

# 隧道地表沉降预测的黏弹模型

孔庆聪<sup>1,2</sup> 李银平<sup>2</sup> 李 硕<sup>3</sup> 杨博进<sup>2</sup> 李金龙<sup>2</sup>

(1.青岛市公路管理局 即墨分局,山东 青岛 266000; 2.中国科学院武汉岩土力学研究所 湖北省环境岩土工程重点实验室,武汉 430071; 3.即墨国际商贸城开发投资有限公司,山东 青岛 266000)

**摘要:**在隧道开挖及运行过程中,不可避免地会对岩土体产生扰动,引起隧道地表产生沉降,对于隧道地表沉降分析,目前尚无成熟的基于力学理论的解析模型。针对该问题,将水平隧道地表沉降问题近似为半无限空间内水平圆柱形孔洞受力收缩导致的边界位移问题,并通过求解弹性无限域内的轴对称平面应变问题,运用叠加原理推导出含水平圆柱形孔洞的半无限空间地表沉降的弹性积分形式解析解。然后运用对应原理,将体积变形视为弹性畸变视为 Maxwell 黏弹性,对地表沉降弹性积分形式解析解进行拉普拉斯变换,得到时空域上的地表沉降的黏弹性积分形式解析解,从而建立隧道地表沉降的黏弹模型。模型揭示隧道地表沉降槽宽度系数为 0.6,与多地区沉降监测数据吻合良好,为隧道地表沉降预测提供了一套新的基于力学理论的方法。

**关键词:**隧道;地表沉降;力学解析解;黏弹性模型;无量纲化

**中图分类号:** TU451 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-5485(2018)03-0180-06

## 1 研究背景

隧道开挖施工是在岩土体内部进行,施工过程中不可避免地会对岩土体产生扰动,引起隧道周边地表产生沉降。当沉降超过一定限度时,势必会危及周围地面建筑设施、道路和地下管线的安全。为了减少由于隧道施工及长期运行引起的地表沉降对地面建筑物及地下设施的损害,以及对周围环境的不良影响,有必要对地表沉降进行合理有效的预测<sup>[1]</sup>。

关于地下空间开挖和运行引起地表沉降的研究历史已久,但是关于含孔洞的半无限空间地表沉降的理论研究还不够深入,没有形成一套完整的体系,基于经典力学原理的分析方法较少<sup>[2]</sup>。现阶段,地表沉降预测大多采用的是基于随机介质理论的概率积分方法<sup>[3]</sup>、典型曲线法等唯象学方法,隧道地表沉降预测大多采用经验方法,如 Peck 公式<sup>[4]</sup>等。理论研究方面主要包括 1958 年日本学者 Mogi<sup>[5]</sup> 参考 Yamakawa<sup>[6]</sup> 的研究成果,将其变形公式引入到火山区地表变形预测研究中,得到了很好的近似效果;麻凤海等<sup>[7-8]</sup> 利用流变力学原理研究了地表下沉的动态变化过程,根据板壳弯曲理论分析了岩层与地表移动规律;Fialko 等<sup>[9]</sup> 利用半无限空间内一个水平圆形受压裂缝模型,推导出了地表的垂直和水平位移;

Eickemeier<sup>[10]</sup> 根据盐岩的蠕变建立了腔体收缩体积与地表沉降之间的关系;李银平等<sup>[2]</sup> 利用火山地震学中用于预测火山喷发地区地表变形的 Mogi 模型,得到库区地面垂直位移和水平位移的弹性解,但此解仍是近似解。

本文首先对已有的含球形孔洞的半无限空间地表沉降双重积分解析解<sup>[2]</sup> 进行分析,探讨沉降槽的特征。然后,根据弹性力学理论,从无限域内轴对称平面应变问题出发,将水平隧道地表沉降问题近似为弹性半无限空间内水平圆柱形孔洞收缩引起的边界位移问题,运用叠加原理推导出弹性半无限空间内部一定埋深处的圆柱形孔洞在一定径向面力作用下产生的弹性地表沉降积分形式的解析解。最后,运用对应原理及拉普拉斯变换得到黏弹性地表沉降积分形式解析解,从而为隧道开挖及运行地表沉降预测提供一套新的基于力学理论的方法。

