

# 基于 MLS 的增强型数值流形法在动态裂纹扩展中的应用

李 伟<sup>1, 2</sup>, 郑 宏<sup>1, 2, 3</sup>, 陈远强<sup>1, 2</sup>, 林 珊<sup>1, 2</sup>, 孙英豪<sup>1, 2</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;  
3. 北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100124)

**摘要:** 采用数学覆盖和物理覆盖两套覆盖系统, 使数值流形法能自然地处理裂纹问题。为了将基于移动最小二乘插值(MLS)的数值流形法(MLS-NMM)应用到动态裂纹扩展中, 通过引入 Bathe 隐式时间积分方法来提高时间离散的计算精度, 并采用一种新的自由度继承策略解决动态裂纹扩展过程中能量不一致问题, 结合动态裂纹扩展的断裂力学准则, 编制基于 MLS-NMM 的模拟动态裂纹扩展程序。通过典型算例的计算分析表明, 该方法能有效准确地模拟裂纹的动态扩展。

**关键词:** 数值模拟; 移动最小二乘插值; 数值流形法; 裂纹动态扩展; Bathe 隐式时间积分; 自由度继承

**中图分类号:** O 242

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2018)07 - 1574 - 12

## Application of the MLS based enriched numerical manifold method in dynamic crack propagation

LI Wei<sup>1, 2</sup>, ZHENG Hong<sup>1, 2, 3</sup>, CHEN Yuanqiang<sup>1, 2</sup>, LIN Shan<sup>1, 2</sup>, SUN Yinghao<sup>1, 2</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Adopting two cover systems including mathematical and physical covers, numerical manifold method can resolve the problems relating to cracks naturally. In order to apply the moving least square interpolation based numerical manifold method(MLS-NMM) in the dynamic crack propagation, a program which simulates the dynamic crack propagation by using MLS-NMM is developed. In the program, the Bathe implicit time integration scheme is utilized to improve the accuracy of time discretization, a new strategy for the inheritance of degrees of freedom is proposed to deal with the energy inconsistency in dynamic crack propagation, and the criterion of fracture mechanics is employed to predict the path of crack propagation. Through the solution of some typical problems of dynamic crack propagation, it is demonstrated that the proposed procedure simulates the dynamic crack propagation precisely.

**Key words:** numerical simulation; moving least square interpolation; numerical manifold method; dynamic crack propagation; Bathe implicit time integration; inheritance of degrees of freedom

**收稿日期:** 2018 - 01 - 07; **修回日期:** 2018 - 04 - 26

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11572009 和 51538001); 国家重点基础研究计划(973)项目(2014CB047100)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11572009 and 51538001) and National Program on Key Basic Research Project(973 Program)(Grant No. 2014CB047100)

**作者简介:** 李 伟(1988 -), 男, 2012 年毕业于山东农业大学水利水电工程专业, 现为博士研究生, 主要从事岩土力学数值方法方面的研究工作。  
E-mail: liw9012@163.com

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2018.0031

## 1 引 言

在岩体工程的建造和使用过程中, 会伴随着大量的岩石断裂问题。要想有效地制造断裂(如岩体的开挖)和阻止断裂(如岩体的加固), 对岩石中裂纹扩展规律的研究显得尤为重要。目前, 在爆炸、冲击和地震等动荷载作用下, 裂纹的动态扩展规律研究仍具有挑战性。

为了研究此类问题, 许多的数值模拟方法被提出, 如有限单元法<sup>[1]</sup>, 无网格法<sup>[2]</sup>, 扩展有限元法<sup>[3-7]</sup>, 比例边界有限元法<sup>[8]</sup>, 近场动力学<sup>[9]</sup>和相场法<sup>[10]</sup>等。区别于这些方法, 数值流形法<sup>[11]</sup>(numerical manifold method, NMM)是在 1991 年由石根华博士提出, 因其采用数学覆盖和物理覆盖两套覆盖系统, 则具有统一地处理连续与非连续问题的能力, 比较适合求解如含裂纹等强奇异边界的问题, 得到广泛的深入研究。

王水林等<sup>[12-13]</sup>率先将 NMM 应用到简单裂纹的扩展中, 并通过拉格朗日乘子法施加裂纹面的接触摩擦约束, 研究了摩擦型裂纹的扩展问题。R. J. Tsay 等<sup>[14]</sup>在 NMM 框架下采用局部网格加密模拟裂纹扩展。Y. J. Chiou 等<sup>[15]</sup>将 NMM 结合虚拟裂纹扩展法和局部加密技术模拟了混合裂纹扩展。G. Ma 等<sup>[16]</sup>利用 NMM 处理复杂的裂纹问题, 随后, X. An 等<sup>[17]</sup>比较了 NMM 和扩展有限元处理非连续问题的方式, 认为 NMM 模拟复杂的不连续问题更方便。

传统 NMM 的全局近似函数采用的是多项式, 因此在处理裂纹时, 裂纹尖端必须强制停留在单元边界上<sup>[18]</sup>。为得到裂纹尖端处精确的计算结果, 必须加密网格, 这会显著增加计算量。李树枕和程玉民<sup>[19]</sup>通过将考虑裂纹尖端应力奇异性的附加函数添加到传统 NMM 的位移函数中解决此问题(本文称为增强型数值流形法)。这样的处理不仅可以大幅提高 NMM 的计算精度, 还可以让裂纹尖端停留在单元的任意位置, 降低前处理难度, 减少计算量。基于增强型数值流形法, Z. J. Wu 等<sup>[20-21]</sup>模拟了裂纹的萌生与扩展, 并详细研究了含夹杂物的岩石中裂纹扩展的规律; H. Zheng 和 D. D. Xu 等<sup>[22]</sup>提出了几种策略, 包括对弯曲裂纹和裂纹尖端处积分的处理, 提高了增强型数值流形法的求解精度; 徐栋栋等<sup>[23-24]</sup>使用高阶数值流形法模拟静态裂纹扩展问题; 杨永涛等<sup>[25]</sup>用其分析了含裂纹体的动态应力强

度因子。为了进一步提高计算精度, H. Zheng 等<sup>[26]</sup>提出了基于 MLS 的数值流形法(MLS-NMM), 它保留了数值流形法处理非连续问题的优势, 同时使用移动最小二乘插值作为权函数, 不仅提高了插值精度且不引起线性相关问题。当然, 它和常规数值流形法(基于有限元网格的数值流形法)一样, 可以域外布点。因其采用的影响域半径一般大于常规数值流形法网格尺寸, 所以边界附近的高斯积分点将拥有更多的插值点, 且插值点分布合理, 这有利于提高计算精度。目前, MLS-NMM 已被成功应用到静载下的裂纹扩展中<sup>[26-28]</sup>。

然而, 在裂纹的动态扩展过程中, 增强型数值流形法因有附加的自由度, 而附着在自由度上的变量在相邻的时间步中若无法准确传递, 会引起能量不一致, 造成计算结果失真, 这就是所谓的自由度继承问题。本文通过将节点上变量的值转化到高斯积分点上, 提出了一种新的继承策略来解决此问题。同时, 本文将结合 Bathe 隐式时间积分法, 建立 MLS-NMM 动力求解格式, 使用断裂力学准则来判断裂纹的动态扩展路径, 给出了程序实施过程, 通过 3 个典型算例验证本文方法的可行性和有效性。

## 2 动载下 MLS-NMM 求解格式

### 2.1 基于 MLS 的增强型数值流形法简介

基于移动最小二乘插值的数值流形法, 采用数学覆盖和物理覆盖两套系统, 可统一自由地处理连续与非连续问题。将节点影响域作为数学片, 则所有的数学片构成数学覆盖; 数学片被物理边界切割生成物理片, 则所有的物理片构成物理覆盖(详细的过程可参阅李 伟等<sup>[29]</sup>)。此方法属于单位分解法, 即可通过在物理片上定义反映局部解特性的特殊局部近似函数, 来达到提高计算精度的目的。本文将应用此措施去处理奇异物理片(物理片包含裂尖, 见图 1), 并称之为基于 MLS 的增强型数值流形法(简称: MLS-NMM)。由此可知, 特殊局部近似函数和 2 套覆盖系统的采用, 可使节点的规则均匀布置成为可能, 这种节点布置方式不仅可保证计算的高精度, 还降低了前处理的难度。

