

DOI: 10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.2016.04.14

## 基于 $\chi^2$ 函数的 $e-p$ 曲线模型

黎澄生<sup>1</sup>, 贾鹏飞<sup>2</sup>

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所/岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北, 武汉 430071;  
2. 西北大学地质学系, 陕西, 西安 710069)

**摘要:** 首次基于  $\chi^2$  概率分布函数, 土颗粒空间分布采用立方体排列, 土颗粒间距假设符合  $\chi^2$  概率分布, 建立土体微观模型。针对不同分布的土体采用信息熵描述, 得到土体熵随着压力的增大而减小。对 6 组试验曲线进行拟合分析, 获得不同压力下的相对空间自由度变化趋势、土颗粒间距概率分布趋势, 各个土体的相对空间自由度在 2.4~2.9 之间, 并没有超过 3 和小于 2; 土颗粒间距比优势区间在 2 附近, 并随着压力的增大, 最大概率和优势区间分别增大和减小。

**关键词:**  $e-p$  曲线; 分布函数; 微观; 相对空间自由度

中图分类号: TU411.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2016)04-0084-05

## The $e-p$ curve model based on $\chi^2$ function

LI Chengsheng<sup>1</sup>, JIA Pengfei<sup>2</sup>

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China;  
2. Department of Geology, Northwestern University, Xi'an, Shaanxi 710069, China)

**Abstract:** A micro soil model is established based on the  $\chi^2$  function. the cubic arrangement is used to describe the soil particles. The probability distribution is assumed to agree with the  $\chi^2$  function. Different distributed soils are described with the information entropy, indicating that the entropy decreases with the increasing pressure. Six groups of data are tested and the relative spatial degree of freedom distribution tend of soils and the probability distribution of soil particle spacing are obtained. The relative spatial degree of freedom ranges from 2.4 to 2.9, and is less than 3 greater than 2; the edge of soil particle spacing is about 2, and the edge and maximum probability decreases and increases respectively. The micro soil model is based on the  $\chi^2$  function, which describes the statistical characteristics of soils, and provides reference for the description of soil microstructure.

**Keywords:**  $e-p$  curve; distribution function; microcosmic; relative spatial degrees of freedom

$e-p$  曲线指的是土在各级压力  $p$  与其相应的稳定孔隙比  $e$  之间的关系曲线, 常用于土的类别划分、土压缩性的表征、前期固结应力的求取、地基最终沉降量的计算等。描述  $e-p$  曲线的数学模型有指数模型、样条插值法、Harris 模型、泰勒多项式、双曲线方程<sup>[1~2]</sup> 等。张书宪<sup>[3]</sup>、刘春平等<sup>[4]</sup> 采用 3 次多项式拟合  $e-\lg p$  曲线; 姬宏等<sup>[5]</sup>、姜安龙等<sup>[6]</sup> 采用 4 次多项式拟合; 刘用海等<sup>[7]</sup> 采用 3 次多项式和最小二乘法回归拟合  $e-\lg p$  曲线, 王志亮等<sup>[8]</sup> 采用 Harris 模型拟合  $e-\lg p$  曲线。这些拟合  $e-\lg p$  曲线虽然很好地拟合了  $e-p$  曲线, 但是仅仅只是曲

线的拟合, 并没有物理模型作支撑, 也不能描述土体在压缩过程中的土颗粒变化特征, 特别是微观变化特征。

本文考虑土体压缩过程的微观特征, 分析其在压缩过程中的变化, 试图采用统计模型对其进行试探性描述分析。

### 1 模型建立

#### 1.1 $\chi^2$ 分布函数

这里首次引入  $\chi^2$  分布函数对土体进行描述。 $\chi^2$  分布密度函数是自由度  $n$  的连续概率函数, 概率分布

收稿日期: 2015-12-12; 修订日期: 2016-01-12

第一作者: 黎澄生(1992-), 男, 在读博士, 主要从事特殊土研究。E-mail: lichengsheng@outlook.com

曲线形式仅由自由度  $n$  决定。在对土体描述中可以借鉴  $\chi^2$  函数在一定程度上描述土的空间结构在不同自由度下的概率分布(图 1)。土在压缩过程中,土颗粒在空间运移过程中会受到周围土颗粒的侧向约束,故随着应力的增大,土颗粒之间越紧密,土颗粒的运动约束就越大,这种特征可采用空间相对自由度进行定量描述。