## 2 含球形孔洞的半无限空间地表沉降解析解

### 2.1 双重积分弹性解析解的无量纲分析

李银平等<sup>[11]</sup> 从弹性力学理论出发,运用对称及叠加原理推导出含球形孔洞的弹性半无限空间地表沉降双重积分解析解为

收稿日期: 2017-09-18; 修回日期: 2017-10-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(51274187, 51404241, 51304187)

作者简介: 孔庆聪(1991-) 女,山东泰安人,硕士,主要从事地下能源储备库和隧道的地表沉降以及公路工程研究工作。E-mail: 1273593776@qq.com

$$w(r) = \frac{(1 - \nu^2) pa^3}{\pi E} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' \quad (1)$$

式中:  $E$  为拉压弹性模量;  $\nu$  为泊松比;  $p$  为球形孔洞的收缩面力;  $a$  为球形孔洞的半径;  $f$  为球形孔洞中心点的埋深;  $r$  为任意一点到地表对称中心的距离;  $w$  为地表沉降;  $\theta$  为积分变量。

将式(1)无量纲化,即令  $W = \frac{w}{f}$ ,  $A = \frac{a}{f}$ ,  $R = \frac{r}{f}$ ,  $R' = \frac{r'}{f}$  得到

$$W(R) = \frac{(1 - \nu^2) pA^3}{\pi E} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2 - R^2 - R'^2 - 2RR'\cos\theta}{(1 + R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dR' \quad (2)$$

式(2)即为无量纲的含球形孔洞弹性半无限空间的地表沉降双重积分解析解。该表达式表明无量纲的地表沉降  $W(R)$  与球形孔洞的收缩面力  $p$  和无量纲半径的立方  $A^3$  成正比。

令双重积分

$$J = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2 - R^2 - R'^2 - 2RR'\cos\theta}{(1 + R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dR' \quad (3)$$

从式(3)中可以看出,该双重积分  $J$  仅与无量纲半径  $R$  有关,地表沉降曲线形状函数与球形孔洞的地层参数无关,与几何参数和力学参数也无关。此表达式适用于球形孔洞的半径与埋深之比  $a/f \ll 1$  的情况,对于埋深较浅的孔洞计算则会有一定误差。

### 2.2 双重积分 $J$ 的计算方法

对于  $J$  的计算,可采用 Maple 数学计算软件来进行。对于  $R=0.1$  时,求解双重积分的主要计算程序如下:

```
restart;
f := (2 - 0.1^2 - R^2 - 2 * 0.1 * R' * cos(theta)) / ((1 + 0.1^2 + R^2 + 2 * 0.1 * R' * cos(theta))^(5/2));
evalf(int(int(f(R', theta), theta = 0 .. 2 * pi), R' = 0 .. infinity)).
```

对于不同的  $R$  值,只需将程序中的 0.1 换成相应的值即可。双重积分  $J$  与  $R$  的关系曲线如图 1 所示,经计算可得该曲线的拐点的位置为  $R=0.5$ ,即半无限空间地表沉降曲线的拐点与对称中心的距离为  $1/2$  埋深处。

### 2.3 双重积分的黏弹性解析解

李银平等<sup>[11]</sup>假设材料呈弹性体积变形和

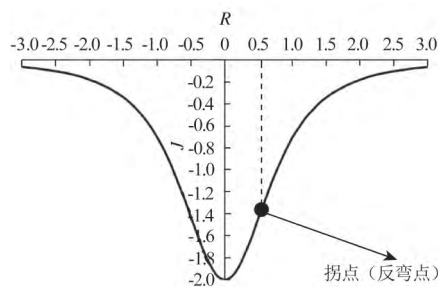


图 1 双重积分  $J$  与  $R$  的关系曲线

Fig.1 Relation between double integral  $J$  and  $R$

Maxwell黏弹性畸变,即应力-应变关系的球张量是弹性关系,而偏张量部分为 Maxwell 材料的黏弹性关系<sup>[12]</sup>。运用对应原理和拉普拉斯变换推导出含球形孔洞黏弹性半无限空间的地表沉降双重积分解析解为

$$w(r, t) = \frac{pa^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' \cdot \left\{ \frac{3K + 2G_1}{(6K + G_1)G_1} + \frac{t}{2\eta_1} + \frac{G_1}{4K(6K + G_1)} \left[ 1 - e^{-\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1}t} \right] \right\} \quad (4)$$

