \\ B_2y - q & -a > y \geq -\frac{h}{2} \end{cases} \\ B_1a = B_2a + q, q > 0 \end{aligned} \right\}$$

考虑简单加载情况。据纯弯曲梁的弹性力学解答可知:梁的塑性区是由边缘渐次向  $x$  轴扩展的,在梁未达到完全塑性前,  $x$  轴附近处于弹性状态。现在考虑这样一种状态:  $y = \pm a$  是弹塑性交界面,区域  $|y| \leq a$  是弹性区,  $|y| > a$  是塑性区。

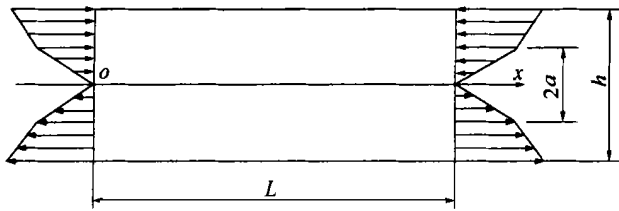


图3 纯弯曲梁模型

Fig. 3 Model for beam under pure bending

#### 3.1 弹性区解答

假设弹性力学的解答仍适用于此时的弹性区,这样有<sup>[5,6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = B_1y, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \epsilon_x = \frac{B_1y}{E}, \epsilon_y = -\frac{\mu B_1xy}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ u = \frac{B_1xy}{E} - \omega y + u_0 \\ v = -\mu \frac{B_1xy^2}{2E} - \frac{B_1x^2}{2E} + \omega x + v_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中  $\omega, u_0$  和  $v_0$  为常数。

式(10)中的解答除了未考虑与塑性区交界面的连续条件外,其他边界条件均已满足,所以若后续求得的塑性区解答能在弹塑性交界面处与弹性区解答连续且又满足自身的边界条件,便可表明所得两个区域的解答为本问题的正确解答。

#### 3.2 塑性区解答

按所介绍的塑性力学新方法,可知塑性区可先按

弹性力学问题求解。求解过程同文献[5,6],取应力函数  $\varphi = A'y^3 \pm A''y^2$ , 便有解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = 6A'y \pm 2A'', A' = \frac{B_2}{6}, A'' = \frac{q}{2} \\ \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \epsilon_x^e = \frac{B_2y \pm q}{E} \\ \epsilon_y^e = -\mu \frac{B_2y \pm q}{E} \\ \gamma_{xy}^e = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中出现了正负号重叠,意义是:上部的符号为受拉侧解答,下部的符号为受压侧解答,下同。

现在需要做的是确定塑性区解答中的塑性分量。从式(11)可知,塑性区里各点均处于单向应力状态,这表明在外载施加过程中,梁内各点的同名称的应力应变曲线将是同一曲线。设  $\sigma_s$  为单轴拉伸的弹性极限应力,也称屈服应力,  $-\sigma_s$  为单轴压缩的弹性极限应力,则有加载过程中的弹性极限应变  $\epsilon_x^L = \pm \frac{\sigma_s}{E}, \epsilon_y^L = \pm \mu \frac{\sigma_s}{E}$ , 因  $\gamma_{xy}^e = 0$ , 就有  $\gamma_{xy}^p = 0, \gamma_{xy} = 0$ 。采用图4(a)所示的线性强化模型,取其对应的  $e-p$  曲线(见图4(b))为基准  $e-p$  曲线,则有

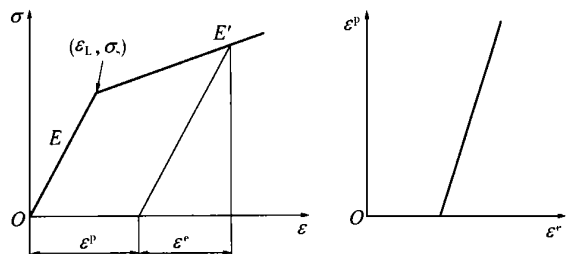
$$\left. \begin{aligned} \epsilon^p = K(E\epsilon^e - \sigma_s) \\ K = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E}, |\epsilon^p| > 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

进而有

$$\left. \begin{aligned} L_z = \epsilon_L - \epsilon_z^L = \frac{\sigma_s}{E} \mp \frac{\sigma_s}{E} \\ L_y = \epsilon_L - \epsilon_y^L = \frac{\sigma_s}{E} (1 \mp \mu) \\ \epsilon_x^p = K[E(\epsilon_x^e + L_x) - \sigma_s] = KE\epsilon_x^e \mp K\sigma_s \\ \epsilon_y^p = K[E(\epsilon_y^e + L_y) - \sigma_s] = KE\epsilon_y^e \mp K\sigma_s \end{aligned} \right\}$$

所以有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_x^e + \epsilon_x^p = (1 + KE)\epsilon_x^e \mp K\sigma_s \\ \epsilon_y = \epsilon_y^e + \epsilon_y^p = (1 + KE)\epsilon_y^e \mp K\mu\sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