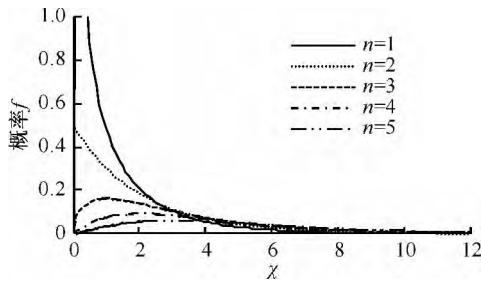


图 1  $\chi^2(n)$  的密度曲线  
Fig. 1 Density curve of  $\chi^2$

由于  $\chi^2$  分布函数中的参数自由度  $n$  的变化与土体在压缩固结过程中土颗粒运动约束下的自由度近似,假设土体微观结构上的土颗粒距离符合  $\chi^2$  分布,从而采用  $\chi^2$  分布函数对土在压缩固结中土颗粒之间的距离进行统计学描述。

自由度为  $n$  的  $\chi^2$  变量的分布密度为:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt (s > 0)$  为  $\Gamma$  函数<sup>[9]</sup>。

### 1.2 土颗粒三维空间几何统计模型

假设在三维空间坐标下,在土体中选取一个微小单元体,采用立方体排列模型,每个角点等效为一个球状土颗粒,并且这个球体是软球体,在一定条件下可以发生变形。其中土颗粒半径为  $r_0$ ,土颗粒之间的距离为  $r$  则有:

$$\begin{cases} v_1 = r^3 - 8 \times \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} r_0^3 \pi = r^3 - \frac{4}{3} r_0^3 \pi, \\ v_2 = \frac{4}{3} r_0^3 \pi, \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $v_1, v_2$ ——土体单元体的孔隙体积和土颗粒体积。

由于土颗粒半径  $r_0$  是变化的,同一土体的土颗粒半径是变化的,且不同土质的土颗粒半径也是不同的,不利于分析计算,可假设  $r_0 = 1$  化为土颗粒距离和土颗粒半径比值的函数,即取  $t = r/r_0$ 。当取土颗粒孔隙比为

0 时获得  $t$  下限  $\alpha$  为 1.61。土体的孔隙体积公式为:

$$V_1 = \int_{\alpha}^{+\infty} f(r) v_1 dr = \int_{\alpha}^{+\infty} f(t) v_1 dt \\ = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^3 - \frac{4}{3}\pi) dt \quad (3)$$

其中:  $\Gamma(\frac{n}{2}) = \int_{\alpha}^{+\infty} (t - \alpha)^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$ 。

土体的孔隙比  $e$  为:

$$e = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{4}{3}\pi} \\ = \frac{3}{2^{\frac{n}{2}+2} \Gamma(\frac{n}{2}) \pi} \int_{\alpha}^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^3 - \frac{4}{3}\pi) dt \quad (4)$$

但是上述假设会存在一定的误差,包括土颗粒距离和土颗粒半径之间的极限比值  $\alpha$  误差以及土颗粒在不同压力下的距离分布  $\chi^2$  函数误差。其中,当  $\alpha < r/r_0 < 2$  土颗粒已经挤压变形,即不再是球状颗粒,所以模型在计算上存在一定的误差,但这种误差是比较固定的。

含有误差项  $\theta$  的孔隙比  $e$  函数表达式为:

$$e = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\frac{4}{3}\pi} \\ = \frac{3}{2^{\frac{n}{2}+2} \Gamma(\frac{n}{2}) \pi} \int_{\alpha}^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t^2}{2}} (t^3 - \frac{4}{3}\pi) dt + \theta \quad (5)$$