式中:  $K$  为体积弹性模量;  $\eta_1$  和  $G_1$  分别为 Maxwell 模型受剪切时阻尼器的黏性系数和弹簧的弹性模量。且有

$$G_1 = \frac{E}{1 + \nu} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

当  $t=0$  时,代入式(4)可得

$$w(r, 0) = \frac{pa^3}{\pi} \frac{3K + 2G_1}{(6K + G_1)G_1}$$

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' =$$

$$\frac{pa^3 (1 - \nu^2)}{\pi E}$$

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' = w(r) \quad (5)$$

退化为弹性解,即式(1)。

那么,含球形孔洞黏性半无限空间的地表沉降积分形式解析解为

$$w(r, t) \eta = \frac{pa^3}{\pi} \left\{ \frac{t}{2\eta_1} + \frac{G_1}{4K(6K + G_1)} \left[ 1 - e^{-\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1}t} \right] \right\} \cdot \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{2f^2 - r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\theta}{(f^2 + r^2 + r'^2 + 2rr'\cos\theta)^{\frac{5}{2}}} d\theta \right] dr' \quad (6)$$

### 3 隧道地表沉降的弹性模型

本文研究水平隧道无支护情况下的地表沉降及其时效特征,对于隧道施工过程中(包括开挖方式、支护措施及支护时间)对地表沉降的影响将在后续工作中加以详细研究。

隧道开挖对附近岩土体扰动较大,会发生一定损伤和非弹性形变,因此隧道开挖引起的地表沉降包含 2 个方面:一是开挖卸荷引起的上覆岩土体弹性变形;二是隧道附近岩土体破损和塑性变形导致的附加地表变形。本文主要对岩土体开挖卸荷引起的地表沉降及其时效效应展开分析,以期得到基于力学理论的解析解。

#### 3.1 整体思路

如图 2 所示  $x$  轴为隧道开挖方向,  $yo z$  平面是隧道的横截面( $x$  轴垂直于  $yo z$  平面,为了图像更加清晰直观,在图 2 中不标识  $x$  轴)。目前,关于弹性半无限空间内水平圆柱形孔洞受力收缩导致的边界位移  $w(y)$  问题,大多是一些唯象的经验近似解,尚未发现精确理论解。对于长隧道问题,可考虑为平面应变问题。对于球形孔洞的三维问题,文献[11]已给出了积分形式的弹性解式(1),可惜对于二维问题却不能简单地由三维解退化而来,需要采用类似的思路重新推导。

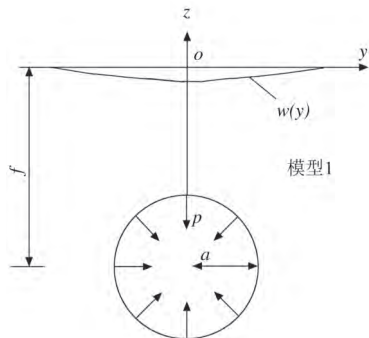


图 2 含水平圆形孔洞半无限空间的弹性模型  
Fig.2 Elastic model in the elastic half infinite space containing a horizontally cylindrical cavern

为了求解该问题,构造含 2 个相同圆形孔洞的双圆洞无限平板模型。将该模型沿对称面分解,并进行受力分析(在漫长的地质历史过程中,由重力产生的地表沉降已经完成,此处不考虑重力对地表沉降的影响)可得到如图 3(a) 所示的模型 2 和模型 3,由于这 2 个模型完全相同,计算时只需考虑其中一个即可。

以模型 3 为例进行分析,在面力  $p$  和表面法向面力  $\sigma_z(y)$  共同作用下,上表面法向位移为 0。根据弹性力学理论中的叠加原理,模型 3 是图 3(b) 中