本文针对含裂纹体的裂纹动态扩展问题, 对普通物理片(不含裂尖)取 0 阶为局部近似; 根据线弹性断裂力学, 则对奇异物理片在 0 阶近似基础上, 扩充局部近似的基函数  $c(r, \theta)$ :

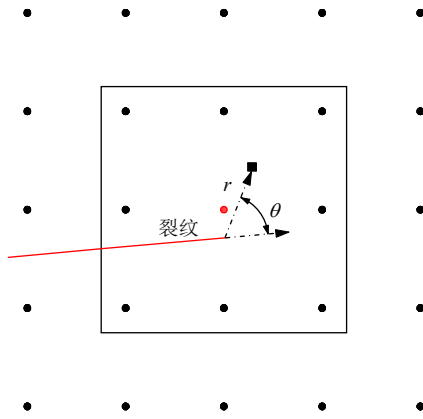


图1 奇异物理片

Fig.1 Singular physical patch

$$c(r, \theta) =$$

$$\left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{3\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \quad (1)$$

式(1)中,  $r$  和  $\theta$  的取值如图 1 所示, 对于曲折裂纹采用 H. Zheng 和 D. D. Xu<sup>[22]</sup>的方法进行处理。

MLS-NMM 使用移动最小二乘插值<sup>[29-30]</sup>作为权函数  $\{\varphi\}$ 。由权函数和局部近似函数对应相乘, 得到一个全局近似函数为

$$u^h(z, t) = \sum_{i=1}^{n_p} N_i u_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^4 N_{jk} a_{jk} \quad (2a)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \begin{bmatrix} \varphi_i & \\ & \varphi_i \end{bmatrix} \\ N_{jk} &= \begin{bmatrix} \varphi_j c_k & \\ & \varphi_j c_k \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

式中:  $z$  为直角坐标  $(x, y)$ ;  $t$  为时间变量;  $n_p$  为物理片的总数目;  $n_s$  为奇异物理片的数目;  $u_i, \varphi_i$  分别为第  $i$  个物理片所对应的常规自由度和权函数;  $c_k$  为式(1)中的第  $k$  个元素;  $a_{jk}$  为第  $j$  个奇异物理片所对应扩充基  $c_k$  的扩充自由度。

奇异物理片中, 在局部近似中添加扩充基, 能显著提高计算精度, 李树忱和程玉民<sup>[19]</sup>已在分析中给予印证, 已被广泛使用<sup>[23, 25, 28, 31]</sup>。扩充基的添加, 也会相应地引起自由度增加, 这会导致裂纹动态扩展中自由度继承困难的问题。

## 2.2 动量守恒变分方程及其离散

对于线弹性介质, 不考虑阻尼, 使用罚函数法施加位移边界, 则在任意时刻的动量方程的变分形式为

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega + k_p \int_{\Gamma_u} (\delta \mathbf{u})^T (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3)$$

式中:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变张量,  $\boldsymbol{\sigma}$  为柯西应力,  $\mathbf{u}$  为位移矢量,  $\ddot{\mathbf{u}}$  为加速度矢量,  $\mathbf{b}$  为体力,  $\rho$  为材料密度,  $\Gamma_u$  为位移边界,  $\bar{\mathbf{u}}$  为位移边界上的已知位移,  $\Gamma_t$  为力边界,  $\bar{\mathbf{t}}$  为力边界上的已知面力,  $k_p$  为罚因子。

假定  $t$  和  $t + \Delta t$  时刻裂纹不发生扩展, 即自由度不发生变化, 则在  $t + \Delta t$  时刻, 将式(2)代入式(3), 进行增量位移形式的离散为

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p) \Delta \mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{K}' \mathbf{U} \quad (4a)$$

式中:  $\Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$  和  ${}^t \mathbf{U}$  分别为  $t + \Delta t$  和  $t$  时刻的位移向量;  ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$  为  $t + \Delta t$  时刻的加速度向量;  $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{K}_p, \mathbf{B}$  和  $\mathbf{F}$  可分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{K}_p &= k_p \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{F} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + k_p \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

式中:  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵。值得注意的是:  $\mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}}$  和  $\bar{\mathbf{u}}$  为增量步内的量。

本文采用 Bathe 双步隐式时间积分策略, 与其他方法相比, 它具有更好的数值稳定和计算精度<sup>[32]</sup>。下文的算例一将给出其与 Newmark 法比较。

将 Bathe 双步隐式时间积分策略, 写成步增量位移的形式; 并将每个时间步  $\Delta t$ , 分成 2 个相等的子时间步  $(\Delta t / 2)$ :

$${}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{4} ({}^t \ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t/2} \ddot{\mathbf{U}}) \quad (5a)$$

$$\Delta \mathbf{U}_1 = \frac{\Delta t}{4} ({}^t \dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}}) \quad (5b)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{U}_1 + \frac{3}{\Delta t} \Delta \mathbf{U}_2 \quad (5c)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t \dot{\mathbf{U}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} \quad (5d)$$

式中:  $\dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}$  分别为速度和加速度向量;  $\Delta \mathbf{U}_1, \Delta \mathbf{U}_2$  可表示为

$$\Delta \mathbf{U}_1 = {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U} \quad (6a)$$

$$\Delta U_2 = {}^{t+\Delta t}U - {}^{t+\Delta t/2}U \quad (6b)$$

将式(5)代入式(4)中，可得在时刻  $t + \Delta t / 2$  和  $t + \Delta t$  的动力方程为

$$\bar{K}_1 \Delta U_1 = \bar{F}_1 \quad (7)$$

$$\bar{K}_2 \Delta U_2 = \bar{F}_2 \quad (8)$$

其中，

$$\bar{K}_1 = \frac{16}{\Delta t^2} M + K + K_p \quad (9a)$$

$$\bar{F}_1 = {}^{t+\Delta t/2}F - K {}^tU + M \left( \frac{8}{\Delta t} {}^t\dot{U} + {}^t\ddot{U} \right) \quad (9b)$$

$$\bar{K}_2 = \frac{9}{\Delta t^2} M + K + K_p \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 = & {}^{t+\Delta t}F - K {}^{t+\Delta t/2}U + \\ & M \left( \frac{3}{\Delta t^2} \Delta U_1 + \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\dot{U} - \frac{1}{\Delta t} {}^t\dot{U} \right) \end{aligned} \quad (9d)$$

上述所需的域积分借鉴无网格伽辽金法，使用背景格子进行数值积分，具体实现过程参照刘丰等<sup>[28]</sup>的研究。

### 3 继承策略

在裂纹的动态扩展过程中，会引起自由度的增加，尤其是增强型数值流形法。可能在当前时间步物理片是奇异物理片，而下一时间步该物理片就会被裂纹分割变成普通物理片，这就会引起与该物理片上相关自由度的变量(如位移、速度等)继承传递的问题。如果没有合适的继承策略，将会导致能量不一致，严重影响计算精度。下面将给出本文所采用的继承策略。

裂纹扩展时，计算域的构型发生变化，即：上一个时间步的终止构型和当前时间步的初始构型是不相同的。

令  $X$  代表随时间变化的场变量，则从  $t_n$  时刻到  $t_{n+1}$  时刻的计算过程可定义为

$$X_n \rightarrow X_n^{n+1} \rightarrow X_{n+1} \quad (10)$$

式中： $X_n$  为  $t_n$  时刻场变量的值， $X_n^{n+1}$  为构型更新后  $t_n$  时刻场变量的值， $X_{n+1}$  为  $t_{n+1}$  时刻场变量的值。