其中  $\theta$  为常数;  $n = n(p)$ 。

经过大量的数据计算,初步得出土颗粒的相对空间自由度表达式:

$$n = 3 - ap^b + \frac{c}{p^d} \quad (6)$$

式中:  $a, b, c, d$ ——待定参数。

以表 1 中的 C 组数据为例,得出相对空间自由度和孔隙比之间的关系如图 2 所示。

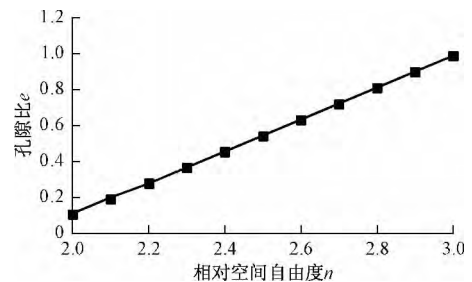


图 2 相对自由度  $n$  和孔隙比  $e$  之间的关系  
Fig. 2 Relationship between the relative freedom  $n$  and the void ratio  $e$

表 1 试验数据  
Table 1 Test data

土样	A	B	C	D	E	F
应力 $p/kPa$	各级应力下的孔隙比 $e$					
25	0.703	1.024	0.835	0.912	0.643	0.600
50	0.700	1.019	0.810	0.903	0.642	0.598
100	0.692	1.005	0.777	0.881	0.636	0.593
200	0.682	0.934	0.728	0.838	0.620	0.587
400	0.663	0.853	0.674	0.775	0.577	0.574
800	0.604	0.768	0.604	0.707	0.528	0.529
1600	0.529	0.682	0.529	0.616	0.480	0.479
3200	0.449	0.589	0.449	0.525	0.431	0.430

注: A、B 组摘自文献[5], C 组摘自文献[11], D 组摘自文献[8], E、F 组摘自文献[12]; 缺省值采用线性插值处理。

### 1.3 土体的熵

熵是热力学中描述粒子混乱程度的度量, 是无序程度的度量。熵的含义具有很广泛的应用, 特别是应用于信息论中。1948 年 C. E. Shannon 与 N. Wiener 总结前人成果, 将信息熵和统计熵概念联系起来, 提出广义熵公式<sup>[10]</sup>:

$$H = -K \sum_i P_i \ln P_i \quad (7)$$

式中:  $H$ ——信息熵;

$K$ ——常数;

$P_i$ ——系统处于某种状态的概率。

对本土体统计模型中  $P_i$  为土颗粒处于某粒间距的概率  $f_i$ , 由于对粒间距的划分是任意的, 针对土体的描述对公式(7)修改为:

$$H = -d \cdot K \sum_i f_i \ln f_i \quad (8)$$

式中:  $d$ ——粒间距比  $t$  划分的等区间长度。

这里  $K$  设置为 1, 得出相对空间自由度  $n$  和土体混乱程度熵  $S$  的关系如图 3 所示。

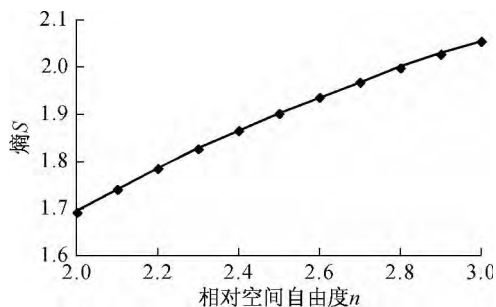


图 3 熵  $S$  和相对空间自由度  $n$  的关系  
Fig. 3 Relationship between entropy and relative space degree of freedom