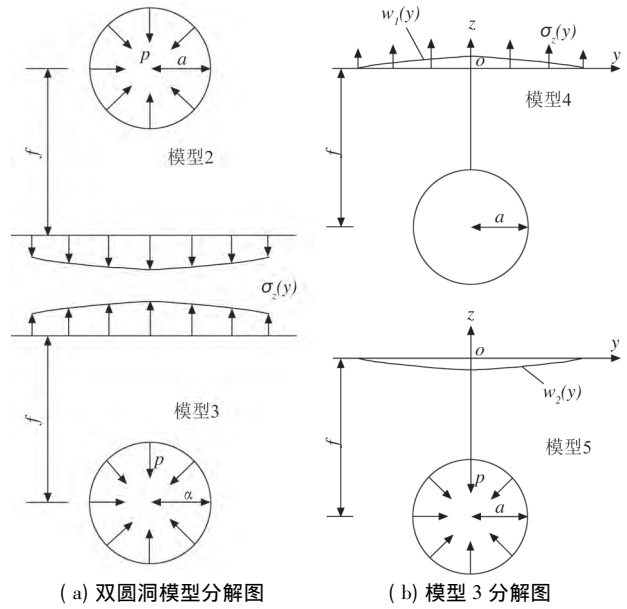


图 3 双圆洞模型分解图

模型 4 和模型 5 的叠加,故  $w_1(y) + w_2(y) = 0$ 。因此  $w(y) = -w_1(y) = w_2(y)$ 。这样,就将原问题(模型 1,即模型 5)中  $w(y)$  的问题转化为求模型 4 中  $w_1(y)$  的问题。但是,目前表面法向面力  $\sigma_z(y)$  未知。

#### 3.2 轴对称平面应变问题

为了获得模型 4 中的表面法向面力,首先看如图 4 所示的无限平板轴对称平面应变问题。

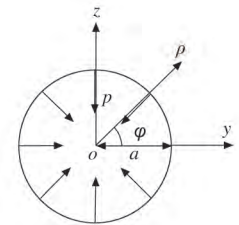


图 4 隧道横截面  
Fig.4 Cross section of tunnel

轴对称应力的一般性解答为<sup>[13]</sup>

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2\ln\rho) + 2C; \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2\ln\rho) + 2C; \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

轴对称应力状态下对应的位移分量为

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1 + \mu}{E} [-A/\rho + 2(1 - 2\mu) B\rho(\ln\rho - 1) + (1 - 4\mu) B\rho + 2(1 - 2\mu) C\rho] + I\cos\varphi + K\sin\varphi; \\ u_\varphi = -\frac{4B(1 - \mu^2)\rho\varphi}{E} + H\rho - I\sin\varphi + L\cos\varphi \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $u_\rho$  为径向位移;  $u_\varphi$  为环向位移;  $\varepsilon_\rho$  为径向应变;  $\varepsilon_\varphi$  为环向应变;  $\sigma_\rho$  为径向应力;  $\sigma_\varphi$  为环向应力;  $\lambda$  和  $\mu$  为 Lamé 常数;  $A B C H I L$  都是待定的常数,其中常数  $H I L$  代表刚体位移分量,故  $H=I=L=0$ 。

由位移单值条件  $B=0$  和边界条件

$$\sigma_\rho|_{\rho=a} = \frac{A}{\rho^2} + 2C = p, \sigma_\rho|_{\rho \rightarrow \infty} = \frac{A}{\rho^2} + 2C = 0,$$

可得

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{pa^2}{\rho^2}; \\ \sigma_\varphi = -\frac{pa^2}{\rho^2}; \\ \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = 0; \\ u_\rho = -\frac{(1+\mu)pa^2}{E\rho}; \\ u_\varphi = 0. \end{cases} \quad (9)$$

### 3.3 柱坐标系与直角坐标系之间的变换

本文将隧道弹性沉降模型简化为轴对称平面应变问题。地表沉降仅与中心线的距离  $\rho$  有关,与角度  $\varphi$  和掘进深度  $x$  无关。为计算模型 4 中的表面法向面力,将极坐标系转化为直角坐标系,如图 5 所示。

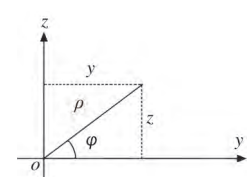


图 5 坐标系转换示意图  
Fig.5 Transformation of coordinate system

极坐标系  $(\rho, \varphi)$  与直角坐标系  $(y, z)$  的转换关系为

$$\begin{cases} y = \rho \cos\varphi; \\ z = \rho \sin\varphi. \end{cases}$$

极坐标系与直角坐标系之间单位矢量间的变换矩阵为

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

直角坐标系下的应力矩阵为

$$\begin{aligned} [\sigma_d] &= [\beta]^T [\sigma_c] [\beta] = \\ & \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sigma_\rho \cos^2\varphi + \sigma_\varphi \sin^2\varphi & (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin\varphi \cos\varphi \\ (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin\varphi \cos\varphi & \sigma_\varphi \cos^2\varphi + \sigma_\rho \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