从式(10)可以看出，只要实现  $X_n$  到  $X_n^{n+1}$  的准确变换，就可根据式(7)和(8)自然地实现  $X_{n+1}$  的求解。所以，本文的思路就是为实现式(10)的第一步准确变换，将节点上的变量值转化到高斯积分点上，则

通过处理高斯积分点上的变量值来达到目的。相应的计算式(9b)和(9d)可改写为

$$\bar{F}_1 = {}^{t+\Delta t/2}F - \sum \left[ B_g^t \sigma_g - \rho N_g \left( \frac{8}{\Delta t} {}^t\dot{U}_g + {}^t\ddot{U}_g \right) \right] w_g J_g \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 = & {}^{t+\Delta t}F - \sum B_g^{t+\Delta t/2} \sigma_g w_g J_g + \\ & \sum \rho N_g \left( \frac{3}{\Delta t^2} \Delta U_{g1} + \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\dot{U}_g - \frac{1}{\Delta t} {}^t\dot{U}_g \right) w_g J_g \end{aligned} \quad (11b)$$

式中：下标“g”代表高斯积分点处的场变量值； $w_g$ ， $J_g$  分别为对应高斯点的权系数和雅可比行列式的值。

当裂纹扩展时，新生成的裂纹将切割原来的背景积分网格，生成新的积分网格(见图 2)。图 2(a)为一个裂纹扩展前的背景积分格子和相应的高斯积分点分布示意图；图 2(b)则显示当裂纹贯穿背景积分格子后，新生成的背景积分格子及高斯积分点分布示意图；图 2(c)为裂纹尖端停留在背景积分格子中，新生成的背景积分格子及高斯积分点分布示意图。

图 2 利用扩展前的背景积分格子里的高斯积分点上的变量值，采用 Shepard 插值计算新生成的高斯积分点上的变量值，就可完成高斯积分点上的变量值的传递(即完成了式(10)第一步的处理)。为检验此措施的精度，定义误差为

$$e = \left\{ \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{2} [\rho (\dot{u}_n^{n+1})^T \dot{u}_n^{n+1} + (\varepsilon_n^{n+1})^T \sigma_n^{n+1}] d\Omega}{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\rho \dot{u}_n^T \dot{u}_n + \varepsilon_n^T \sigma_n) d\Omega} - 1 \right\} \times 100\% \quad (12)$$

式中： $\dot{u}_n$ ， $\varepsilon_n$ ， $\sigma_n$  分别为  $t_n$  时刻的速度、应变和应力； $\dot{u}_n^{n+1}$ ， $\varepsilon_n^{n+1}$ ， $\sigma_n^{n+1}$  分别为构型更新后  $t_n$  时刻的速度、应变和应力。

### 4 裂纹动态扩展准则

本文采用断裂力学准则作为裂纹动态扩展准则。

#### 4.1 动态应力强度因子

本文使用交互作用积分来计算动态应力强度因子，可参考 W. Li 等<sup>[31, 33]</sup>。与文献不同的地方是，本文可以直接使用裂纹尖端周围的背景积分格子里的高斯积分点上的变量值来直接计算交互作用积分(I)。

交互作用积分和动态应力强度因子的关系为

$$I = \frac{2}{E'} [f_1(\dot{a}) K_I^{\text{dyn}} K_I^{\text{aux}} + f_2(\dot{a}) K_{II}^{\text{dyn}} K_{II}^{\text{aux}}] \quad (13)$$

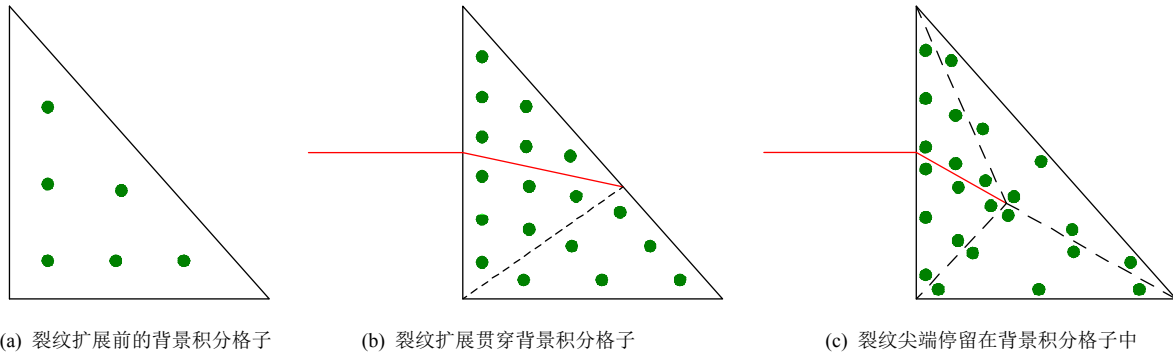


图2 随裂纹扩展背景积分格子及积分点布置变化示意图

Fig.2 The diagram of background grids and Gauss points of integration with crack propagation

其中,

$$E' = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} & (\text{平面应变}) \\ E & (\text{平面应力}) \end{cases}$$

式中:  $K_I^{\text{dyn}}$ ,  $K_{II}^{\text{dyn}}$  为真实场动态应力强度因子;  $K_I^{\text{aux}}$ ,  $K_{II}^{\text{aux}}$  为辅助场的应力强度因子;  $\dot{a}$  为裂纹扩展速度;  $f_i(\dot{a})$  为一个通用函数, 被定义为

$$f_i(\dot{a}) = \frac{4\alpha_i(1-\alpha_2^2)}{(\kappa+1)D(\dot{a})} \quad (i \in \{1, 2\}) \quad (14)$$

其中,

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面应变}) \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面应力}) \end{cases}$$

$$\alpha_i = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_i}\right)^2} \quad (i \in \{1, 2\})$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_1\alpha_2 - (1 + \alpha_2^2)^2$$

式中:  $c_1$ ,  $c_2$  分别为膨胀波速和剪切波速, 可由拉梅系数( $\lambda$  和  $\mu$ ) 和材料密度( $\rho$ ) 确定, 即

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \\ c_2 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由式(13), 当令  $K_I^{\text{aux}} = 1$ ,  $K_{II}^{\text{aux}} = 0$ , 可解出  $K_I^{\text{dyn}}$ ; 令  $K_I^{\text{aux}} = 0$ ,  $K_{II}^{\text{aux}} = 1$ , 则可解出  $K_{II}^{\text{dyn}}$ 。

#### 4.2 扩展准则

本文采用最大周向应力准则来确定裂纹起裂和扩展方向, 则裂纹的扩展方向为

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{K_I^{\text{dyn}} - \sqrt{(K_I^{\text{dyn}})^2 + 8(K_{II}^{\text{dyn}})^2}}{K_{II}^{\text{dyn}}} \right] \quad (16)$$

等效应力强度因子为

$$K_{\text{eq}} = \cos^3 \frac{\theta_c}{2} K_I^{\text{dyn}} - \frac{3}{2} \cos \frac{\theta_c}{2} \sin \theta_c K_{II}^{\text{dyn}} \quad (17)$$

根据 T. Menouillard 等<sup>[3-4, 34]</sup>中, 裂纹扩展速度和动态应力强度因子的关系, 可确定裂纹扩展速度:

$$\dot{a} = \begin{cases} 0 & (K_{\text{eq}} \leq K_{\text{IC}}) \\ c_r \left( 1 - \frac{K_{\text{IC}}}{K_{\text{eq}}} \right) & (K_{\text{eq}} > K_{\text{IC}}) \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $K_{\text{IC}}$  为准静态下材料的断裂韧性,  $c_r$  为瑞利波速。则可明确地确定一个时间步的裂纹扩展长度为  $\dot{a}\Delta t$ 。

### 5 程序实施

下面将给出使用 MLS-NMM 求解裂纹动态扩展的详细程序实施过程:

- (1) 输入几何参数和物理参数。
- (2) 根据求解区域均匀布置节点(允许节点布置在域外, 但要满足节点影响域与求解区域相交)。
- (3) 利用节点影响域生成数学片, 组成数学覆盖; 数学片经物理边界的切割生成物理片, 构成物理覆盖。
- (4) 判断物理片的类型并记录(普通物理片或奇异物理片)。
- (5) 生成背景积分网格, 确定每个背景积分格子中的高斯积分点及其权系数(参照刘丰等<sup>[28]</sup>研究)。

(6) 初始计算:

- ① 遍历所有高斯积分点, 根据式(4a)和(4b)形成  $M$ ,  $K$ ,  $\mathbf{K}_p$  和  $F$ 。
- ② 根据初始条件  $\mathbf{U}_0$  和  $\dot{\mathbf{U}}_0$ , 利用 0 时刻的运动方程求解  $\ddot{\mathbf{U}}_0$ 。
- ③ 计算初始时刻的高斯积分点处的  $\dot{\mathbf{U}}_g$ ,  $\ddot{\mathbf{U}}_g$  和

$\sigma_g$ 。

(7) 对每个时间步  $\Delta t$  :

第一个子时间步内:

① 根据式(9a)和(11a)形成  $\bar{K}_1$  和  $\bar{F}_1$  , 利用式(7)

求解  $\Delta U_1$  。

② 计算高斯积分点处的  $\Delta U_{g1}$  和  ${}^{t+\Delta t/2}\sigma_g$  。

③ 根据式(5a)和(5b), 计算  $t + \Delta t / 2$  时刻的  ${}^{t+\Delta t/2}\dot{U}_g$  和  ${}^{t+\Delta t/2}\ddot{U}_g$  。

第二个子时间步内:

① 根据式(9c)和(11b)形成  $\bar{K}_2$  和  $\bar{F}_2$  , 利用式(8)

求解  $\Delta U_2$  。

② 计算高斯积分点处的  $\Delta U_{g2}$  和  ${}^{t+\Delta t}\sigma_g$  。

③ 根据式(5c)和(5d), 计算  $t + \Delta t$  时刻的  ${}^{t+\Delta t}\dot{U}_g$  和  ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}_g$  。

(8) 每个时间步末, 判断模拟是否达到所设定的总时间, 若是则停止计算, 若否则根据式(13), (16)和(17)计算裂纹的扩展方向和等效应力强度因子, 再依据式(18)判断裂纹是否发生扩展, 若扩展计算裂纹扩展速度  $\dot{a}$  (如果已知扩展速度, 则无需计算) 并执行下步骤, 否则继续执行步骤(7)和(8)。

(9) 若发生裂纹扩展, 更新裂纹信息, 并在新增裂纹长度  $\dot{a}\Delta t$  范围内, 切割原来的背景积分格子和物理片, 生成新的背景积分格子和物理片; 将原来的高斯积分点上的变量映射到新的高斯积分点上 (即完成式(10)的第一步); 继续执行步骤(7)和(8)。

## 6 算 例

为了验证本文所提出的方法的有效性, 下面将给出 3 个典型的算例进行分析与验证。所有算例的节点均匀等间距布置, 节点影响域都取为正方形, 且其半边长为  $1.6h$ ,  $h$  为为节点间距。采用的罚因子  $k_p$ , 都取为  $10^6 E$ ,  $E$  为弹性模量。

### 6.1 含半无限长裂纹的无限大板问题

阶跃型荷载作用在含无限长裂纹的无限大板顶部, 理论解为

$$\sigma(t) = \sigma_0 = 500 \text{ MPa} \quad (t \geq 0) \quad (19)$$

所取计算模型的几何尺寸和边界条件, 如图 3 所示, 即板长为  $L = 10 \text{ m}$ , 板高为  $H = 4 \text{ m}$ , 裂纹长度为  $a = 5 \text{ m}$ 。假定该板处于平面应变状态。材料参数为: 弹性模量  $E = 210 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 材料密度为  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ 。图 4 给出了间距  $h = 0.5 \text{ m}$  的节点分布。

动态应力强度因子的理论解已由 L. B. Freund<sup>[35]</sup>

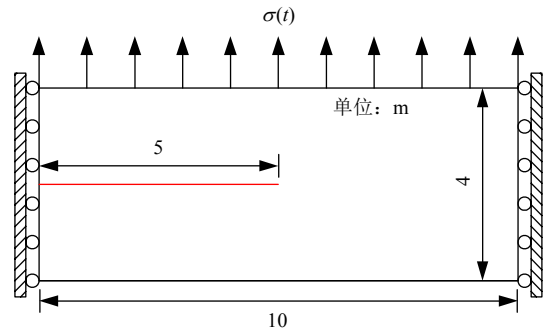


图 3 含半无限长裂纹的无限大板

Fig.3 Geometry and loading for a plate containing a semi-infinite crack

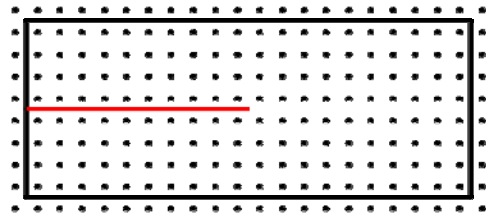


图 4  $h = 0.5 \text{ m}$  的节点分布

Fig.4 Distribution of nodes with  $h = 0.5 \text{ m}$

给出:

$$K_1^{\text{dyn}}(\dot{a}, t) = \begin{cases} 0 & (t < t_c) \\ \frac{2\sigma_0}{1-\nu} \sqrt{\frac{c_1(t-t_c)(1-2\nu)}{\pi}} \frac{1-\dot{a}/c_r}{1-\dot{a}/(2c_r)} & (t \geq t_c) \end{cases} \quad (20)$$

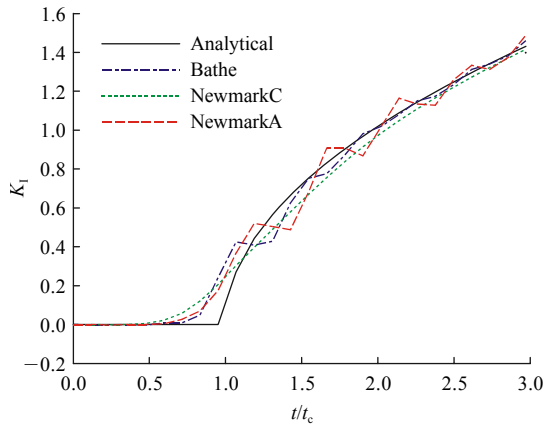
式中:  $c_1 = 5944 \text{ m/s}$ ,  $c_r = 2947 \text{ m/s}$ ,  $t_c = H / (2c_1)$ 。

取  $3t_c$  即  $1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  作为计算的总时间。它表示波第一次从板底边反射到达裂纹所用的时间。为了便于比较分析, 将时间  $t$  除以  $t_c$  进行正规化处理, 将动态应力强度因子正规化为

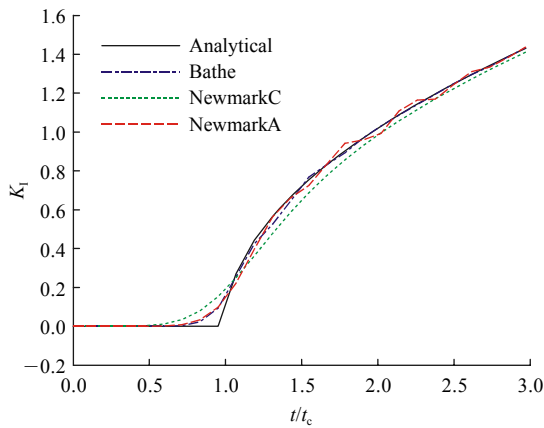
$$K_1 = K_1^{\text{dyn}} / (\sigma_0 \sqrt{H/2}) \quad (21)$$