从图 3 可以看出, 土体熵随着相对空间自由度的增大而增大。结合图 2 可知, 随着土体固结压力的增大, 相对空间自由度减小, 土体的孔隙比也随之

减小, 即土颗粒的排列更加紧密, 土颗粒间距离的差异越来越小, 在微观上土体颗粒之间的排列就更加有序。

### 2 计算实例

为了验证模型的可行性, 选取 6 组实验数据进行分析验证(表 1)。以 C 组试验数据为例进行具体分析。各参数为:  $a=0.134$ ,  $b=0.2$ ,  $c=0.1$ ,  $d=0.03$ ,  $\theta = -12.1$ 。相对自由度  $n$  和土体孔隙比  $e$  之间的相关性为 0.997。理论计算结果分别如图 4~6 所示。

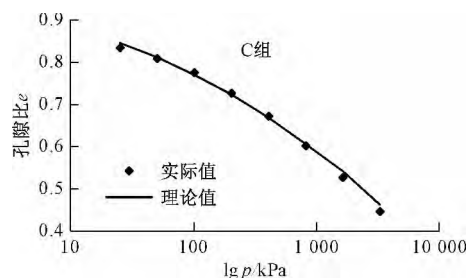


图 4 试验值和理论值

Fig. 4 Comparing of the experimental and theoretical values

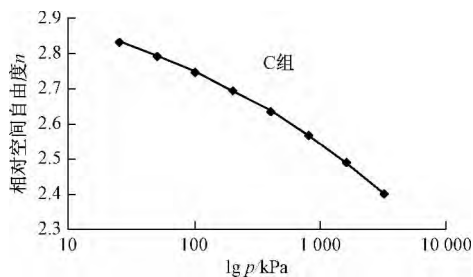


图 5 相对自由度  $n$  随应力变化趋势

Fig. 5 Change in the relative freedom  $n$  with the stress direction

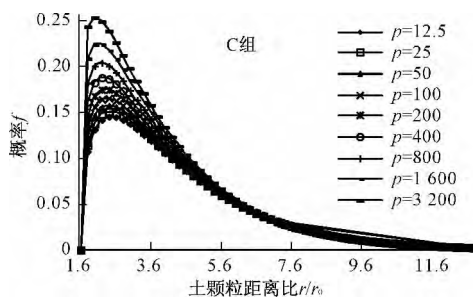


图 6 不同应力下土颗粒距离比概率分布

Fig. 6 Probability distribution of the soil particles distance ratio at the different stress

从图 4~6 中可以看出, 模型理论值和实际值比较接近, 相对空间自由度  $n$  和孔隙比  $e$  具有很强的相关性; 在模型假设中, 假设孔隙比为 0 状态的概率为 0; 土颗粒的分布概率一开始随着土颗粒的增加而急剧增

大,形成一个峰值,随后缓慢减小;土颗粒间距比优势区间在 2 附近,并随着压力的增大,最大概率和优势区间分别增大和减小;相对空间自由度  $n$  最大均不超过 3,符合客观实际。因为当土颗粒空间自由度达到 3 甚

至超过 3 时,土颗粒处于完全自由状态即流动状态,但是在自然环境中这种状态是不存在的。

同理分析其它组数据,整理计算结果如表 2、图 7 和图 8 所示。

表 2 各组土样计算结果

Table 2 Results of the soil samples in each group

A					B			
压力/kPa	实际值	模型理论值	误差/%	$n$	实际值	模型理论值	误差/%	$n$
25	0.703	0.6952	1.11	2.8356	1.024	1.0288	0.51	2.9227
50	0.7	0.6993	0.10	2.8402	1.019	0.9912	2.76	2.8872
100	0.692	0.692	0.00	2.8320	1.005	0.9539	5.08	2.8454
200	0.682	0.6733	1.28	2.8112	0.934	0.9087	2.66	2.7948
400	0.663	0.6425	3.09	2.7766	0.853	0.8529	0.05	2.7323
800	0.604	0.5977	1.04	2.7264	0.768	0.7831	1.91	2.6541
1600	0.529	0.5361	1.34	2.6575	0.682	0.6952	2.09	2.5555
3200	0.449	0.4541	1.14	2.5655	0.589	0.5844	0.86	2.4308