将式 (9) 代入式 (10) 中,可得

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_\varphi \cos^2\varphi + \sigma_\rho \sin^2\varphi = \frac{pa^2}{\rho^2} (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = \\ & \frac{pa^2(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.4 隧道地表沉降弹性模型的求解

由于构造的双圆洞平板模型是对称模型,对称面上没有法向位移,且切向应力为 0,仅分布着法向应力,并且 2 个圆内面力引起的对称面上的法向应力大小相等,那么对称面上法向应力的大小由式 (11) 可得

$$\begin{aligned} \sigma_z(y)|_{z=f} &= 2 \frac{pa^2(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2} \Big|_{z=f} = \\ & \frac{2pa^2(f^2 - y^2)}{(y^2 + f^2)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

这样就获得了模型 4 中法向面力表达式。

半平面体在边界上受法向集中力作用,如图 6 所示,地表沉降<sup>[13]</sup>为

$$w = \frac{2(1-\nu^2)F}{\pi E} \ln|y| + \frac{(1+\nu)F}{\pi E}. \quad (13)$$

由于该法向面力是非均匀分布面力,需进行积分计算。任意一点  $(y, 0)$  的沉降值是由分布荷载叠加产生的,建立如图 7 所示的直角坐标系。

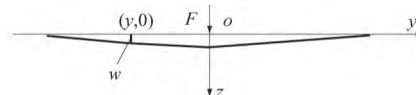


图 6 半平面体在边界上受集中力示意图

Fig.6 Concentrated force on the half-plan border

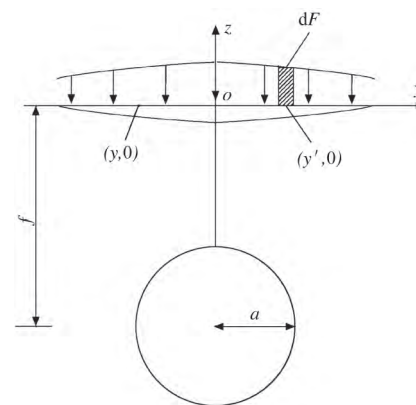


图 7 隧道沉降计算示意图

Fig.7 Calculating diagram for surface subsidence above tunnel

任意微元荷载  $dF$  及其引起的微元沉降  $dw$  为:

$$dF = \sigma_z(y') dy' = \frac{2pa^2(f^2 - y'^2)}{(y'^2 + f^2)^2} dy'; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} dw &= \frac{(1+\nu)pa^2}{\pi E} [2(1-\nu) \ln|y' - y| + 1] \cdot \\ & \frac{(f^2 - y'^2)}{(y'^2 + f^2)^2} dy'. \end{aligned} \quad (15)$$

那么

$$w(y) = \frac{2(1 - \nu^2) pa^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |y' - y|) \frac{f^2 - y'^2}{(y'^2 + f^2)^2} dy' \quad (16)$$

式(16)即为弹性半无限空间内部在一定埋深的隧道引起的地表沉降积分形式的解析解。

### 4 隧道地表沉降的黏弹模型

李银平等<sup>[11]</sup>在求解盐穴地下储库地表沉降的黏弹性解析解时采用的是 Maxwell 模型,获得了积分形式解析解,本节求解隧道地表沉降的黏弹性解析解时仍采用 Maxwell 模型。

#### 4.1 Maxwell 模型简介

Maxwell 模型是由弹簧和阻尼器串联而成<sup>[12]</sup>,如图 8 所示。

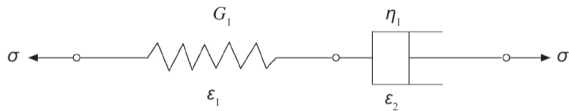


图 8 Maxwell 模型组成

Fig.8 Composition of Maxwell model

设在应力  $\sigma$  作用下,弹簧和阻尼器的应变分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ ,则总应变为