(a)线性强化及其模型

(b)  $e-p$  曲线

图4 线性强化模型及其  $e-p$  曲线

Fig. 4 Linearly hardening model and  $e-p$  curve

现在再来确定位移分量, 因有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x = (1+KE)\epsilon_x^e \mp K\sigma_s \\ &= (1+KE)\frac{B_2y \pm q}{E} \mp K\sigma_s \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \epsilon_y = (1+KE)\epsilon_y^e \pm K\mu\sigma_s \\ &= -(1+KE)\mu\frac{B_2y \pm q}{E} \pm K\mu\sigma_s \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

求解式(14)可得

$$\left. \begin{aligned} u &= (1+KE)\frac{B_2y \pm q}{E}x \mp K\sigma_s x - cy + s_2 \\ v &= -(1+KE)\mu\frac{(B_2y \pm q)^2}{2EB_2} \pm K\mu\sigma_s y - \\ &\quad \frac{(1+KE)B_2}{2E}x^2 + cx + s_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中  $c, s_1, s_2$  为常数。

综合起来, 可得塑性区解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= B_2y \pm q \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \epsilon_x &= (1+KE)\frac{B_2y \pm q}{E} \mp K\sigma_s \\ \epsilon_y &= -(1+KE)\mu\frac{B_2y \pm q}{E} \pm K\mu\sigma_s \\ \gamma_{xy} &= 0 \\ u &= (1+KE)\frac{B_2y \pm q}{E}x \mp K\sigma_s x - cy + s_2 \\ v &= -(1+KE)\mu\frac{(B_2y \pm q)^2}{2EB_2} \pm K\mu\sigma_s y - \\ &\quad \frac{(1+KE)B_2}{2E}x^2 + cx + s_1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(16)已满足了应力边界条件。现在需要考虑的是在  $y = \pm a$  处弹性解答和塑性解答的连续条件。应力应变的连续是显然的, 现在仅需讨论位移连续条件: 在  $y = \pm a, u_{弹} = u_{塑}$  以及  $v_{弹} = v_{塑}$ 。要满足位移连续条件, 仅需令

$$\left. \begin{aligned} c &= \omega, s_2 = u_0, (1+KE)B_2 = B_1 \\ s_1 &= v_0 + \frac{K\mu\sigma_s^2(B_2 - B_1)}{2B_1B_2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这些条件与题意不矛盾, 所以可知满足式(17)的解答式(10)和式(16)为本问题的正确解答。

值得说明的是, 式(17)的条件中引进了对外载的限制, 要求  $(1+KE)B_2 = B_1$ , 这是线性强化模型及外载的不连续变化引起的。弹性极限边缘处应力应变曲线斜率及外载斜率的突然改变, 会导致梁的弹性区和塑性区的挠曲不一致, 因而为满足连续条件对外载有一定的限制是合理的。

### 4 结 语

$e-p$  曲线为基础的塑性力学新方法求解条理清楚, 过程简洁, 可以求解经典理论难以得到解析解的问题, 具有较明显的优越性。应用塑性力学新方法取得的一些其他重要进展, 可参见文献[ 7, 8 ]。

#### 参考文献:

[ 1 ] 李 铀. 塑性力学的一种新方法及其在应力强度因子研究中的应用 [ J ]. 岩土力学, 1992, 13(2, 3): 128~134.

[ 2 ] Li You. New research on the stress field of elastic-plastic small deformation problems[ A ]. Proceedings of the Ninth International Manufacturing Conference in China, Hong Kong[ C ]. Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University( ISBN 962-367-291-8 ), 2000.

[ 3 ] 李 铀, Matthew Mauldon. 岩土工程中的二个理论问题的探讨 [ J ]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(2): 227~229.

[ 4 ] 李 铀, 陈至达, 朱维申. 材料弹性变形与塑性变形相互关系的探讨 [ J ]. 岩土力学, 1988, 9(3): 41~50.

[ 5 ] 王龙甫. 弹性理论[ M ]. 北京: 科学出版社, 1979.

[ 6 ] 徐芝纶. 弹性力学. 上册[ M ]. 北京: 人民教育出版社, 1982.

[ 7 ] 李 铀. 弹塑性小变形问题的应力场研究新结果[ A ]. 戴世强, 刘曾荣, 黄 黔. 现代数学和力学[ C ]. 苏州: 苏州大学出版社, 1995.

[ 8 ] 李 铀, 李 锬, 白世伟. 厚壁圆筒弹塑性应力场再研究 [ J ]. 岩石力学与工程学报, (待刊).

### 书讯

## 《振冲碎石桩复合地基》(何广讷 编著)

内容提要: 振冲碎石桩加固松软土地基, 形成复合地基或复合土体, 以提高其承载力, 增强稳定性, 减小沉降量, 同时还显著地增强其抗震性能, 不论是公路、桥梁、堤坝和房屋等建筑的软基均可采用振冲碎石桩处理成复合地基以满足工程使用与抗地震的要求。而且该法施工简便、快速、不用工程紧俏的三材, 是一种较经济、合理的加固软土的技术。本书系统、详尽

地论述了振冲碎石桩复合地基的加固机理及设计、施工、检验方法, 并附有若干工程实例。

读者对象: 可供交通运输、土木建筑、水利电力等系统从事岩土工程勘察、设计、施工和检验的技术人员使用; 亦可作为高等院校相应专业的教学参考书。

全书 26 万字, 定价 22 元, 人民交通出版社出版。

(人民交通出版社 供稿)