为了验证 Bathe 隐式时间积分法(记为 Bathe)的准确性, 特与 Newmark 时间积分的平均加速度法(记为 NewmarkA)和常加速度法(记为 NewmarkC)作比较。假定在计算的时间内裂纹的扩展速度  $\dot{a} = 0$ , 计算时间步长为  $\Delta t = 40 \mu\text{s}$ , 给出节点分布间距为  $0.5$  和  $0.25 \text{ m}$  的计算结果(见图 5)。

从图 5 结果可以看出, Bathe 隐式时间积分法较 NewmarkA 有更好的数值稳定性; 与 NewmarkC 相比有更高的计算精度。这可能是因为 NewmarkA 不含数值阻尼, 而 NewmarkC 的数值阻尼大于 Bathe 法所致。关于 Bathe 隐式时间积分法, 具体详细的数值分析可参见 K. J. Bathe 和 G. Noh<sup>[32]</sup>。



(a)  $h = 0.5 \text{ m}$



(b)  $h = 0.25 \text{ m}$

图5 不同时间积分方法的计算结果

Fig.5 The accuracy of  $K_I$  by using different time integration methods

验证 MLS-NMM 求解裂纹动态扩展的准确性。在总的计算时间内，令当  $t < 1.5t_c$ ， $\dot{a} = 0$ ；当  $t \geq 1.5t_c$ ， $\dot{a} = 1500 \text{ m/s}$ 。

为进行收敛性分析，使用节点间距  $h = 0.5, 0.25, 0.125$  和  $0.0625 \text{ m}$  进行分析，采用  $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ 。图 6 展示了不同的节点间距下， $K_I$  的计算结果。从图中可以得出随节点间距的减小，计算结果将逐渐收敛到解析解。然而在裂纹扩展过程中， $K_I$  出现震荡现象。T. Elguedi 等<sup>[5-7]</sup>也观察到相应的现象，这可能是由于在裂纹扩展过程中，切割物理片生成多个物理片造成自由度增加所致，这与 L. F. Wen 和 R. Tian<sup>[6]</sup>的分析结果类似。图 7 给出了采用继承策略，式(12)表示的误差  $e$  的分布图。如图所示，在  $t < 1.5t_c$  时，裂纹未扩展，则  $e$  为 0；在  $t \geq 1.5t_c$  时，裂纹发生扩展，使用继承策略会产生误差，但误差很小，最大仅为  $-0.093\%$  (当  $h = 0.5 \text{ m}$  时)。此外，误差也会随着随节点间距的减小而减小。

图 8 和 9 给出了当  $h = 0.25 \text{ m}$  时在不同时间步长  $\Delta t = 40, 20, 10 \mu\text{s}$  下的  $K_I$  和  $e$  的计算结果，从

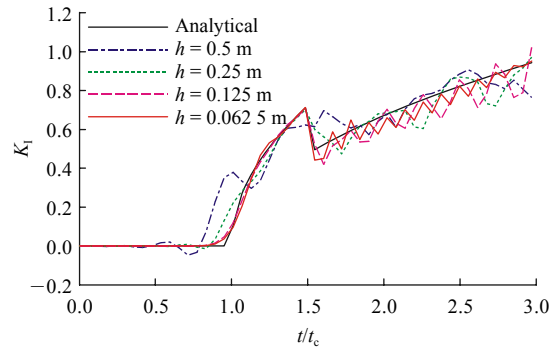


图6  $K_I$  在不同节点间距下 MLS-NMM 的计算结果 ( $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ )

Fig.6 Effect of node space on  $K_I$  by using MLS-NMM ( $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ )

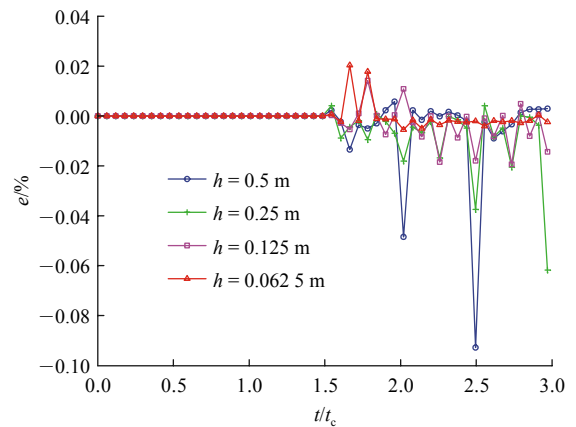


图7  $e$  在不同节点间距下 MLS-NMM 的计算结果 ( $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ )

Fig.7 Effect of node space on  $e$  by using MLS-NMM ( $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ )

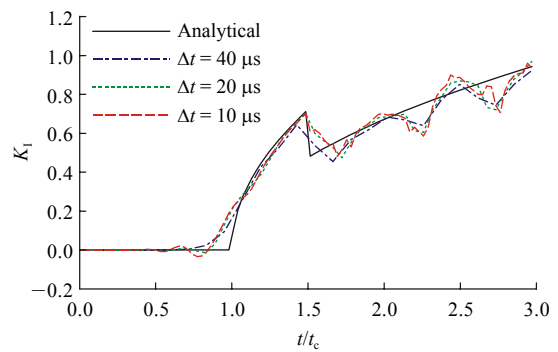


图8  $K_I$  在不同时间步长下 MLS-NMM 的计算结果 ( $h = 0.25 \text{ m}$ )

Fig.8 Effect of time step on  $K_I$  by using MLS-NMM ( $h = 0.25 \text{ m}$ )

时间离散角度来检验本文方法的稳定性。由图 8 可知，随着计算所用的时间步长的减少，计算精度会稍有提高。当  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$  时，在  $t < t_c$  时发生轻微震荡，这可能是由于时间步小，与其相关的数值阻尼也变小的原因而引起的。图 9 中显示，本文所采用的继承策略的计算精度对时间步长不敏感。总体来

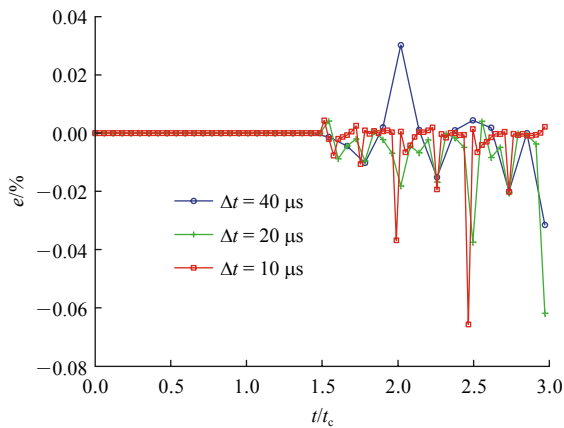


图 9  $e$  在不同时间步长下 MLS-NMM 的计算结果 ( $h = 0.25 \text{ m}$ )

Fig.9 Effect of time step on  $e$  by using MLS-NMM( $h = 0.25 \text{ m}$ )

讲, 这 3 个时间步的选用, 都可以达到计算所需的精度要求。这也是采用隐式时间积分法的优势, 即可以使用较大的时间步长计算, 从而降低计算量。

综上所述, 本文所提出的方法具有良好的数值特性。

### 6.2 Kalthoff-Winkler 实验

J. Kalthoff 和 S. Winkler<sup>[36]</sup>首先采用含双边平行裂纹在受冲击荷载作用下的材料的断裂性能实验研究。此实验也被广泛应用于数值模拟的验证<sup>[2-3, 5, 7-8]</sup>。因其是对称的, 所以取其一半作为研究对象, 模型尺寸及边界条件如图 10 所示。假定该模型处于平面应变状态。计算所用参数为: 弹性模量  $E = 190 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 材料密度  $\rho = 8\,000 \text{ kg/m}^3$ , 断裂韧度  $K_{IC} = 68\,000 \text{ kN/m}^{3/2}$ , 瑞利波速  $c_r = 2\,799.2 \text{ m/s}$ 。计算总时间为  $80 \mu\text{s}$ 。