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Maxwell 模型的应力应变微分关系式为

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} \quad (17)$$

式中  $\eta_1$  和  $G_1$  分别为 Maxwell 模型受剪切时阻尼器的黏弹性系数和弹簧的弹性模量。

假设材料呈弹性体积变形和 Maxwell 黏弹性畸变,即应力-应变关系的球张量是弹性关系而偏张量部分为 Maxwell 材料的黏弹性关系<sup>[12]</sup>,即

$$\begin{cases} P'_{(s)} = 1 + \frac{\eta_1}{G_1}s, Q'_{(s)} = \eta_1 s; \\ P''_{(s)} = 1, Q''_{(s)} = 3K. \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $K$  为体积弹性模量;  $s$  为拉普拉斯变换参量;  $P'_{(s)}, Q'_{(s)}, P''_{(s)}, Q''_{(s)}$  均为材料系数。

#### 4.2 隧道地表沉降的黏弹性解析解

将式(16)进行拉普拉斯逆变换得到

$$w(y, t) = \frac{2pa^2}{\pi} \left[ \frac{3K+2G_1}{(6K+G_1)G_1} + \frac{t}{2\eta_1} + \frac{G_1}{4K(6K+G_1)} \right] \cdot [1 - e^{-\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1}t}] \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |y' - y|) \frac{f^2 - y'^2}{(y'^2 + f^2)^2} dy' \quad (19)$$

此式即为半无限空间内部在一定埋深的圆柱形孔洞引起的地表沉降黏弹性积分形式的解析解。

当  $t=0$  时,代入式(19)可得

$$w(y, 0) = \frac{2pa^2}{\pi} \frac{3K + 2G_1}{(6K + G_1)G_1} \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |y' - y|) \frac{f^2 - y'^2}{(y'^2 + f^2)^2} dy' = \frac{2pa^2}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |y' - y|) \frac{f^2 - y'^2}{(y'^2 + f^2)^2} dy' = w(y)^e \quad (20)$$

那么,隧道地表沉降的黏性积分形式解析解为

$$w(y, t)^n = \frac{2pa^2}{\pi} \cdot \left\{ \frac{t}{2\eta_1} + \frac{G_1}{4K(6K + G_1)} [1 - e^{-\frac{6KG_1}{(6K+G_1)\eta_1}t}] \right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |y' - y|) \frac{f^2 - y'^2}{(y'^2 + f^2)^2} dy' \quad (21)$$

隧道地表沉降是一个随时间积累的动态发展过程,与工程地质情况、水文地质情况、隧道施工方法、施工技术水平及工程管理等因素有关。一般情况下,隧道开挖后紧接着进行衬砌支护,本文的模型可用于初期衬砌施工前的裸洞期。二次衬砌完工后,隧道变形和衬砌支护反力协同变化,变形大则反力相应增加,直到平衡,本文的模型不能直接应用,但是可以用于迭代计算。

#### 4.3 隧道地表沉降弹性解析解计算方法

隧道地表沉降弹性解析解的计算仍然采用 Maple 数学计算软件。首先,将式(16)无量纲化,令

$$W = \frac{w}{f}, A = \frac{a}{f}, Y = \frac{y}{f}, Y' = \frac{y'}{f}, \text{得到} \\ W(Y) = \frac{2(1 - \nu^2) pA^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |Y' - Y|) \frac{1 - Y'^2}{(Y'^2 + 1)^2} dY' \quad (22)$$

该无量纲的地表沉降值  $W(Y)$  与球形孔洞的收缩面力  $p$  和无量纲半径平方  $A^2$  成正比,与地层的弹性模量  $E$  成反比。

令积分

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln |Y' - Y|) \frac{1 - Y'^2}{(Y'^2 + 1)^2} dY' \quad (23)$$

从式(23)中可以看出,积分  $J$  仅与  $Y$  有关,对地表沉降曲线形状具有“控制”作用,与隧道的地层参数无关,与隧道的几何、力学参数也无关,针对理想状况但却是解析解,在已有的文献中尚未看到基于力学理论的解析解,一般只给出了经验公式。此表达式适用于深埋隧道,对于埋深较浅的隧道会有一定误差。

采用与 2.2 相同的计算方法,得到积分  $J$  与  $Y$

的关系曲线如图 9 所示。经计算可得该曲线的拐点的位置为  $Y=0.6$ , 即水平隧道地表沉降曲线的拐点对称中心点之间的距离为 0.6 倍的埋深处。根据韩焯等<sup>[4]</sup>的研究, 沉降槽宽度系数  $K$  为从沉降曲线对称中心到曲线拐点的距离  $i$  与隧道的埋深  $z_0$  之比, 即  $K = \frac{i}{z_0}$ 。