C					D			
压力/kPa	实际值	模型理论值	误差/%	$n$	实际值	模型理论值	误差/%	$n$
25	0.835	0.845	1.20	2.8357	0.912	0.912	0	2.8994
50	0.81	0.81	0	2.7959	0.903	0.892	1.22	2.8769
100	0.777	0.769	1.03	2.7505	0.881	0.864	1.93	2.8455
200	0.728	0.723	0.69	2.6987	0.838	0.826	1.43	2.8025
400	0.674	0.67	0.59	2.6394	0.775	0.774	0.13	2.7445
800	0.604	0.61	0.99	2.5716	0.707	0.705	0.28	2.6671
1600	0.529	0.541	2.27	2.4941	0.616	0.613	0.49	2.5642
3200	0.449	0.462	2.90	2.4053	0.525	—	—	—

E					F			
压力/kPa	实际值	模型理论值	误差/%	$n$	实际值	模型理论值	误差/%	$n$
25	0.643	0.6526	1.49	2.8440	0.6	0.598	0.33	2.7548
50	0.642	0.6407	0.20	2.8306	0.598	0.6036	0.94	2.7610
100	0.636	0.6226	2.11	2.8104	0.593	0.6044	1.92	2.7549
200	0.62	0.5983	3.50	2.7831	0.587	0.587	0.00	2.7375
400	0.577	0.5673	1.68	2.7484	0.574	0.5605	2.35	2.7093
800	0.528	0.5289	0.17	2.7054	0.529	0.5247	0.81	2.6703
1600	0.48	0.4822	0.46	2.6531	0.479	0.479	0.00	2.6198
3200	0.431	0.4258	1.21	2.5899	0.43	0.4223	1.79	2.5567

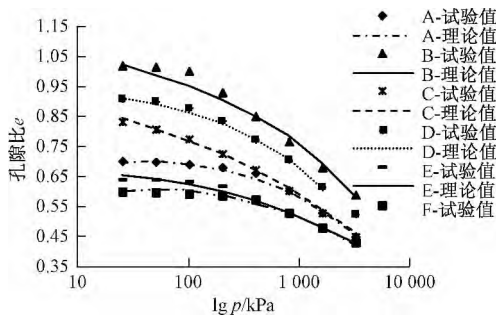


图 7 实验值和理论值

Fig. 7 Comparing of the experimental and theoretical values

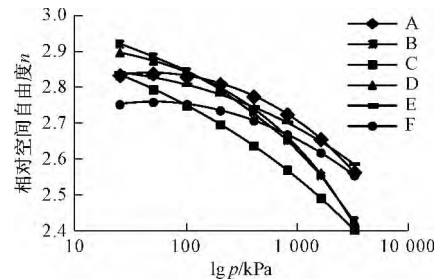


图 8 相对空间自由度  $n$  随应力变化趋势

Fig. 8 Relative freedom  $n$  with stress direction

### 3 结论

通过对土颗粒的微观结构分析并建立相应的几何模型,首次引入 $\chi^2$ 分布函数对土体土颗粒进行统计描述,可得以下结论:

(1) 采用6组数据进行验证,发现理论曲线和实验曲线是比较吻合的,土体相对空间自由度在2.4~2.9之间,而且最大误差维持在3%以内,说明采用 $\chi^2$ 分布函数可以较好地描述土体在压缩固结过程中土颗粒之间距离的变化。