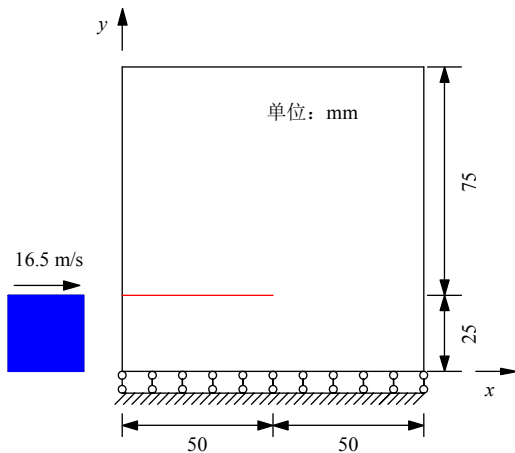


图 10 Kalthoff-Winkler 实验

Fig.10 Kalthoff-Winkler's experiment

为了避免在计算过程中, 初始裂纹面发生自接触, 模型实际的建立中可预留很小间隙<sup>[2]</sup>。

该模型的节点离散图见图 11, 其节点间距  $h = 2.5 \text{ mm}$ 。计算采用的时间步长为  $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ 。

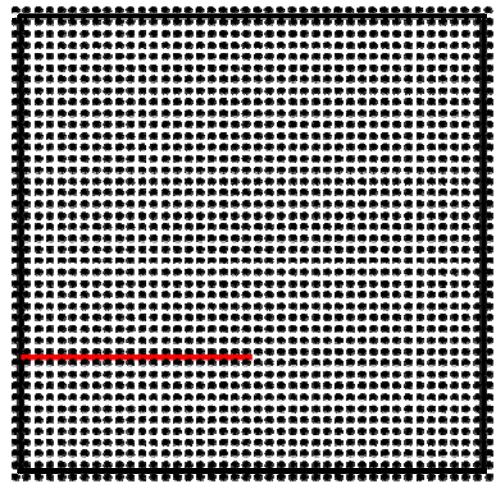


图 11  $h = 2.5 \text{ mm}$  的节点分布

Fig.11 Distribution of nodes with  $h = 2.5 \text{ mm}$

为了与 T. Belytschko 等<sup>[2, 8]</sup>的计算结果作比较, 首先采用裂纹扩展速度为定值, 即  $453.35 \text{ m/s}$  进行分析。T. Belytschko 和 M. Tabbara<sup>[2]</sup>使用无网格伽辽金法(EFG)和 E. T. Ooi 等<sup>[8]</sup>采用比例边界有限元法(SBFEM)来模拟计算该问题。动态应力强度因子随时间的变化图, 如图 12 所示。从图中可以看出, 本文方法(MLS-NMM)的动态应力强度因子的变化趋势与参考文献基本一致, 结果稍大于文献结果。裂纹扩展的起始时间为  $15 \mu\text{s}$ , 稍早于无网格伽辽金法的  $16.3 \mu\text{s}$  和比例边界有限元法的  $16 \mu\text{s}$ 。本文的计算结果与文献结果稍微不同的原因, 可能是对奇异物理片使用局部扩充的近似函数(见式(1))所致。此种做法能更准确地计算应力强度因子<sup>[19]</sup>, 引起计算结果稍早地满足断裂准则, 从而导致比其它方法先开始裂纹扩展。图 13 给出了本文方法和无网格伽辽金法的最终扩展路径图, 两者基本一致。

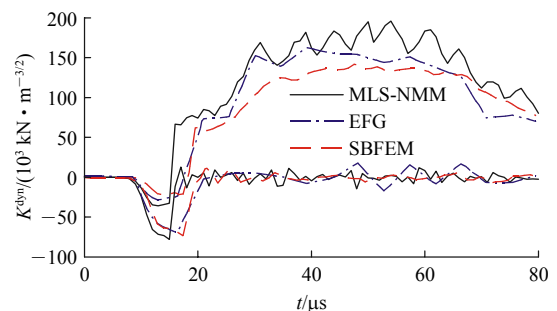


图 12 Kalthoff-Winkler 实验中动态应力强度因子随时间的变化

Fig.12 The dynamic stress intensity factor of Kalthoff-Winkler's experiment with times



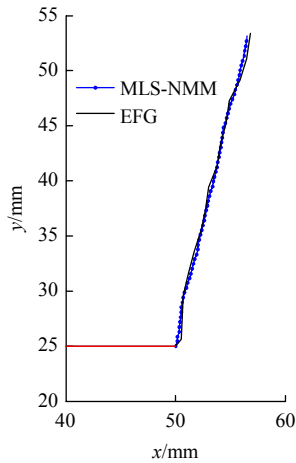


图 13 Kalthoff-Winkler 实验中裂纹扩展路径  
Fig.13 Path of crack propagation for Kalthoff-Winkler's experiment

为验证本文方法的适用能力，计算过程根据式(18)确定裂纹扩展速度，继续进行此算例的模拟。计算结果如图 14 和 15 所示。图 14 给出了裂纹速度由式(18)确定下裂纹扩展最终的路径图，裂纹的初始起裂时间也为 15  $\mu\text{s}$ ，初始开裂角度为 70.5°。

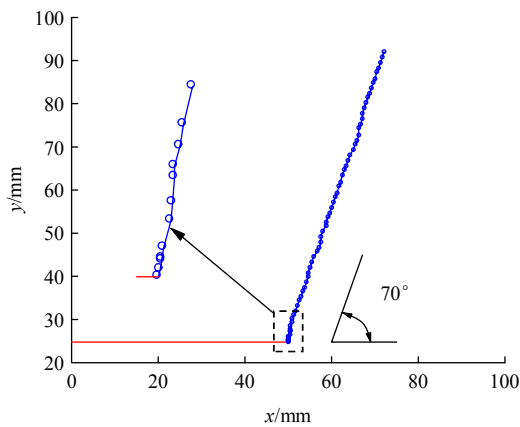


图 14 在裂纹扩展速度变化下裂纹扩展最终路径  
Fig.14 The final path under changing speed of crack propagation

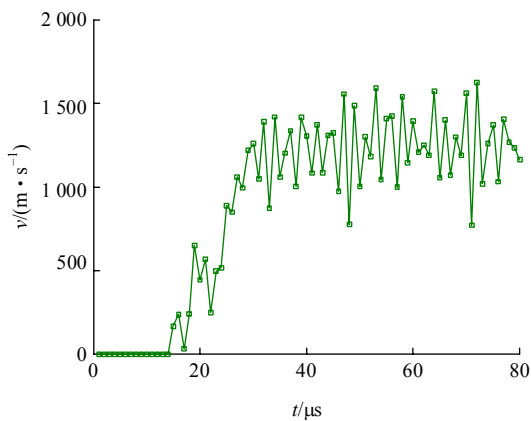


图 15 随时间变化的裂纹扩展速度  
Fig.15 The speeds of crack propagation with times

裂纹在整个扩展过程中，扩展角度为 63.9°~87.1°。裂纹的总体倾斜的角度，基本与 J. Kalthoff 和 S. Winkler<sup>[36]</sup>得出的 70°一致。图 15 展示了裂纹扩展过程中，裂纹扩展速度的分布图。裂纹从 15  $\mu\text{s}$  开始扩展，直到 30  $\mu\text{s}$  扩展速度整体处于增加状态，30  $\mu\text{s}$  以后裂纹以 1 200 m/s 上下的速度进行扩展。

### 6.3 含双裂纹的三点弯曲梁

采用一个含双裂纹的三点弯曲梁，去验证 MLS-NMM 模拟动态混合型多裂纹扩展的准确性，计算模型的尺寸及边界条件见图 16，其中速度边界的施加按下式进行：

$$v_0(t) = \begin{cases} \bar{v}t/t_0 & (t \leq t_0) \\ \bar{v} & (t > t_0) \end{cases} \quad (22)$$