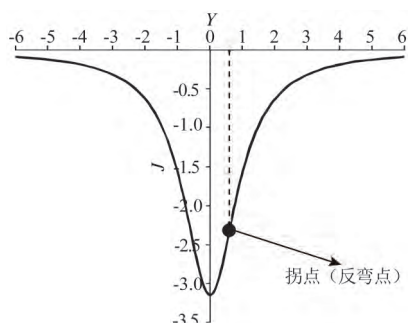


图 9 积分  $J$  与  $Y$  的关系曲线

Fig.9 Relation curve between integral  $J$  and  $Y$

根据较长期的地铁施工地表沉降监测结果, 上海地区的沉降槽系数建议值为 0.5, 广州和深圳地区为  $[0.6, 0.8]$ , 北京地区为  $[0.3, 0.6]$ <sup>[4]</sup>。本文通过计算得到的理论值为  $K=0.6$  (即  $Y=0.6$ )。这些经验值均在理论值附近, 差别并不大, 这就表明理论解是可靠的、合理的。

根据  $J$  的计算分析可以看到, 地层参数和隧道几何参数等只会改变沉降槽的宽度、深度, 但是不会改变形状控制点——反弯点的相对位置。因此, 本文主要是对具有普遍意义的地表沉降曲线形状加以分析 (即积分  $J$ ) , 并和我国几大地区的沉降槽系数经验值进行比对, 来验证公式的合理性。对于不同工程条件下 (成层地层、非圆隧道断面) 的地表沉降将另文分析研究。

本文隧道地表沉降预测模型是纯理论模型, 获得合适的地层参数后, 可有效预测不同地区、不同深度的各种隧道开挖地表沉降槽深度和范围, 而 Peck 公式等是经验公式, 需要根据某隧道现场监测数据来拟合。因此, 相对于经验公式, 本文的预测模型更具有一般意义, 为水平深埋隧道的地表沉降预测提供了一套新的基于力学理论的解析解, 尽管是积分形式, 但用本文提供的计算方法很方便。

### 5 结论与讨论

(1) 本文从弹性无限域内轴对称平面应变问题入手, 运用对应原理及对称性, 推导出深埋隧道地表沉降的弹性积分形式解析解。运用对应原理, 将体

积变形视为弹性, 畸变视为 Maxwell 黏弹性, 对其进行拉普拉斯变换, 得到时空域上的深埋隧道地表沉降的黏弹性积分形式解析解, 为隧道地表沉降的预测提供了一套新的基于力学理论的方法。

(2) 积分数值计算表明, 含球形孔洞半无限空间的无量纲地表沉降曲线形状与球形孔洞的埋深和半径无关, 深埋隧道无量纲地表沉降曲线形状也与隧道的埋深和半径无关, 前者沉降槽宽度系数  $K$  为 0.5, 后者为 0.6, 后者和已有多地区隧道地表沉降监测结果吻合良好。

(3) 为了能获得解析解, 本文选择了较为简单的黏弹模型, 对于更为贴近工程实际的复杂黏弹模型将另文研究; 本文只考虑了隧道开挖的地表竖向变形 (沉降), 关于地表水平变形也将在下一步工作中完成。

### 参考文献:

- [1] 周伟. 隧道施工地面沉降数值分析研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
- [2] 李银平, 孔君凤, 徐玉龙, 等. 利用 Mogi 模型预测盐岩储气库地表沉降[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(9): 1737-1745.
- [3] 任松, 姜德义, 杨春和, 等. 岩盐水溶开采沉陷新概率积分三维预测模型研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 133-138.
- [4] 韩焯, 李宁, STANDING J R. Peck 公式在我国隧道施工地面变形预测中的适用性分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 23-28.
- [5] MOGI K. Relations Between the Eruptions of Various Volcanoes and the Deformations of the Ground Surfaces around Them[J]. Bulletin of the Earthquake Research Institute, 1958, 36: 99-134.
- [6] YAMAKAWA N. On the Strain Produced in a Semi-infinite Elastic Solid by an Interior Source of Stress[J]. Journal of Seismological Society of Japan, 1955, 8(2): 84-98.
- [7] 麻凤海, 范学理. 水平煤层开采地表沉陷空间问题的理论研究[J]. 中国矿业, 1994, 3(6): 44-49.
- [8] 麻凤海, 范学理. 连续介质流变理论及其在岩层下沉动态过程中的应用[J]. 中国有色金属学报, 1996, 6(4): 7-12.
- [9] FIALKO Y, KHAZAN Y, SIMONS M. Deformation Due to a Pressurized Horizontal Circular Crack in an Elastic Half-space, with Applications to Volcano Geodesy[J]. Geophysical Journal International, 2001, 146(1): 181-190.
- [10] EICKEMEIER R. A New Model to Predict Subsidence above Brine Fields [C] // Solution Mining Research Institute. SMRI Fall 2005 Technical Conference, Nancy, France, October 2-5, 2005.