(2) 相对于传统的 $e-p$ 压缩固结数学模型而言,该模型还能给出土体颗粒距离比的统计分布情况、土体在不同压力下的空间活动程度。

同时也还存在一些问题需要进一步探讨:①土体微观的统计分布是否是唯一的;②土体熵随着压力的增大而减小,但土体熵是否和土体强度之间存在联系,这些还需深入的讨论。

#### 参考文献:

- [1] 徐金明, 汤永净. 分层总和法计算沉降的几点改进[J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 518-521. [XU J M, TANG Y J. Several promotions on layerwise summation method to calculate function settlements [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(4): 518-521. (in Chinese) ]
- [2] 刘保健, 张军丽. 土工压缩试验成果分析方法与应用[J]. 中国公路学报, 1999, 12(1): 39-43. [LIU B J, ZHANG J L. Application and Analysing Method for Soil Compression Test [J]. China Journal of Highway and Transport, 1999, 12(1): 39-43. (in Chinese) ]
- [3] 刘用海, 朱向荣, 常林越. 基于Casagrande法数学分析确定先期固结压力[J]. 岩土力学, 2009, 30(1): 211-214. [LIU Y H, ZHU X R, CHANG L Y. Determining preconsolidation pressure by mathematic analysis based on casagrande method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(1): 211-214. (in Chinese) ]
- [4] 王志亮, 郑明新, 李永池. 求前期固结应力的数学模型研究及应用[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 66-69. [WANG Z L, ZHENG M X, LI Y C. Research on mathematic model method for calculating pre-consolidation pressure and its application [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(10): 66-69. (in Chinese) ]
- [5] 姜安龙, 赵春风, 高大钊. 确定先期固结压力的数学模型法[J]. 岩土力学, 2003, 24(2): 292-295. [JIANG A L, ZHAO C F, GAO D Z. Mathematical model method of determining preconsolidation pressure [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(2): 292-295. (in Chinese) ]
- [6] 刘春平, 李中秋, 张书宪. 如何确定土的先期固结压力的探讨[J]. 地质与勘探, 2003, 39(1): 91-92. [LIU C P, LI Z Q, ZHANG S X. Discussion how to determine the preconsoliation pressure [J]. Geology and Prospecting, 2003, 39(1): 91-92. (in Chinese) ]
- [7] 姬宏, 宋新江.  $e \sim \lg(p/kPa)$  曲线中曲率半径最小值的数值求法[J]. 水利水电技术, 2001, 32(10): 46-47. [JI H, SONG X J. A Numerical Method for Calculating the Minimum Radius of Curvature in  $e \sim \lg(p/kPa)$  Curve [J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2001, 32(10): 46-47. (in Chinese) ]
- [8] 张书宪. 用计算机绘图确定先期固结压力的一种方法[J]. 岩土工程界, 2000, 3(8): 45-46. [HANG S X. A method of computer graphing to determine the preconsolidation pressure [J]. Geotechnical Engineering World, 2003, 3(8): 91-92. (in Chinese) ]
- [9] 张永利. 关于伽马分布及相关分布性质的一点研究[J]. 大学数学, 2012, 28(3): 135-140. [ZHANG Y L. A Research for Character of Gamma Distribution and Its Relevant Distribution [J]. College Mathematics, 2012, 28(3): 135-140. (in Chinese) ]
- [10] 冯尚友. 信息熵与最大熵原理[J]. 水利电力科技, 1995, 22(3): 24-29. [FEN S Y. Information Entropy and Maximum Entropy Principle [J]. Water Resources and Electric Power, 1995, 22(3): 24-29. (in Chinese) ]
- [11] 姬付全, 经绯, 刘志彬, 等. 利用3次样条插值确定室内压缩试验先期固结压力[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(6): 96-100. [JI F Q, JING F, LIU Z B, et al. Determining Pre-consolidation Pressure of Clays with Cubic Spline Interpolation in Three Consolidation Tests [J]. Journal of East China Jiaotong University, 2011, 28(6): 96-100. (in Chinese) ]
- [12] 韦琪, 董忠级. 准确测求土的先期固结压力[J]. 大坝观测与土工测试, 2000, 24(4): 43-44. [WEI Q, DONG Z J. Accurate Measurement Soil Pre-consolidation Pressure [J]. Dam Observation and Geotechnical Tests, 2000, 24(4): 43-44. (in Chinese) ]

责任编辑: 张明霞