式中： $\bar{v} = 0.06 \text{ m/s}$ ， $t_0 = 196 \mu\text{s}$ 。

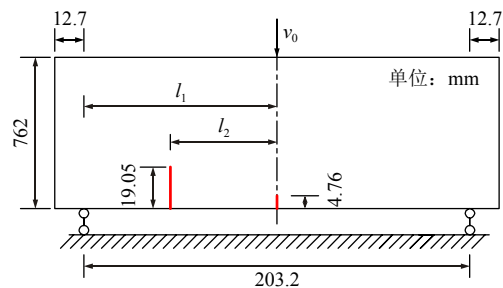


图 16 含双裂纹的三点弯曲梁  
Fig.16 Three-point bending specimen containing double cracks

假定处于平面应力状态。该算例的相关计算参数为：弹性模量  $E = 31.37 \text{ GPa}$ ，泊松比  $\nu = 0.2$ ，材料密度  $\rho = 2\,400 \text{ kg/m}^3$ ，断裂韧度  $K_{IC} = 800 \text{ kN/m}^{3/2}$ ，瑞利波速  $c_r = 2\,119.8 \text{ m/s}$ 。

定义 2 条裂纹的间距与  $l_1$  相关的参数为

$$\gamma = l_2 / l_1 \quad (23)$$

早在 1990 年，R. John 和 S. P. Shah<sup>[37]</sup>发现对应不同  $\gamma$  的值会出现不同的裂纹扩展形式。本文将对  $\gamma = 0.5$ ， $\gamma = 0.61$ ， $\gamma = 0.68$  使用 MLS-NMM 进行相应的计算。

对于不同的  $\gamma$ ，都采用相同的节点间距  $h = 4 \text{ mm}$  的节点分布(图 17 给出了  $\gamma = 0.5$  时的节点分布图)，计算所需的时间步长为  $\Delta t = 8 \mu\text{s}$ 。

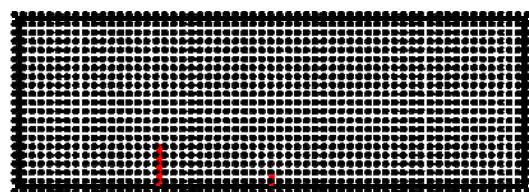


图 17  $h = 4 \text{ mm}$  的节点分布图( $\gamma = 0.5$ )  
Fig.17 Distribution of nodes with  $h = 4 \text{ mm}$ ( $\gamma = 0.5$ )

图 18 和 19 分别给出  $\gamma = 0.5$  时裂纹最终扩展的路径和裂纹的扩展速度。从图中可发现，中心裂纹不发生扩展，只有左边裂纹发生扩展，开裂时间为  $696 \mu\text{s}$ ，且扩展的初始段与竖向的夹角约为  $22^\circ$  与 R. John 和 S. P. Shah<sup>[37]</sup>的计算结果一致。

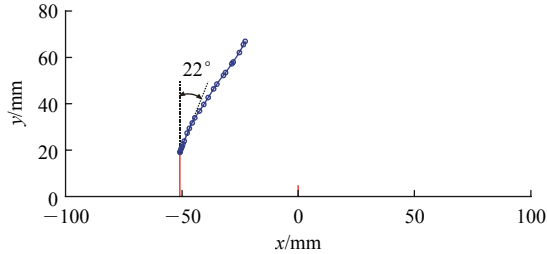


图 18  $\gamma = 0.5$  时裂纹扩展路径

Fig.18 The path of crack propagation with  $\gamma = 0.5$

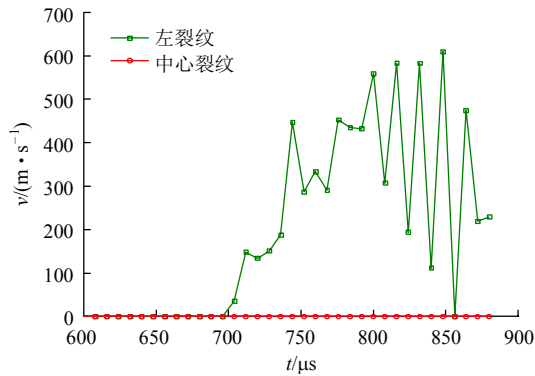


图 19  $\gamma = 0.5$  时裂纹扩展速度

Fig.19 The speeds of crack propagation with  $\gamma = 0.5$

图 20 和 21 分别给出  $\gamma = 0.61$  时裂纹最终扩展的路径和裂纹的扩展速度。图 20 显示，2 条裂纹都发

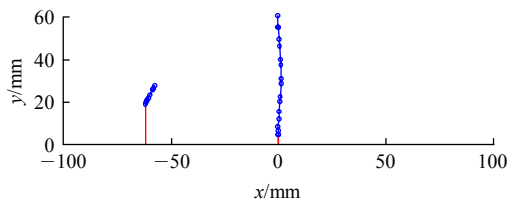


图 20  $\gamma = 0.61$  裂纹扩展路径

Fig.20 The path of crack propagation with  $\gamma = 0.61$

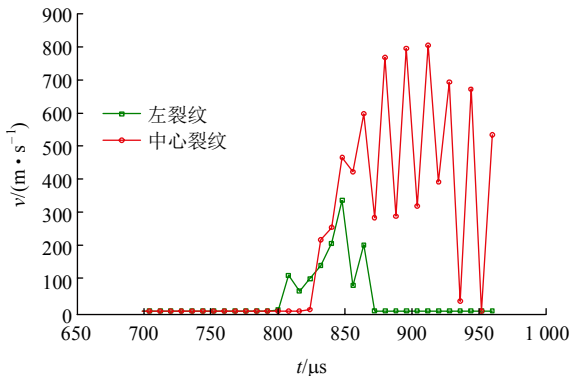


图 21  $\gamma = 0.61$  裂纹扩展速度

Fig.21 The speeds of crack propagation with  $\gamma = 0.61$

生了扩展，中心裂纹沿与竖向夹角约为  $0^\circ$  的方向扩展。由图 21 可知，左边裂纹先开始扩展，之后中心裂纹发生扩展，但中心裂纹在  $872 \mu\text{s}$  时停止扩展。

图 22 和 23 分别给出  $\gamma = 0.68$  时裂纹最终扩展的路径和裂纹的扩展速度。此时，只有中心裂纹从  $800 \mu\text{s}$  开始扩展，且与竖向夹角约为  $0^\circ$  的方向扩展。

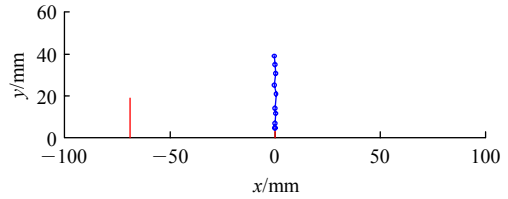


图 22  $\gamma = 0.68$  时裂纹扩展路径

Fig.22 The path of crack propagation with  $\gamma = 0.68$

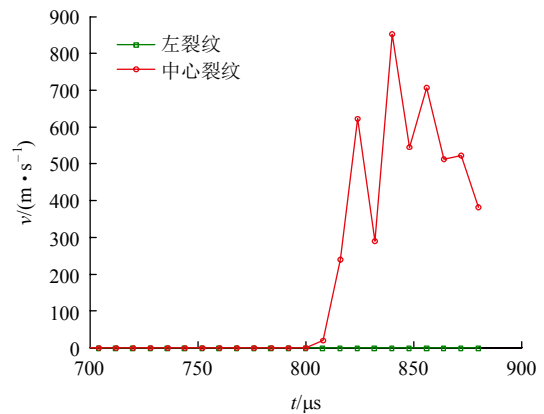


图 23  $\gamma = 0.68$  时裂纹扩展速度

Fig.23 The speeds of crack propagation with  $\gamma = 0.68$

## 7 结 论

为了将基于移动最小二乘插值(MLS)的增强型数值流形法(MLS-NMM)应用到动态裂纹扩展中,本文通过引入 Bathe 隐式时间积分方法,并采用一种新的自由度继承策略,结合动态裂纹扩展的断裂力学准则,提出了一套基于 MLS-NMM 的动态裂纹扩展的求解格式。通过 3 个典型算例的计算结果分析,可得出以下结论:

- (1) 新的自由度继承策略的使用,能有效解决动态裂纹扩展过程中的自由度继承问题。
- (2) 本文方法能有效准确地模拟裂纹的动态扩展。

### 参考文献(References):

[1] SONG J H, WANG H, BELYTSCHKO T. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture[J]. Computational

- Mechanics, 2008, 42(2): 239 - 250.
- [2] BELYTSCHKO T, TABBARA M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(6): 923 - 938.
- [3] MENOULLARD T, RETHORE J, COMBESURE A, et al. Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM)[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 68(9): 911 - 939.
- [4] ZHUANG Z, CHENG B B. Development of X-FEM methodology and study on mixed-mode crack propagation[J]. Acta Mechanica Sinica, 2011, 27(3): 406 - 415.
- [5] ELGUEDJ T, GRAVOUIL A, MAIGRE H. An explicit dynamics extended finite element method. Part 1: Mass lumping for arbitrary enrichment functions[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(30/32): 2 297 - 2 317.
- [6] WEN L F, TIAN R. Improved XFEM: Accurate and robust dynamic crack growth simulation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 308: 256 - 285.
- [7] LIU Z, MENOULLARD T, BELYTSCHKO T. An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation[J]. International Journal of Fracture, 2011, 169(2): 183 - 198.
- [8] OOI E T, NATARAJAN S, SONG C M, et al. Dynamic fracture simulations using the scaled boundary finite element method on hybrid polygon-quadtrees meshes[J]. International Journal of Impact Engineering, 2016, 90: 154 - 164.
- [9] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(1): 175 - 209.
- [10] MIEHE C, SCH NZEL L M, ULMER H. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. Part I. Balance of crack surface and failure criteria for brittle crack propagation in thermo-elastic solids[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 294: 449 - 485.
- [11] SHI G. Manifold method of material analysis[C]// Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing Report No 92 - 1. Minneapolis, MN: US Army Research Office, 1991: 57 - 76.
- [12] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405 - 410.(WANG Shuilin, GE Xiuren. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997, 16(5): 405 - 410.(in Chinese))
- [13] 王水林, 葛修润, 章光. 受压状态下裂纹扩展的数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(6): 671 - 675.(WANG Shuilin, GE Xiuren, ZHANG Guang. Numerical analysis of crack propagation under compression[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(6): 671 - 675.(in Chinese))
- [14] TSAY R J, CHIOU Y J, CHUANG W L. Crack growth prediction by manifold method[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(8): 884 - 890.
- [15] CHIOU Y J, LEE Y M, TSAY R J. Mixed mode fracture propagation by manifold method[J]. International Journal of Fracture, 2002, 114(4): 327 - 347.
- [16] MA G, AN X, ZHANG H, et al. Modeling complex crack problems using the numerical manifold method[J]. International Journal of Fracture, 2009, 156(1): 21 - 35.
- [17] AN X, FU G, MA G. A comparison between the NMM and the XFEM in discontinuity modeling[J]. International Journal of Computational Methods, 2012, 9(2): 1240030.
- [18] 杨永涛. 多裂纹动态扩展的数值流形法[博士学位论文][D]. 北京: 中国科学院大学, 2015.(YANG Yongtao. Multiple dynamic crack propagation based on numerical manifold method[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: The University of Chinese Academy of Sciences, 2015.(in Chinese))
- [19] 李树忱, 程玉民. 考虑裂纹尖端场的数值流形方法[J]. 土木工程学报, 2005, 38(7): 96 - 101.(LI Shuchen, CHENG Yumin. Numerical manifold method for crack tip fields[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(7): 96 - 101.(in Chinese))
- [20] WU Z J, WONG L N Y. Frictional crack initiation and propagation analysis using the numerical manifold method[J]. Computers and Geotechnics, 2012, 39: 38 - 53.
- [21] WU Z J, WONG L N Y. Modeling cracking behavior of rock mass containing inclusions using the enriched numerical manifold method[J]. Engineering Geology, 2013, 162: 1 - 13.
- [22] ZHENG H, XU D D. New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 97(13): 986 - 1 010.
- [23] 徐栋栋, 杨永涛, 郑宏, 等. 线性无关高阶数值流形法在断裂力学中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(12): 2 463 - 2 473.(XU Dongdong, YANG Yongtao, ZHENG Hong, et al. Application of the linearly independent high-order numerical manifold method in fracture mechanics[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(12): 2 463 - 2 473.(in Chinese))
- [24] 徐栋栋, 郑宏, 夏开文, 等. 高阶扩展数值流形法在裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(7): 1 375 - 1 387.(XU Dongdong, ZHENG Hong, XIA Kaiwen, et al. Application of higher order enriched numerical manifold method to crack propagation[J].

- Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(7): 1 375 - 1 387.(in Chinese)
- [25] 杨永涛, 徐栋栋, 郑 宏. 动载下裂纹应力强度因子计算的数值流形元法[J]. 力学学报, 2014, 46(5): 730 - 738.(YANG Yongtao, XU Dongdong, ZHENG Hong. Evaluation on stress intensity factor of crack under dynamic load using numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(5): 730 - 738.(in Chinese))
- [26] ZHENG H, LIU F, LI C G. The MLS-based numerical manifold method with applications to crack analysis[J]. International Journal of Fracture, 2014, 190(1/2): 147 - 166.
- [27] ZHENG H, LIU F, DU X L. Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 295: 150 - 171.
- [28] 刘 丰, 郑 宏, 夏开文. 基于 MLS 的数值流形法模拟多裂纹扩展[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(1): 76 - 86.(LIU Feng, ZHENG Hong, XIA Kaiwen. A MLS-based numerical manifold method for multiple cracks propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(1): 76 - 86.(in Chinese))
- [29] 李 伟, 郑 宏, 郭宏伟. 基于 MLS-NMM 的摩擦接触问题研究[J]. 工程力学, 2017, 34(11): 18 - 25.(LI Wei, ZHENG Hong, GUO Hongwei. The research of frictional contact problem based on MLS-NMM[J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(11): 18 - 25.(in Chinese))
- [30] 李 伟, 郑 宏. 基于数值流形法的渗流问题边界处理新方法[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(10): 1 867 - 1 873.(LI Wei, ZHENG Hong. New boundary treatment for seepage flow problem based on numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(10): 1 867 - 1 873.(in Chinese))
- [31] LI W, ZHENG H, SUN G H. The moving least squares based numerical manifold method for vibration and impact analysis of cracked bodies[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, 190: 410 - 434.
- [32] BATHE K J, NOH G. Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics[J]. Computers and Structures, 2012, 98: 1 - 6.
- [33] LIU P, BUI T, ZHANG C, et al. The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2D elastic solids[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 233: 68 - 80.
- [34] KANNINEN M F, POPELAR C H. Advanced fracture mechanics[M]. Oxford University Press, 1985: 193 - 240.
- [35] FREUND L B. Dynamic fracture mechanics[M]. Cambridge : Cambridge University Press, 1998: 9 - 60.
- [36] KALTHOFF J, WINKLER S. Failure mode transition at high rates of shear loading[J]. DGM Information gesellschaft mbH, Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials, 1988, (1): 185 - 195.
- [37] JOHN R, SHAH S P. Mixed-mode fracture of concrete subjected to impact loading[J]. Journal of Structural Engineering, 1990, 116(3): 585 - 602.