[11] 李银平,孔庆聪,施锡林,等. 盐穴地下储库地表沉降的黏弹模型及其应用[J]. 岩土力学,2017,38(7): 2049-2058.

[12] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社,1990.

[13] 徐芝纶. 弹性力学(上、下)[M]. 北京: 高等教育出版社,1990.

(编辑: 陈 敏)

### Viscoelastic Model of Surface Subsidence above Tunnels

KONG Qing-cong<sup>1,2</sup>, LI Yin-ping<sup>2</sup>, LI Shuo<sup>3</sup>, YANG Bo-jin<sup>2</sup>, LI Jin-long<sup>2</sup>

(1. Jimo Sub-bureau of Qingdao Highway Administration Bureau, Qingdao 266000, China;

2. Key Laboratory of Environmental Geotechnical Engineering of Hubei Province, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 3. Jimo International Trade City Development Investment Co., Ltd., Qingdao 266000, China)

**Abstract:** Surface subsidence will be induced by rock-soil mass being disturbed in the process of excavation and long-term operation of tunnels. At present, there is no mature analytical model based on the theory of mechanics. In this research, the surface subsidence above tunnel is approximated to boundary deformation in the elastic semi-infinite space containing a horizontally cylindrical cavern with shrinkage force. By solving the symmetrically plan-strain problem in elastic infinite space, the elastic analytical solution of the surface subsidence in integral form is derived with the principle of superposition. Subsequently, the viscoelastic analytical solution in integral form in space-time domain is obtained by Laplace transformation of elastic analytical solution with volume deformation regarded as elasticity and distortion as Maxwell viscoelasticity. The proposed model reveals that the width coefficient of settlement troughs above tunnels is 0.6, in good agreement with the monitoring data in many other regions. The method in this article offers a theoretical approach for surface subsidence prediction in the process of excavation and long-term operation of tunnels.

**Key words:** tunnel; surface subsidence; mechanical analytical solution; viscoelastic model; dimensionless

(上接第 179 页)

of anchor block. The research achievements offer reference for the structural design, foundation reinforcement, and limit bearing capacity of gravity anchorage system.

**Key words:** Xiushan bridge; gravity anchor; pile foundation of support pier; load sharing ratio; bearing capacity

## 长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室 “中交长科 BIM 勘察管理系统”顺利通过项目验收

2018 年 2 月 8 日,武汉中交岩土工程有限责任公司在武汉主持召开了“中交长科 BIM 勘察管理系统”项目的验收会。武汉中交岩土工程公司陈银生副经理、朱冬林总工程师、王猛副总工程师和长江科学院水利部岩土力学与工程重点实验室工程技术学科主任肖国强、项目负责人周黎明、罗荣博士等共同参会。中交长科 BIM 勘察管理系统具有信息管理功能、成图功能、数据统计功能、项目展示功能等,已取得中华人民共和国国家版权局颁发的计算机软件著作权登记证书。该系统到目前为止已在多个不同类型项目中进行试运行,并取得成功。

验收会上,水利部岩土力学与工程重点实验室李玉婕代表项目部向与会专家详细汇报了中交长科 BIM 勘察管理系统完成情况,重点演示了系统的成图功能。与会专家认真审阅了相关资料,经质疑与讨论,认为该项目按照合同要求完成全部工作内容,达到项目立项预期目标,满足验收条件,同意通过验收。

下一步水利部岩土力学与工程重点实验室将针对该系统的推广应用与武汉中交岩土工程公司开展进一步合作。

(摘自:长江水利科技网)